

港湾技研資料

TECHNICAL NOTE OF
THE PORT AND HARBOUR RESEARCH INSTITUTE
MINISTRY OF TRANSPORT, JAPAN

No. 722

Mar. 1992

海洋波の方向スペクトルの推定法に関する研究

橋 本 典 明

運輸省港湾技術研究所



目 次

要 旨	4
第 1 章 序論	
1.1 研究の目的と課題	5
1.2 本研究の内容	5
第 2 章 方向スペクトルに関連する諸量の定義	
2.1 パワースペクトルとクロススペクトルの定義	7
2.2 方向スペクトルの定義	7
2.3 代表波向と方向分散指標の定義	8
2.4 方向スペクトルの標準形	9
第 3 章 方向スペクトルの推定法に関する既往の研究	
3.1 方向スペクトルとクロススペクトルの関係	11
3.2 入・反射波共存場での方向スペクトルとクロススペクトルの関係	12
3.3 クロススペクトルの推定法と推定誤差	13
3.4 既往の方向スペクトル推定法	14
3.5 議論	19
第 4 章 最大エントロピー原理を用いた方向スペクトル推定法	
4.1 情報量とエントロピーの定義	21
4.2 最大エントロピー原理を用いた確率密度関数の決定 (Jeynes の原理)	22
4.3 最大エントロピー原理を用いた方向スペクトル推定法 (MEP) の定式化	22
4.4 最大エントロピー原理法の数値計算法	23
4.5 最大エントロピー原理法の数値シミュレーションによる検討	24
4.6 最大エントロピー原理法の現地観測データへの適用	28
4.7 結論と議論	31
第 5 章 ベイズ型モデルを用いた方向スペクトル推定法	
5.1 ベイズの方法	35
5.2 赤池のベイズ型情報量基準	36
5.3 ベイズ型モデル	36
5.4 ベイズ型モデルを用いた方向スペクトル推定法 (BDM) の定式化	37
5.5 ベイズ法の数値計算法	39
5.6 ベイズ法の数値シミュレーションによる検討	41
5.7 結論と議論	52
第 6 章 反射率をモデルを規定するためのパラメータと見なした場合の入・反射波共存場を対象としたベイズ法の修正	
6.1 修正ベイズ法 (MBM) の推定理論の定式化	53
6.2 修正ベイズ法の数値計算法	55
6.3 修正ベイズ法の数値シミュレーションによる検討	56

6.4 結論と議論	62
第7章 方向スペクトルおよび反射率を未知量とする場合の入・反射波共存場を対象とした修正ベイズ法の拡張	
7.1 拡張ベイズ法 (EMBM) の推定理論の定式化	64
7.2 拡張ベイズ法の数値計算法	66
7.3 拡張ベイズ法の数値シミュレーションによる検討	68
7.4 結論と議論	73
第8章 ベイズ型モデルを用いた方向スペクトル推定法の現地観測データへの適用	
8.1 方向スペクトル観測システムの概要	74
8.2 観測機器の仕様	78
8.3 いわき沖波浪観測システムを対象とした数値シミュレーション による方向スペクトルの推定精度の検討	78
8.4 解析対象期間の海象特性	81
8.5 方向スペクトル推定法と観測波動量の相違による方向スペクトル推定値の特性	87
8.6 海洋波の方向スペクトル特性に関する2, 3の検討	90
8.7 結論と議論	101
第9章 結論	
参考文献	105
補章 A 方向スペクトルの推定における多変量自己回帰モデルの適用	107
補章 B ベイズ型モデルを用いた海洋波の非線形核関数の数値的推定	113

Study on Estimation Methods of Directional Ocean Wave Spectrum

Noriaki HASHIMOTO*

Synopsis

Directional Spectra are the fundamental properties of sea waves, which express the energy distribution as a function of wave frequency and wave propagation direction. So far, many methods for the estimation of directional spectra for various types of ocean wave measurements have been proposed. However, none of these methods has taken into consideration the errors occurred in the process of the estimation of cross-power spectra which are the base information for the directional spectral estimation. Those errors often lead to unusual directional spectra depending on the arrangement and the number of wave sensors. Therefore, it is of great importance to develop a method which gives an accurate and robust estimate of directional spectrum though the cross-power spectra are contaminated by the estimation errors.

In this report, first, several existing methods for estimating directional spectra are discussed from the view point of their own defects.

Secondly, a new method (MEP) with the use of the maximum entropy principle is proposed. This method can be applied for estimating directional spectra from simultaneous measurement of three-quantities related to random wave motions. This method is examined for numerical simulation data and validity of the method is discussed.

Thirdly, a new method (BDM) with the use of the Bayesian Model is proposed. This method can be applied for more than three arbitrary mixed instrument array measurements and has the highest resolution power for estimating directional spectrum of all the existing methods. It is also a robust method for estimating directional spectrum from the cross-power spectra contaminated by the estimation errors.

Fourthly, two different methods for estimating directional spectrum in incident and reflected wave field are proposed. The one method (MBM), which is developed by modifying the BDM, can be applied for the case where the reflection coefficient is known, and the other method (EMBM), which is developed by extending the MBM, can be applied if the reflection coefficient is not known. Each of the methods is also examined for numerical simulation data, and the validity of the methods is discussed.

Finally, the above methods (BDM and MEP etc.) are examined for the field data acquired at the offshore oil rig 42 km off the Iwaki coast (Northeastern coast of the main island of Japan), where four step type wave gauges and a two-axis directional current meter with a pressure sensor are installed on the legs of the oil rig for ocean directional wave measurements. The validity of the above methods is discussed with the good results.

Key Words: Directional Spectrum, Irregular waves, Field Observation, Maximum Entropy, Bayesian Statistics.

* Senior Research Engineer, Marine Hydrodynamics Division.

海洋波の方向スペクトルの推定法に関する研究

橋 本 典 明*

要 旨

海の波の基本的性質を表示する方法として、波のエネルギーが周波数および方向角に対して分布している状態を示す方向スペクトルがある。方向スペクトルの測定法や推定法はこれまでも多く提案されている。しかしながら、実際の不規則な波浪特性を精度良く推定し得る方向スペクトルの推定法はいまだ確立されていない。波浪の発生、発達、減衰の各段階を支配するメカニズムの解明のみならず、波浪災害の原因究明や港湾構造物の設計などの問題に対しても、方向スペクトルに関する知識が不可欠であり、より高精度かつ信頼性の高い方向スペクトルの推定法を開発する必要がある。

本論文は、海洋波の方向スペクトル推定法を既往の推定法とは異なる視点から考察し、極めて推定精度の良い方向スペクトル推定法を新たに提案したものである。必要最少の情報から方向スペクトルを推定するために最大エントロピー原理を利用する方法と、より多い情報から方向スペクトルを推定する場合に、情報相互間の誤差の影響を考慮することのできるベイズ統計学に基づく方法との、それぞれ新しい2つの方向スペクトル推定法を提案している。さらに後者の理論を修正あるいは拡張し、護岸や岸壁前面の入・反射波共存場で、方向スペクトルのみならず反射率も同時に推定し得る方法を提案している。

キーワード：方向スペクトル、不規則波、現地観測、最大エントロピー原理、ベイズ型モデル

* 海洋水理部 主任研究官

第1章 序論

1.1 研究の目的と課題

海の波は不規則である。このため、その特性を把握するためにスペクトルの概念を用いることが一般的である。周波数スペクトルについては既に多くの調査・研究が行われており、スペクトル構造もかなりのところまで明らかとなってきた。十分に発達した風波のスペクトル形、発達過程のスペクトル形など、幾つかの標準形が提案されているほか、スペクトルにおける平衡領域、発達過程における overshoot-undershoot の現象、あるいは非線形相互作用の機構などのかなり微細な領域にまで研究が進んでいる。

一方、波浪の本質的な構造を表わす方向スペクトルについてはいまだ十分に調査・研究されているとは言い難い。これは方向スペクトルの観測が多大な労力と費用を必要とするためである。波浪の発生、発達、減衰の各段階を支配するメカニズムの解明、あるいは港湾構造物の設計などの実用的な問題に対しても、方向スペクトルに関する知識が不可欠であることが指摘されており、方向スペクトルに関する調査・研究は今後精力的に取り組まなければならない重要な課題の一つである。

方向スペクトルを測定する方法はこれまでにいくつか提案されている。波高計群、流速計、波浪観測ブイなどを用いる直接測定法、あるいは写真や電波を利用するリモートセンシング法などがある^{1),2)}。また、これらの測定方法に応じて種々の方向スペクトル推定法が提案されている。例えば直接測定法に適用可能なものとして、直接フーリエ変換法 (Direct Fourier Transform Method または DFT 法)³⁾、パラメータ法^{4),5)}、分布関数法^{6),7)}、最尤法 (Maximum Likelihood Method または MLM)⁸⁾、拡張最尤法 (Extended Maximum Likelihood Method または EMLM)⁹⁾ などの方法がある。これらの方法はいずれも、波数・周波数スペクトルに伝達関数を乗じ、波数ベクトルについて Fourier 変換したものがクロススペクトルになるという、波数・周波数スペクトルとクロススペクトルの関係¹⁰⁾に基づいて推定する方法である。すなわち、クロススペクトルは方向スペクトルを推定する際の基本情報であり、方向スペクトルの推定精度はクロススペクトルの精度に依存する。

しかしながら上記のいずれの方法も、クロススペクトルに推定誤差が含まれる場合については考慮されていない。これは、これまでの方向スペクトルの推定理論は、

限られた数少ない観測波動量間のクロススペクトルから、より精度の良い方向スペクトルを推定することを主目的として導かれており、観測して得られたクロススペクトルが全て正しいものとして、推定理論が構成されていることに起因している。すなわち、これまでは、方向スペクトル観測の困難さから、少数の波動量のみしか観測し得ない場合が多く、方向スペクトルを推定するに際しても、一般には誤差そのものを評価し得なかったことによるものと思われる。

近年、方向スペクトルの関心が高まり、またその必要性からも、かなり大規模な観測が実施され、多くの波動量が観測されつつある。理論的には多くの波動量を観測することにより分解能の良い方向スペクトルが推定されるはずである。しかしながらこのような場合に、従来の方法を用いて方向スペクトル解析を実施すれば、観測波動量の増大とともにクロススペクトルの誤差に起因する異常な方向スペクトル推定値の出現割合も増大し、必ずしも分解能の良い、安定した方向スペクトルが得られるとは限らない。むしろ、方向スペクトルが異常な推定値を示すことにより、波浪現象の誤った解釈がなされる場合もある。したがって、少ない観測データから精度の良い方向スペクトルを推定することのみならず、観測誤差やクロススペクトルの推定誤差の影響を受けにくく、安定した方向スペクトルを推定し得る方法を開発する必要がある。

1.2 本研究の内容

本論文は、限られた観測データから安定した高精度の方向スペクトルを推定する方法を導いたもので、全体を9章で構成している。以下に各章の概要を示す。

第2章では、後の章での説明の便宜のために、方向スペクトルの推定法に関連する諸量の定義およびこれまでに得られている代表的な方向スペクトルの主要な観測成果を述べる。

第3章では、方向スペクトル推定法の基礎となる方向スペクトルとクロススペクトルの関係式を通常の不規則波浪場および入・反射波共存場のそれぞれの場合について示し、次に方向スペクトルを推定する際の基本情報となるクロススペクトルの推定法およびその推定誤差について述べる。また、既往の方向スペクトル推定法を(1)3成分の波動量の観測データに適用可能な方向スペクトル推定法、(2)3成分以上の任意の波動量の組み合わせに適

用可能な方向スペクトル推定法、(3)入・反射波共存場に適用可能な方向スペクトル推定法の3つに分けて、それぞれの場合に適用可能ないくつかの方法ならびにそれぞれの方法の問題点を述べる。

第4章では、簡便かつ実用的な波向観測手法の開発を目的として、方向スペクトルを推定するために必要最少な3成分の波動量の観測データから方向スペクトルを推定する方法を検討し、新たに不確定さの尺度であるエントロピーの概念を導入して、最大エントロピー原理から方向スペクトルを推定する方法について述べる。3成分の波動量の観測データを対象とする場合には、本方法は既往の方向スペクトル推定法に比べて高い分解能を有していることを示す。

第5章では少ない観測データから精度の良い方向スペクトルを推定することのみならず、観測誤差やクロススペクトルの推定誤差の影響を受けにくく、安定した方向スペクトルを推定できる方法として、ベイズ型モデルを導入した方向スペクトルの推定法について述べる。ベイズ型モデルを用いた推定理論の定式化に際しては、モデル分布として波浪の線形性を考慮して、自由度の大きい、波のエネルギーの離散分布的構造を想定している。さらに、それらの離散的なエネルギー分布が、方向角に対しては滑らかな連続関数であるという期待を事前分布として想定し、推定理論の定式化を行っている。本方法の推定精度や有効性、適用性を数値シミュレーションにより確かめ、二方向波浪のような複雑な波浪場を対象とする場合にも4成分以上の任意の観測波動量を用いる場合に

は、既往の推定法に比べて最も推定精度が良く、またクロススペクトルの推定誤差の影響を受けにくく、安定した推定法であることを示す。

第6章では、上記のベイズ型モデルを用いた方向スペクトル推定法を入・反射波共存場に適用可能な形に修正し、反射率をモデルを規定するパラメータと見なして、種々の反射率の中で最適な反射率を選択し、入・反射波の方向スペクトルを分離する方法について述べる。また、数値シミュレーション法により本方法の妥当性を検討した結果を示す。

第6章では、さらに上記の入・反射波共存場に適用可能なベイズ型モデルを用いた方向スペクトル推定法を拡張し、構造物の反射率も未知数として定式化し、入・反射波の方向スペクトルのみならず、反射率も周波数と方向角の関数として推定し得る方法を示す。本方法の妥当性や推定精度を数値シミュレーションにより確認し、極めて高精度に方向スペクトルおよび反射率を推定し得ることを示す。

第8章では、現地観測で得られた波浪データをもとに、本論文で示したベイズ型モデルを用いた方法および最大エントロピー原理を用いた方法等を用いて方向スペクトル解析し、これらの方向スペクトル推定法の現地観測データへの適用性、有用性を検討する。また、特に高波をもたらしたいくつかの気象擾乱時の波浪データを解析し、この場合の海洋波の方向スペクトル特性を調べる。

第9章では、最後に全体の総括を行う。

第2章 方向スペクトルに関連する諸量の定義

本章では、後の章での説明の便宜のために、方向スペクトルに関連する諸量の定義およびこれまでに得られている主要な観測成果を述べる。

2.1 パワースペクトルとクロススペクトルの定義

いま、関数 $x(t)$ を時間 t に関して定常な時系列変動量とし、Fourier-Stieltjes 積分によりこれを次式のように表現する。

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dX(\omega) \exp(i\omega t) \quad (2.1)$$

ここに、 i は虚数単位、 $dX(\omega)$ は角周波数 ω の複素振幅を表わし、角周波数 ω に関して次のような対称性がある。

$$dX^*(\omega) = dX(-\omega) \quad (2.2)$$

ここに、 $*$ は共役の複素数を表わす。このとき、パワースペクトル $S(\omega)$ は、

$$\begin{aligned} \langle dX(\omega_1) dX(\omega_2) \rangle &= \begin{cases} S(\omega_1) d\omega_1 & ; \omega_1 + \omega_2 = 0 \text{ のとき} \\ 0 & ; \omega_1 + \omega_2 \neq 0 \text{ のとき} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3)$$

あるいは別の表現を用いれば、

$$\langle dX^*(\omega) dX(\omega) \rangle = S(\omega) d\omega \quad (2.4)$$

で定義される。ここに、 $\langle \rangle$ はアンサンブル平均を意味する。パワースペクトルは実関数であり、式 (2.2) より次の対称性が導かれる。

$$S(\omega) = S(-\omega) \quad (2.5)$$

また、パワースペクトルの角周波数 ω に関する積分値は平均自乗値 $\langle x^2 \rangle$ に等しく、

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega \quad (2.6)$$

の関係がある。すなわち、パワースペクトルは平均自乗値 $\langle x^2 \rangle$ への Fourier-Stieltjes 成分からの寄与を表わす。

いま、関数 $y(t)$ を時間 t に関して定常な別の時系列変動量とし、 $x(t)$ と同様に、Fourier-Stieltjes 積分によりこれを次式のように表現する。

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dY(\omega) \exp(i\omega t) \quad (2.7)$$

このときクロススペクトル $\Phi_{xy}(\omega)$ は、式 (2.4) と同じ表現を用いて、

$$\langle dX^*(\omega) dY(\omega) \rangle = \Phi_{xy}(\omega) d\omega \quad (2.8)$$

で定義される。クロススペクトルは一般に複素数であり、実部と虚部に分けて、

$$\Phi_{xy}(\omega) = C_{xy}(\omega) - iQ_{xy}(\omega) \quad (2.9)$$

と表わす。このとき、 $C_{xy}(\omega)$ をコ・スペクトル、 $Q_{xy}(\omega)$ をクオドラチャ・スペクトルと呼ぶ。クロススペクトルには次のような関係がある。

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{xy}(-\omega) &= \Phi_{yx}(\omega) \\ \Phi_{xy}(\omega) &= \Phi_{yx}^*(\omega) \\ \Phi_{xy}^*(\omega) &= \Phi_{yx}(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

クロススペクトルは複素数であり、そのままでは2つの波動量 $x(t)$ および $y(t)$ の間の統計的性質を把握しにくい。そこで次の2つの量が定義されている。

$$\text{coh}^2(\omega) = \frac{|\Phi_{xy}(\omega)|^2}{\Phi_{xx}(\omega)\Phi_{yy}(\omega)} = \frac{C_{xy}^2(\omega) + Q_{xy}^2(\omega)}{\Phi_{xx}(\omega)\Phi_{yy}(\omega)} \quad (2.11)$$

$$\theta_{xy}(\omega) = \tan^{-1} \left\{ \frac{Q_{xy}(\omega)}{C_{xy}(\omega)} \right\} \quad (2.12)$$

式 (2.11) および式 (2.12) で定義される量をそれぞれコヒーレンスおよびフェイズと呼ぶ。コヒーレンス $\text{coh}^2(\omega)$ は2つの波動量 $x(t)$ と $y(t)$ の間の各角周波数成分ごとの線形性の程度を表わすもので、 $0 \leq \text{coh}^2(\omega) \leq 1$ である。一方、フェイズ $\theta_{xy}(\omega)$ は波動量 $x(t)$ と $y(t)$ の ω 成分である $X(\omega)$ と $Y(\omega)$ の位相差を与える。

2.2 方向スペクトルの定義

ランダムな波形をもつ海面波は、第1次近似として、微小な振幅をもつ多くの波数と角周波数の成分波がランダムな位相角をもって重合したものと解釈することができ、Fourier-Stieltjes 積分を用いて次式で表わされる¹²⁾。

$$\eta(x, t) = \int_k \int_\omega dA(k, \omega) \exp\{i(kx - \omega t)\} \quad (2.13)$$

ここに、 $\eta(x, t)$ は座標 $x = (x, y)$ 上で時刻 t での水面変

動, $\mathbf{k}$ は波数ベクトル, ω は角周波数である。また, $dA(\mathbf{k}, \omega)$ は複素振幅であり, その絶対値は振幅, 偏角は位相角であり, $0 \sim 2\pi$ の間に等密度にランダムに分布している。式 (2.13) は不規則な水面変動場が, 成分波の積分として表わされることを示しており, $|dA(\mathbf{k}, \omega)|^2$ は, 波数ベクトル $\mathbf{k}$, 角周波数 ω をもつ成分波の波動エネルギーを代表するものである。したがって, 波数ベクトルと角周波数に関するエネルギー密度を表わすものとして波数・周波数スペクトル $S(\mathbf{k}, \omega)$ を考えれば $\mathbf{k} \sim \mathbf{k} + d\mathbf{k}$, $\omega \sim \omega + d\omega$ の領域の波動エネルギーは $S(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k} d\omega$ であり, 次式により波数・周波数スペクトル $S(\mathbf{k}, \omega)$ が定義される¹²⁾。

$$\begin{aligned} \langle dA^*(\mathbf{k}, \omega) dA(\mathbf{k}', \omega') \rangle \\ = \begin{cases} S(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k} d\omega & ; \mathbf{k} = \mathbf{k}', \omega = \omega' \text{ のとき} \\ 0 & ; \mathbf{k} \neq \mathbf{k}', \omega \neq \omega' \text{ のとき} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.14)$$

波数ベクトルを極座標表示すると,

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y) = (k \cos \theta, k \sin \theta) \quad (2.15)$$

と表わされる。ここに, θ は波の伝播する方向角, k は波数ベクトルの絶対値であり, 微小振幅波を対象とする場合, 次式で表わされる分散関係式,

$$\omega^2 = gk \tanh kd \quad (2.16)$$

によって波数 k は角周波数 ω の関数として一義的に決められる。ここに, d は水深である。分散関係式の成立を前提とすれば, 式 (2.14) で定義される波数・周波数スペクトル $S(\mathbf{k}, \omega)$ は分散関係式を満足しない波数に対して 0 となり, 分散関係式を満足する波数 k_ω の付近でデルタ関数的な値となる。したがって, 波数・周波数スペクトルは, デルタ関数 $\delta(k - k_\omega)$ に方向角 θ と角周波数 ω の関数を乗じたものとして表現できる。この関数を方向スペクトルと呼び, 波数・周波数スペクトルと独立変数だけを変えて $S(\omega, \theta)$ と表示する。すなわち, $d\mathbf{k} = k dk d\theta$ より,

$$S(\mathbf{k}, \omega) = \delta(k - k_\omega) S(\omega, \theta) / k \quad (2.17)$$

であり, したがって式 (2.14) より,

$$\langle dA^*(\omega, \theta) dA(\omega, \theta) \rangle = S(\omega, \theta) d\omega d\theta \quad (2.18)$$

となる。なお, 分散関係式により ω と k は 1 対 1 に対応することより, 方向スペクトルを表わす独立変数として ω の代わりに k を用い, $S(k, \theta)$, さらに $S(\mathbf{k})$ と書くこともできる。海岸工学の分野では一般に角周波数 ω の代

わりに周波数 f を用い,

$$\langle dA^*(f, \theta) dA(f, \theta) \rangle = S(f, \theta) df d\theta \quad (2.19)$$

によって方向スペクトルを定義している。また, 方向スペクトル $S(f, \theta)$ をパワースペクトル $S(f)$ と方向分布関数 $G(\theta|f)$ の積として,

$$S(f, \theta) = S(f) G(\theta|f) \quad (2.20)$$

のように表わすこともある。方向分布関数は 0 以上の値を取り, かつ,

$$\int_0^{2\pi} G(\theta|f) d\theta = 1 \quad (2.21)$$

あるいは別の表現を用いれば,

$$\int_0^{2\pi} S(f, \theta) d\theta = S(f) \quad (2.22)$$

の関係がある。

2.3 代表波向と方向分散指標の定義

代表波高・周期はある面では波の周波数スペクトルを代表するパラメータの意味を持っている。波向の概念も正確には波の方向スペクトルの表示パラメータとして取り扱うべきものであり, 波向を定義するためには方向スペクトルの概念を用いなければならない。

Longuet-Higgins¹³⁾は1956年に時間と共に移動する不規則波形の統計解析理論を発表しており, この中で不規則波形の代表波向および方向集中度についての提案を行っている。いま, 波数空間表示の方向スペクトルを $S(k_x, k_y)$ で表わし, その原点に関するモーメントを次のように表記する。

$$M_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(k_x, k_y) k_x^p k_y^q dk_x dk_y \quad (2.23)$$

$p=q=0$ の 0 次モーメントは $M_{00} = \overline{\eta^2}$ である。また, 1 次モーメントからは平均波数 $\overline{k_x}$, $\overline{k_y}$ が次のように定義できる。

$$\overline{k_x} = M_{10}/M_{00}, \quad \overline{k_y} = M_{01}/M_{00} \quad (2.24)$$

平均波向 $\overline{\theta}$ は, $\overline{k_x}$, $\overline{k_y}$ で与えられるスペクトルの重心と座標原点を結ぶ方向として次のように求められる。

$$\overline{\theta} = \tan^{-1} \frac{\overline{k_y}}{\overline{k_x}} = \tan^{-1} \frac{M_{01}}{M_{10}} \quad (2.25)$$

次に, 2 次モーメントからは座標軸を回転したときに

座標軸上の自乗平均波数が最大、すなわち波の峯が最も密に並んでいる方向が次式のように求められる。

$$\theta_p = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2M_{11}}{M_{20} - M_{02}} \quad (2.26)$$

Longuet-Higgins は一般の不規則波形に対して θ_p を principal direction と呼んでおり、波浪については主波向と呼ばれる。平均波向は全平面 ($-180^\circ \sim 180^\circ$) で求められるのに対し、主波向は半平面 ($-90^\circ \sim 90^\circ$) でしか求められず、波の進行・逆行の判別は不能である。また、二方向波浪系に主波向を用いる場合には注意を要する。特に、二方向波浪系が 90° 以上の交差角をなして来襲する場合には、主波向 θ_p は方向スペクトルのエネルギーの平均的な伝播方向とは異なった方向を示すようになる¹⁴⁾。

Longuet-Higgins はさらに方向スペクトルのモーメントを使った方向集中度の指標として次のような long-crestedness パラメータ γ (波峯長パラメータ) を定義している。

$$\gamma = \left\{ \frac{(M_{20} + M_{02}) - \sqrt{(M_{20} - M_{02})^2 + 4M_{11}^2}}{(M_{20} + M_{02}) + \sqrt{(M_{20} - M_{02})^2 + 4M_{11}^2}} \right\}^{1/2} \quad (2.27)$$

γ は波数が最大である θ_p の方向と、これに直交する $\theta_p \pm 90^\circ$ の方向における波数の比の逆数である。単一波群の場合には方向集中度が高いほど γ が 0 に近づき、無指向性が強まるほど 1 に近づき、 $0 \leq \gamma \leq 1$ である。しかしながら、二方向波浪系を対象とする場合、特に二方向波浪系が 90° 以上の交差角をなして来襲する場合には、 γ は方向集中度を示す指標としては不都合となる¹⁴⁾。

合田¹⁴⁾は二方向波浪系での γ の不都合を補う目的で次に示す平均分散角 θ_k を提案した。

$$\theta_k = \tan^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{M_{00}} \sqrt{M_{01}^2 M_{20} - 2M_{10} M_{01} M_{11} + M_{10}^2 M_{02}}}{M_{10}^2 + M_{01}^2} \right\} \quad (2.28)$$

平均分散角 θ_k は方向スペクトルの重心と原点を結ぶ軸回りの 2 次モーメントとして定義されたものであり、平均波向 $\bar{\theta}$ からの波動エネルギーの平均的分散角を表わす。

方向スペクトル $S(k_x, k_y)$ が何らかの方法によって求められている場合には、以上の式によって代表波向と方向集中度が計算できる。しかしながら、波向観測の実務を考えると表面ブイあるいは 2 方向流速計などの出力から直接に波向等を算定できることが望ましい。この問題に対して、合田¹⁴⁾は観測値の時系列データ間の共分散を用いる方法を提示している。

例えば、表面ブイの上下運動速度 η_t および水平 2 方向の傾斜 η_x, η_y が測定されたとする。簡単のため、ブイの応答特性は無視し、いずれのデータも水面の運動および傾斜を忠実に記録していると仮定する。このとき、この 3 量間の共分散は方向スペクトルの定義から次のように方向スペクトルのモーメントに結び付けられる。

$$\left. \begin{aligned} \overline{\eta_t^2} &= \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi f^2 S(f, \theta) d\theta df = M_{00}^* \\ \overline{\eta_t \eta_x} &= \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi f S(f, \theta) k \cos \theta d\theta df = M_{10}^* \\ \overline{\eta_t \eta_y} &= \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi f S(f, \theta) k \sin \theta d\theta df = M_{01}^* \\ \overline{\eta_x^2} &= \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi S(f, \theta) k^2 \cos^2 \theta d\theta df = M_{20} \\ \overline{\eta_y^2} &= \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi S(f, \theta) k^2 \sin^2 \theta d\theta df = M_{02} \\ \overline{\eta_x \eta_y} &= \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi S(f, \theta) k^2 \cos \theta \sin \theta d\theta df = M_{11} \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

このうち、 M_{00}^* 、 M_{10}^* および M_{01}^* は厳密には式 (2.23) の定義に一致していないが、違いは f^2 または f が乗じられていることのみであるので、これらを式 (2.23) によるものの代替として準用する。この結果、 $\bar{\theta}$ 、 θ_p 、 γ および θ_k が式 (2.29) に出てくる 6 個の共分散を使って求められることになる。水圧計や流速計等を用いて方向スペクトルを観測する場合にも、同様にそれぞれの量の共分散を計算することによって代表波向および方向分散指標が算定される。

2.4 方向スペクトルの標準形

ここでは、これまでの観測成果に基づいて提案された周波数スペクトルおよび方向スペクトルの標準形の内、主要なものを示す。

周波数スペクトルについては非常に多くの観測記録が解析されており、その特性が比較的良く分かっている。例えば、代表的な風波のスペクトルの標準形として次式がある。

$$S(f) = 0.257 H_{1/3}^2 T_{1/3} (T_{1/3} f)^{-5} \exp\{-1.03 (T_{1/3} f)^{-4}\} \quad (2.30)$$

ここに、 $H_{1/3}$ は有義波高、 $T_{1/3}$ は有義波周期である。式 (2.30) は Bretschneider¹⁵⁾の提案式を光易¹⁶⁾が係数を修正して提案したものであり、Bretschneider-光易スペクトルと呼ばれている。

このほか、北海の波浪共同観測計画 (JONSWAP) の成果に基づいて Hasselman ら¹⁷⁾が提案したものを合田

が修正し、式 (2.30) のように波高と周期をパラメータにして表示した近似式として次式がある¹⁾。

$$S(f) = a H_{1/3}^2 T_p^{-4} f^{-5} \exp \{-1.25 (T_p f)^{-4}\} \times \gamma^{\exp\{-(T_p f - 1)^2 / 2\sigma^2\}} \quad (2.31)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{0.0624}{0.230 + 0.0336\gamma - 0.185(1.9 + \gamma)^{-1}} \\ \sigma &= \begin{cases} \sigma_a : f \leq f_p \\ \sigma_b : f \geq f_p \end{cases} \\ \gamma &= 1 \sim 7 \text{ (平均 } 3.3), \sigma_a \approx 0.07, \sigma_b \approx 0.09 \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

である。なお、 f_p はスペクトルのピーク周波数、 T_p はその逆数であり、有義波周期とは次式のような関係がある。

$$T_p \approx 1.05 T_{1/3} \quad (2.33)$$

この他にも様々な周波数スペクトルの標準形が提案されている。

方向分布関数については、波向観測が困難なこともあり、不十分な情報しか得られていない。このため、周波数スペクトルのような標準形を定めることは難しい。しかしながら、光易ら¹⁸⁾はクローバーリーフ型ブイ式波浪計を用いた綿密な観測結果に基づいて、方向分布関数の標準形として次式を提案している。

$$G(\theta|f) = G_0 \cos^{2S} \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (2.34)$$

ここに、 G_0 は式 (2.21) の正規化条件を満たすための定

数であり、

$$G_0 = \left[\int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \cos^{2S} \left(\frac{\theta}{2} \right) d\theta \right]^{-1} \quad (2.35)$$

で算出される。もし、 $\theta_{\min} = -\pi$ 、 $\theta_{\max} = \pi$ であるならば、 G_0 は次式となる。

$$G_0 = \frac{1}{\pi} 2^{2S-1} \frac{\Gamma^2(S+1)}{\Gamma(2S+1)} \quad (2.36)$$

ただし、 $\Gamma(\quad)$ は Gamma 関数である。また、 S は波のエネルギーの伝播する方向集中度を表わすパラメータであり、光易ら¹⁸⁾は S の最大値 $S_{\max}$ を主パラメータとして次式を提案している。

$$S = \begin{cases} S_{\max} (f/f_p)^5 & : f \leq f_p \\ S_{\max} (f/f_p)^{-2.5} & : f \geq f_p \end{cases} \quad (2.37)$$

なお、合田と鈴木¹⁹⁾は $S_{\max}$ と波形勾配 H_0/L_0 の関係を示す図表を作成し、波浪条件と $S_{\max}$ の関係として次のような値を提案している。

- I) 風波 $S_{\max} = 10$
 - II) 減衰距離の短いうねり $S_{\max} = 25$
(波形勾配が比較的大)
 - III) 減衰距離の長いうねり $S_{\max} = 75$
(波形勾配が小)
- (2.38)

ただし、式 (2.38) に示す関係は沖波に対するものである。

第3章 方向スペクトルの推定法に関する既往の研究

本章では、方向スペクトル推定法の基礎となる方向スペクトルとクロススペクトルの関係式を、通常の不規則波浪場および入・反射波共存場のそれぞれの場合について示し、次に方向スペクトルを推定する際の基本情報となるクロススペクトルの推定法およびその推定誤差について述べる。また、既往の方向スペクトル推定法のいくつかを概観するとともにそれぞれの方法の問題点を述べる。

3.1 方向スペクトルとクロススペクトルの関係

任意の波動量間のクロススペクトルと波数・周波数スペクトルの一般的な関係式は磯部ら¹¹⁾によって導かれている。これは波数・周波数スペクトルに2つの任意の波動量の水面変動に対する伝達関数を乗じて波数ベクトルについて Fourier 変換したものがクロススペクトルになるという関係式であり、以下のように導かれる。

水面変動以外の波動量、例えば水面勾配、水面曲率、水粒子速度、水圧変動なども含む一般的波動量を ξ とすれば、 ξ は水面変動から波動量 ξ への伝達関数 H を用いて式 (2.13) より、

$$\xi(x, t) = \int_k \int_\omega H(k, \omega) dA(k, \omega) \exp\{i(kx - \omega t)\} \quad (3.1)$$

と表示される。

なお、 $H(k, \omega)$ は一般に次のように書ける¹¹⁾。

$$H(k, \omega) = (\cos \theta)^\alpha (\sin \theta)^\beta h(k, \omega) \quad (3.2)$$

ここに、 θ は波の伝播する方向角である。表—3.1 に主な波動量に対する $h(k, \omega)$ 、 α 、 β の値を示す¹¹⁾。ここで、 $x = x_m$ および x_n における波動量を ξ_m および ξ_n とおくと、それらの間のクロススペクトル $\Phi_{mn}(\omega)$ は、角周波数 ω に対するそれぞれの複素振幅を式 (3.1) から求めることにより、式 (2.8) の定義から、

$$\begin{aligned} \Phi_{mn}(\omega) d\omega = & \left\langle \int_k H_m(k, \omega) dA(k, \omega) \exp(ikx_m) \right. \\ & \times \left. \int_{k'} H_n^*(k', \omega) dA^*(k', \omega) \exp(-ik'x_n) \right\rangle \end{aligned} \quad (3.3)$$

と表わされる。式 (3.3) の右辺では $dA(k, \omega)$ のみが確率変数であり、式 (2.14) より $k \neq k'$ ならば無相関であることから式 (3.3) は、

表—3.1 おもな波動量の水面変動に対する伝達関数 (文献11)より抜粋)

項 目	記号	$h(k, \omega)$	α	β
水 面 変 動	η	1	0	0
水 圧 変 動	p	$\rho g \frac{\cosh kz}{\cosh kd}$	0	0
水面鉛直加速度	η_{tt}	$-\omega^2$	0	0
水面勾配 (x)	η_x	ik	1	0
" (y)	η_y	"	0	1
水粒子速度 (x)	u	$\omega \frac{\cosh kz}{\sinh kd}$	1	0
" (y)	v	"	0	1
" (z)	w	$-i\omega \frac{\sinh kz}{\sinh kd}$	0	0

k : 波数、 ω : 角周波数、 d : 水深、 z : 底面からの高さ
 ρ : 流体の密度、 g : 重力加速度

$$\begin{aligned} \Phi_{mn}(\omega) = & \int_k H_m(k, \omega) H_n^*(k, \omega) \\ & \times \exp\{-ik(x_n - x_m)\} S(k, \omega) dk \end{aligned} \quad (3.4)$$

となる。

分散関係式 (2.16) および波数・周波数スペクトルと方向スペクトルの関係式 (2.17) を用いて、式 (3.4) を周波数 f および方向角 θ を用いて表現すると次式のようになる。

$$\begin{aligned} \Phi_{mn}(f) = & \int_0^{2\pi} H_m(f, \theta) H_n^*(f, \theta) \\ & \times [\cos\{k(x_{mn} \cos \theta + y_{mn} \sin \theta)\} \\ & - i \sin\{k(x_{mn} \cos \theta + y_{mn} \sin \theta)\}] S(f, \theta) d\theta \end{aligned} \quad (3.5)$$

ここに、 $x_{mn} = x_n - x_m$ 、 $y_{mn} = y_n - y_m$ である。

式 (3.4) あるいは式 (3.5) は定点計測によって得られた複数の波動量の同時計測記録を用いて方向スペクトルを推定する際の基礎式である。すなわち、式 (3.4) あるいは式 (3.5) を満たし、かつ、0 以上の値を取る関数 $S(k, \omega)$ あるいは $S(f, \theta)$ が求められるならば、これが波数・周波数スペクトルあるいは方向スペクトルである。

3.2 入・反射波共存場での方向スペクトルとクロススペクトルの関係

入・反射波共存場における方向スペクトルとクロススペクトルの関係は磯部ら²⁰⁾により導かれている。磯部らはまず、異なる地点間の水面変動のクロススペクトルを対象として入・反射波共存場における方向スペクトルとクロススペクトルの関係式を導いており、その後、これとは別に反射波の存在しない波浪場を対象として、水面変動以外の任意の波動量も含む一般的波動量相互間のクロススペクトルと方向スペクトルの関係を表わす基礎式(式(3.4))を導いている¹¹⁾。ここでは、後の便宜のために、上記の2つの基礎式を組み合わせる任意の波動量を対象とした入・反射波共存場における方向スペクトルとクロススペクトルの関係式を導くこととする。

構造物の前面において、入射波と反射波を分離するために方向スペクトルを測定する場合には、互いに対をなす入・反射波の位相差がランダムでないために、3.1で述べた基礎式(式(3.4))を用いて方向スペクトルを推定すれば、その適用上に問題が生じる²¹⁾。この問題に対して磯部ら²⁰⁾は入・反射波共存場における方向スペクトルとクロススペクトルの関係式を修正し、入・反射波共存場におけるクロススペクトルとして、入・反射波に対応する波浪系が独立に存在する場でのクロススペクトルに位相干渉項が加わった基礎式を以下のように誘導した。

いま、角周波数 ω 、波数ベクトル $\mathbf{k}$ の入射波の複素振幅を $dA(\mathbf{k}, \omega)$ とし、反射率を r とすれば、座標 x 、時間

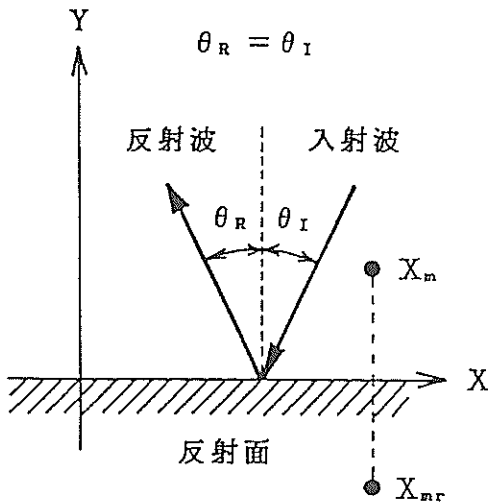


図3.1 入・反射波共存場での諸量の定義
(θ_I : 入射波の入射角, θ_R : 反射波の反射角,
 X_m : 波動量の観測地点, X_{mr} : X_m の鏡像)

t での水面変動 $\eta(x, t)$ は図3.1に示す関係より、

$$\eta(x, t) = \int_{\mathbf{k}} \int_{\omega} dA(\mathbf{k}, \omega) [\exp\{i(\mathbf{k}x - \omega t)\} + r \exp\{i(\mathbf{k}_r x - \omega t)\}] \quad (3.6)$$

と表わされる。ここに、 $\mathbf{k}_r$ は反射波の波数ベクトルであり、反射面に関して $\mathbf{k}$ と対称である。任意の波動量を対象とする場合には3.1で示した伝達関数 $H(\mathbf{k}, \omega)$ を導入して、

$$\xi(x, t) = \int_{\mathbf{k}} \int_{\omega} H(\mathbf{k}, \omega) dA(\mathbf{k}, \omega) \times [\exp\{i(\mathbf{k}x - \omega t)\} + r \exp\{i(\mathbf{k}_r x - \omega t)\}] \quad (3.7)$$

と表わされる。ここで、 $x = x_m$ および x_n における波動量を ξ_m および ξ_n とおくと、それらの間のクロススペクトル $\Phi_{mn}(\omega)$ は、角周波数 ω に対するそれぞれの複素振幅を式(3.7)から求めることにより、式(2.8)の定義から、

$$\Phi_{mn}(\omega) d\omega = \langle \int_{\mathbf{k}} H_m(\mathbf{k}, \omega) dA(\mathbf{k}, \omega) \{ \exp(i\mathbf{k}x) + r \exp(i\mathbf{k}_r x) \} \times \int_{\mathbf{k}'} H_n^*(\mathbf{k}', \omega) dA^*(\mathbf{k}', \omega) \{ \exp(-i\mathbf{k}'x) + r \exp(-i\mathbf{k}'_r x) \} \rangle \quad (3.8)$$

と表わされる。式(3.8)の右辺では $dA(\mathbf{k}, \omega)$ のみが確率変数であり、式(2.14)より $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$ ならば無相関であること、および反射面に関して x と対称なベクトルを x_r とすれば、 $\mathbf{k}_r x = \mathbf{k} x_r$ であることを考慮して、式(3.8)は、

$$\Phi_{mn}(\omega) = \int_{\mathbf{k}} H_m(\mathbf{k}, \omega) H_n^*(\mathbf{k}, \omega) \times \{ \exp(i\mathbf{k}x_m) + r \exp(i\mathbf{k}x_{mr}) \} \times \{ \exp(-i\mathbf{k}x_n) + r \exp(-i\mathbf{k}x_{nr}) \} \times S(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k} \quad (3.9)$$

となる。

分散関係式(2.16)および波数・周波数スペクトルと方向スペクトルの関係式(2.17)を用いて、式(3.9)を周波数 f および方向角 θ を用いて表現すると次式のようになる。

$$\begin{aligned}
\Phi_{mn}(f) = & \int_0^\pi H_m(f, \theta) H_n^*(f, \theta) \\
& \times [\cos\{k(x_{mn} \cos \theta + y_{mn} \sin \theta)\} \\
& - i \sin\{k(x_{mn} \cos \theta + y_{mn} \sin \theta)\}] S(f, \theta) d\theta \\
& + \int_0^\pi H_m(f, \theta) H_n^*(f, \theta) \\
& \times [\cos\{k(x_{mnr} \cos \theta + y_{mnr} \sin \theta)\} \\
& - i \sin\{k(x_{mnr} \cos \theta + y_{mnr} \sin \theta)\}] r^2 S(f, \theta) d\theta \\
& + \int_0^\pi H_m(f, \theta) H_n^*(f, \theta) \\
& \times [\cos\{k(x_{mrn} \cos \theta + y_{mrn} \sin \theta)\} \\
& - i \sin\{k(x_{mrn} \cos \theta + y_{mrn} \sin \theta)\} \\
& + \cos\{k(x_{mnr} \cos \theta + y_{mnr} \sin \theta)\} \\
& - i \sin\{k(x_{mnr} \cos \theta + y_{mnr} \sin \theta)\}] r S(f, \theta) d\theta
\end{aligned} \quad (3.10)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned}
x_{mn} &= x_n - x_m, & y_{mn} &= y_n - y_m \\
x_{mnr} &= x_{nr} - x_{mr}, & y_{mnr} &= y_{nr} - y_{mr} \\
x_{mrn} &= x_n - x_{mr}, & y_{mrn} &= y_n - y_{mr} \\
x_{mnr} &= x_{nr} - x_m, & y_{mnr} &= y_{nr} - y_m
\end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

である。式 (3.10) の右辺第 1 項の積分は入射波に対応する波浪系が独立に存在する場でのクロススペクトルを表わし、第 2 項の積分は反射波に対応する波浪系が独立に存在する場でのクロススペクトルを表わす。また、第 3 項の積分は入射波と反射波の位相干渉項である。

式 (3.9) あるいは式 (3.10) は入・反射波共存場における定点計測によって得られた複数の波動量の同時計測記録を用いて方向スペクトルを推定する際の基礎式である。すなわち、式 (3.9) あるいは式 (3.10) を満たし、かつ、0 以上の値を取る関数 $S(k, \omega)$ あるいは $S(f, \theta)$ が求められるならば、これが入・反射波共存場における入射波の波数・周波数スペクトルあるいは方向スペクトルである。

3.3 クロススペクトルの推定法と推定誤差

(1) 本研究で用いたクロススペクトルの推定法

クロススペクトルの推定法としては、一般によく用いられる FFT 法²²⁾、あるいは相互相関法や多変量自己回帰モデルを用いる方法²³⁾などがある。相互相関法と FFT 法では、分解能や信頼限界も同等であり、計算手順は異なるものの、その違いは平滑化関数の違いに過ぎないことが報告されている²²⁾。また、FFT 法では理想的な平滑化関数が使用できるので、相互相関法よりも便利であることも報告されている²²⁾。

一方、多変量自己回帰モデルを用いる方法は、与えら

れた時系列データが多変量自己回帰過程に従うならば、この方法により推定されるクロススペクトルは最尤推定量となる。また、FPE (Final Prediction Error)²³⁾や AIC (Akaike's Information Criterion)²⁴⁾と組み合わせることにより、安定度と自由度をいくらに設定するか等に頭を悩ませることなく、自動的に安定した推定精度の良い推定値が推定される。このため、FFT 法などでは、周囲を滑らかにすると、ピークもなまってくるなどの欠点があるが、この方法では鋭いピークも表現できる等の利点がある²⁵⁾。本論文の補章 A で、方向スペクトルの推定における多変量自己回帰モデルの適用性について検討しているが、その検討結果によれば、データ個数が十分にある場合、近接した 2 つの異なる周波数で卓越した 2 つのピークを持つ二方向波浪を除いては、FFT 法と多変量自己回帰モデルを用いる方法とでは、クロススペクトルの推定値にはそれほど大きな相違は認められなかった²⁵⁾。そこで、本研究においては計算速度の速い FFT 法を用いて解析することとした。

任意の波動量は、有限 Fourier 級数を用いて近似できる。FFT 法とは時系列データから高速にその Fourier 係数を算出する方法である。そこでいま、得られた 2 つの時系列 $\xi_m(t)$ 、 $\xi_n(t)$ 、($t=0, 1, \dots, 2N-1$) を、

$$\left. \begin{aligned}
\xi_m(t) &= \sum_{k=0}^{2N-1} X_k \exp(i2\pi f_k t) \\
\xi_n(t) &= \sum_{k=0}^{2N-1} Y_k \exp(i2\pi f_k t)
\end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

で表わすと、1 次のクロススペクトルは、

$$\Phi_{mn}(f) \Delta f = 2X_k^* Y_k \quad (3.13)$$

で計算される。1 次のクロススペクトルは推定誤差が大きく、一般に激しい振動を示す。そこで分散の少ないクロススペクトルの推定値を求めるためには 1 次のクロススペクトルを平滑化しなければならない。本論文でのクロススペクトル解析では、力石・光易²²⁾が用いた三角ウィンドーを用いて移動平均による平滑化を行った。三角ウィンドーは次式で表わされる。

$$w(j) = \frac{1}{J} (J - |j|), \quad (j=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(J-1)) \quad (3.14)$$

FFT 法を用いたクロススペクトル推定法ではデータ個数が 2^n 個の場合しか扱えないので、そうなるようにデータを取得するか、あるいは任意の記録の末尾に適当な個数の 0 を追加して個数を合わせる等の処理が必要である。

(2) 離散有限 Fourier 変換を用いたクロススペクトルの推定誤差

離散有限 Fourier 変換を用いた 1 次のパワースペクトルおよびクロススペクトルの期待値は近似的に次式で与えられる^{26),27)}。

$$E[\hat{S}(f)] \approx S(f) \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} E[\hat{\Phi}_{mn}(f)] &= E[\hat{C}_{mn}(f)] - iE[\hat{Q}_{mn}(f)] \\ &\approx C_{mn}(f) - iQ_{mn}(f) = \Phi_{mn}(f) \end{aligned} \quad (3.16)$$

また、1 次のパワースペクトルおよびコ・スペクトル、クオドラチャ・スペクトルの分散は近似的に次式で与えられる^{26),27)}。

$$\text{Var}[\hat{S}(f)] \approx S(f)^2 \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{C}_{mn}(f)] &\approx \frac{1}{2} \{ \Phi_{mn}(f) \Phi_{nn}(f) \\ &\quad + C_{mn}(f)^2 - Q_{mn}(f)^2 \} \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{Q}_{mn}(f)] &\approx \frac{1}{2} \{ \Phi_{mn}(f) \Phi_{nn}(f) \\ &\quad - C_{mn}(f)^2 + Q_{mn}(f)^2 \} \end{aligned} \quad (3.19)$$

したがって、1 次のパワースペクトルおよび 1 次のクロススペクトルの絶対値の変異係数 V は近似的に次式で与えられる^{26),27)}。

$$V(\hat{S}(f)) \approx 1 \quad (3.20)$$

$$V(|\hat{\Phi}_{mn}(f)|) \approx \frac{1}{\text{coh}(f)} \quad (3.21)$$

すなわち、1 次のパワースペクトルの相対誤差は記録長 T に無関係に 100% に及び、また、1 次のクロススペクトルの統計的誤差は、コヒーレンス関数 $\text{coh}(f)$ が 1 より小さいことから、1 次のパワースペクトルの統計的誤差よりもさらに大きい。

統計的誤差を小さくするのに二つの方法がある。第 1 の方法は N 個のデータを M 回測定し、その各段階においてパワースペクトルあるいはクロススペクトルを計算し、 M 個のスペクトルの平均をとって、その推定値とする方法である。第 2 の方法は、(1) で述べたようにウィンドーを用いて移動平均する方法である。一般に、第 1 の方法ではデータ数が多く必要であり、計算時間や記憶容量もたくさん必要であるため、定常的に観測される多量の現地観測データを処理する場合には、第 2 の方法を用いることが多い。

第 2 の方法を用いて 1 次のスペクトルをウィンドーで平滑化し、2 次のスペクトルを推定する場合、自由度の大きさが問題となる。自由度を大きくすれば、上記のスペクトルの変異係数は低下し、推定値の安定度は増すが、

分解能は低下する。逆に自由度を小さくすれば、分解能は向上するが、安定度は低下する。力石・光易²²⁾が用いた三角ウィンドーを用いる場合、2 次のパワースペクトルの自由度 K は次式で与えられる。

$$K \approx 3J \quad (3.22)$$

またこのとき、2 次のパワースペクトルの変異係数 $V(\hat{S}(f))$ は自由度 K の関数として次式で与えられる。

$$V(\hat{S}(f)) = \sqrt{\frac{2}{K}} \quad (3.23)$$

2 次のパワースペクトルおよびクロススペクトルを推定する場合、両者に同じウィンドーを用いて平滑化すれば、式 (3.20) および式 (3.21) から明らかなように、パワースペクトルとクロススペクトルはそれぞれ異なる統計的変動性を示す。特に、クロススペクトルの場合には式 (3.21) から明らかなように、全周波数に同じウィンドーを用いて平滑化しても、各周波数ごとに異なる変動性を有することになる。そこでいま、クロススペクトルの実部、虚部をそれぞれ

$$\begin{aligned} F(\hat{C}_{mn}(f)) &= \\ &\sqrt{\frac{\Phi_{mn}(f)\Phi_{nn}(f) + C_{mn}(f)^2 - Q_{mn}(f)^2}{2}} \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} F(\hat{Q}_{mn}(f)) &= \\ &\sqrt{\frac{\Phi_{mn}(f)\Phi_{nn}(f) - C_{mn}(f)^2 + Q_{mn}(f)^2}{2}} \end{aligned} \quad (3.25)$$

で正規化すれば、正規化された 1 次のクロススペクトルの実部、虚部の分散は、

$$\text{Var}[\hat{C}_{mn}(f)] = \text{Var}[\hat{Q}_{mn}(f)] = 1 \quad (3.26)$$

となり、正規化されたクロススペクトルの実部、虚部の分散は波動量の組み合わせや周波数によらず、見かけ上同一として扱うことができる。この関係は第 5 章におけるベイズ型モデルを用いた方向スペクトルの推定理論を定式化する際に、各々のクロススペクトルの推定誤差を正規化する目的で用いられる。

3.4 既往の方向スペクトル推定法

方向スペクトルの推定法として既に提案されているもの、すなわち、DFT 法⁴⁾、Longuet-Higgins らの方法⁹⁾ (以下 LHM と呼称する)、パラメータ法⁸⁾、分布関数あてはめ法^{7),8),9)}、MLM¹⁰⁾、EMLM¹¹⁾等の推定法は全て式 (3.4)

を基礎式とし、便宜的に何らかの仮定や近似を用いて方向スペクトルの推定値を特定している。しかしながら、それぞれの推定法で用いられている仮定や近似の方法の違いにより、得られる推定値もそれぞれ異なり、計算の簡便さ、分解能などの面でそれぞれの特徴を有している。

以下では、第4章および第5章～第7章で述べる方向スペクトル推定法との比較の便宜のために、方向スペクトル推定法を3種類に分類し、(1)3成分の波動量の観測データに適用可能な方向スペクトル推定法、(2)3成分以上の任意の波動量の組み合わせに適用可能な方向スペクトル推定法、(3)入・反射波共存場に適用可能な方向スペクトル推定法のそれぞれについて代表的な既往の方向スペクトル推定法の概略を述べるとともに、それぞれの方法の問題点を検討する。

(1) 3成分の波動量の観測データに適用可能な方向スペクトル推定法

アイに搭載された加速度計と傾斜計の組み合わせ、あるいは同一地点に設置された波高計と流速計の組み合わせなどのように、3成分の波動量が同一の座標上で観測される場合、式(3.5)中の[]内の項が省略され、次式で表わされる。

$$\frac{\Phi_{nn}(f)}{h_m(f)h_n^*(f)S(f)} = \int_0^{2\pi} G(\theta|f) \times (\cos\theta)^{\alpha_m+\alpha_n} (\sin\theta)^{\beta_m+\beta_n} d\theta \quad (3.27)$$

ここに、 $h(f)$ は分散関係式を用いて表—3.1に示された関数 $h(k, \omega)$ を f の関数として書き表わしたものである。

例えば、3成分の波動量として水面変動 η と x 軸、 y 軸方向の水面勾配 η_x 、 η_y を観測する場合、式(3.27)および表—3.1より以下の関係式が求まる。

$$\int_0^{2\pi} G(\theta|f) \alpha_i(\theta) d\theta = \beta_i, \quad (i=0, 1, \dots, 4) \quad (3.28)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0(\theta) &= 1, & \beta_0 &= 1 \\ \alpha_1(\theta) &= \cos\theta, & \beta_1 &= \frac{Q_{12}(f)}{kC_{11}(f)} \\ \alpha_2(\theta) &= \sin\theta, & \beta_2 &= \frac{Q_{13}(f)}{kC_{11}(f)} \\ \alpha_3(\theta) &= \cos 2\theta, & \beta_3 &= \frac{C_{22}(f) - C_{33}(f)}{k^2 C_{11}(f)} \\ \alpha_4(\theta) &= \sin 2\theta, & \beta_4 &= \frac{2C_{23}(f)}{k^2 C_{11}(f)} \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

ここに、 $C_{ij}(f)$ 、 $Q_{ij}(f)$ はそれぞれ $(\eta, \eta_x, \eta_y) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$

とした場合のコ・スペクトルおよびクオドラチャ・スペクトルである。

3成分の波動量として、他の波動量を用いる場合にも式(3.29)と同様な関係式が得られる。

1) Longuet-Higgins らの方法 (LHM)⁸⁾

方向分布関数 $G(\theta|f)$ が次式のような Fourier 級数で表示できるものとする。

$$\hat{G}(\theta|f) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n(f) \cos n\theta + B_n(f) \sin n\theta\} \quad (3.30)$$

この式を式(3.28)に代入して演算すると、Fourier 係数のうち $n=1, 2$ のものがコ・スペクトルおよびクオドラチャ・スペクトルの関数として次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} A_1(f) &= \frac{Q_{12}(f)}{\pi k C_{11}(f)}, & B_1(f) &= \frac{Q_{13}(f)}{\pi k C_{11}(f)} \\ A_2(f) &= \frac{\{C_{22}(f) - C_{33}(f)\}}{\pi k^2 C_{11}(f)}, & B_2(f) &= \frac{2C_{23}(f)}{\pi k^2 C_{11}(f)} \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

このように3成分の波動量のみを用いる場合には、本来無限級数で表わされるものが、 $n=2$ までの項しか決定できず、真値とは異なる推定値が得られることになる。このため、Longuet-Higgins ら⁸⁾は項数打ち切りによる推定誤差を小さくするために、係数 A_i 、 B_i に重み関数を掛けて次式により方向スペクトルを推定することを提案している。

$$\begin{aligned} \hat{G}(\theta|f) &= \frac{1}{2\pi} + \frac{2}{3} (A_1 \cos\theta + B_1 \sin\theta) \\ &\quad + \frac{1}{6} (A_2 \cos 2\theta + B_2 \sin 2\theta) \end{aligned} \quad (3.32)$$

この方法では簡単な演算により方向スペクトルが得られるものの、方向スペクトルはかなり平滑化される。特にその傾向は重み関数を用いた場合に著しい。方向スペクトルを級数表示する方法は便宜的な方法にすぎず、3成分観測データの様に少ないデータから方向スペクトルを推定する方法としては、あまり好ましい方法ではない。なお、数値シミュレーションを用いた検討により、単峯型の方向分布関数を推定する場合、そのピーク位置はおおむね正しいけれども、双峯型の方向分布関数に対しては単峯型として算出してしまふ等の性質を有していることが報告されている⁸⁾。

2) 分布関数あてはめ法

方向分布関数としてあらかじめ特性の明らかな関数を

仮定し、その中に含まれるパラメータを算出する方法である。方向分布関数として種々の関数が提案されているが、山口²⁾は方向分布形状が Borgman²⁸⁾により提案された円正規分布

$$\hat{G}(\theta|f) = \frac{\exp\{a \cos(\theta - \theta_0)\}}{2\pi I_0(a)} \quad (3.33)$$

に従うものとして方向スペクトルの推定を行っている。ここに、 a は円正規分布の形状母数、 θ_0 は波の主方向、 I_0 は 0 階の第 1 種変形 Bessel 関数である。式 (3.33) 中の未知パラメータは式 (3.31) の Fourier 係数と次式の関係がある。

$$A_n = \frac{I_n(a)}{\pi I_0(a)} \cos n\theta_0, \quad B_n = \frac{I_n(a)}{\pi I_0(a)} \sin n\theta_0 \quad (3.34)$$

ここに、 A_n および B_n は式 (3.31) の Fourier 係数、 I_n は n 階の第 1 種変形 Bessel 関数である。3 成分観測データを用いて式 (3.33) により方向スペクトルの推定を行う場合、未知数 2 つ (a , θ_0) に対して条件式が 4 つ (式 (3.28) : ($i=1, \dots, 4$)) 存在する。このため、山口²⁾は式 (3.34) において $n=1$ あるいは $n=2$ として a および θ_0 を別個に算出する方法、および次式で表わされる最小自乗法により a および θ_0 を同時に推定する方法の両方を用いて、その適用性を検討している。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a} &= 0, \quad \frac{\partial E}{\partial \theta_0} = 0 \\ E &= \sum_{n=1}^2 \left[\left\{ A_n - \frac{I_n(a)}{\pi I_0(a)} \cos n\theta_0 \right\}^2 + \left\{ B_n - \frac{I_n(a)}{\pi I_0(a)} \sin n\theta_0 \right\}^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

一方、双峯型方向スペクトルも推定可能な方法として、Hasselmann ら²⁹⁾は単峯型方向分布関数を 2 つ重ね合わせた次式を用いて方向スペクトルの推定を行っている。

$$\left. \begin{aligned} \hat{G}(\theta|f) &= \lambda M(\theta, S_1, \alpha_1) + (1-\lambda) M(\theta, S_2, \alpha_2) \\ M(\theta, S, \alpha) &= N(S) \cos^{2S} \left(\frac{\theta - \alpha}{2} \right) \\ N(S) &= \frac{1}{\pi} 2^{2S-1} \frac{\Gamma^2(S+1)}{\Gamma(2S+1)} \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

ここに、 S は波の方向集中度を表わすパラメータ、 α は波の主方向、 Γ は Gamma 関数である。この方法を用いる場合、未知数 5 つに対してそれを決めるべき条件式が 4 つしか存在しない。そこで Hasselmann らは次の条件を付加して方向スペクトルの推定を行っている。

$$(S_1 - S_2)^2 \rightarrow \min \quad (3.37)$$

この他、双峯型方向スペクトルを推定可能な方法として、広瀬⁷⁾は次式で表わされる wrapped normal 分布

$$p(\theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(\theta - \mu - 2\pi k)^2}{\sigma^2} \right] \quad (3.38)$$

を重ね合わせるにより、同様の解析を試みている。

分布関数あてはめ法を用いて方向スペクトルを推定する方法は、従来の研究成果により支持された方向分布関数を用いれば、近似という意味では妥当な方法であろう。しかしながら、仮定された関数形以外の方向分布形状を表現できないため、より詳細な波向の分布を知ろうとする場合には不適当である。また、式 (3.36) の第 1 式に見られるような、独立した 2 つの方向分布関数を重ね合わせて用いる方法は、波の線形性を考えると物理的には適切な記述である。しかしながら、未知数の数が条件式よりも多いために導入される付加条件式 (3.37) のために、2 つの方向分布関数の独立性は失われている。

(2) 3 成分以上の任意の波動量の組み合わせに適用可能な方向スペクトル推定法

1) 直接フーリエ変換法 (DFT 法)³⁰⁾

DFT 法は従来の方向スペクトルの推定理論の基礎を与えるものであり、波高計アレイにより得られたクロススペクトルの推定値をもとに方向スペクトルを推定する方法として提案された。方向スペクトルの推定理論の中では最も早く、Barber³¹⁾によって提案された方法である。本方法は推定式の中に任意の波動量の水面変動に対する伝達関数を導入することにより、任意の波動量に適用可能な形に拡張できるが、以下では説明の便宜上、波高計アレイを用いる場合について述べる。

クロススペクトルと波数・周波数スペクトルの関係式 (3.4) において、伝達関数 H を省略し、 x_n を x と置き換え、両辺の Fourier 逆変換をとると、

$$S(k, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_x \Phi(x, \omega) \exp(ikx) dx \quad (3.39)$$

が得られる。上式は連続的な無数の点 x でクロススペクトルが与えられた場合に、Fourier 逆変換により波数・周波数スペクトルが得られるという方向スペクトル推定理論の基礎を与える式である。しかしながら、現実には有限個の地点でしか波を観測することができないため、上式の積分を実際に求めることができない。

この問題に対して Barber⁹⁾は対をなす波高計間の距離以外ではクロススペクトルの値を0と見なすほかないとして、上式の積分を次式のような級数和で置き換えたものを方向スペクトルの推定値とした。

$$\hat{S}(k, \omega) = \alpha \sum_n \Phi_{nn}(\omega) \exp\{ik(x_n - x_m)\} \quad (3.40)$$

上式中の α は式 (2.22) の正規化条件を満足するための無次元定数である。

式 (3.40) を行列表示すると次式ようになる。

$$\hat{S}(k, \omega) = \alpha D(k, \omega)^* \Phi(\omega) D(k, \omega) \quad (3.41)$$

ここに、 $D(k, \omega) = (\exp(ikx_1), \dots, \exp(ikx_M))^t$ 、 $\Phi(\omega)$ はその mn 成分が $\Phi_{mn}(\omega)$ である $M \times M$ の行列である。 $\Phi(\omega)$ はエルミート行列であり、そのエルミート形式で与えられる $\hat{S}(k, \omega)$ は実関数となる。また、 $\Phi(\omega)$ が正定符号のエルミート行列ならば、 $\hat{S}(k, \omega) > 0$ 、正半定符号のエルミート行列ならば $\hat{S}(k, \omega) \geq 0$ となる。

DFT 法は方向スペクトルの推定値としては安定した答えを出すけれども、方向分解能が低いのが難点である。また、分解能は波高計の配置の影響を強く受けるので適切な波高計配置が必要である。最適波高計配置については合田¹⁾により議論されている。

なお、式 (3.40) の誘導過程で明らかのように、本方法ではクロススペクトルの推定誤差を考慮せずに推定式が定式化されている。したがって、本方法による方向スペクトル推定値の信頼性は、直接的にクロススペクトルの信頼性に依存する。このため本方法では、波高計の配置によっては、その理論に破綻が生じる可能性がある。例えば図-3.2に示す波高計アレイを考える。もし、波場の構造が波浪観測領域で均一であるとする、 $(i-j)$

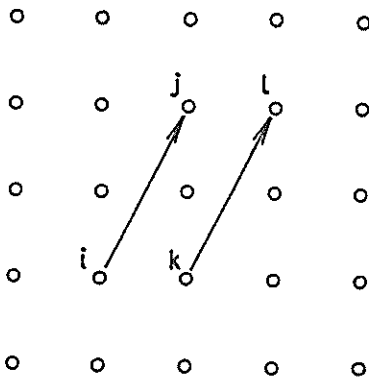


図-3.2 不適切な波高計アレイの配置例
(○は波高計の設置位置を示している)

間と $(k-l)$ 間の位置ベクトルが同じことから、両観測地点間のクロススペクトルは同一の値となるはずである。しかしながら、実際には推定誤差のために同一の値にはならないのが一般である。このため、一つの方角スペクトルに対して、位置ベクトルが同一の観測地点間において異なる二つ以上のクロススペクトルが得られることになり、方向スペクトルとクロススペクトルの関係が1対1の線形変換の関係にあるにもかかわらず、両者の対応関係が破綻する。通常はこのような波高計配置を採用しないものと思われるが、止むを得ず採用した場合には、何らかの工夫が必要である。

2) 拡張最尤法 (EMLM)¹¹⁾

EMLM は磯部¹¹⁾より開発された方向スペクトル推定法であり、Capon¹⁰⁾により開発された最尤法 (MLM) を水面変動以外に、水粒子速度や水面傾斜などの任意の波動量の組み合わせから成る観測データに適用可能な形に拡張したものである。EMLM の誘導の概略は以下の通りである。

まず、波数・周波数スペクトルの推定値を式 (3.39) の類推から形式的にクロススペクトルの線形結合で表わされるものとして、

$$\hat{S}(k, \omega) = \sum_n \sum_n \alpha_{nn}(k) \Phi_{nn}(\omega) \quad (3.42)$$

のように置く。上式に式 (3.4) を代入して整理すると、

$$\hat{S}(k, \omega) = \int_k S(k', \omega) w(k, k') dk' \quad (3.43)$$

$$w(k, k') = \sum_n \sum_n \alpha_{nn}(k) H_n(k', \omega) H_n^*(k, \omega) \times \exp\{-ik'(x_n - x_m)\} \quad (3.44)$$

が得られる。上式によれば、波数・周波数スペクトルの推定値は真の波数・周波数スペクトルにウィンドー $w(k, k')$ が掛かったものであることが分かる。したがってウィンドー $w(k, k')$ をデルタ関数に近づけることにより、波数・周波数スペクトルの推定値を真の波数・周波数スペクトルに近づけることができる。

EMLM では $w(k, k')$ をデルタ関数に近づける操作を近似的に行い、波数・周波数スペクトルの推定式として次式を与えている。

$$\hat{S}(k, \omega) =$$

$$\frac{\alpha}{\sum_n \sum_n \Phi_{nn}^{-1}(\omega) H_n^*(k, \omega) H_n(k, \omega) \exp\{ik(x_n - x_m)\}} \quad (3.45)$$

ここに、 $\Phi_{nn}^{-1}(\omega)$ は $\Phi_{nn}(\omega)$ から構成される行列 $\Phi(\omega)$

の逆行列の mn 成分である。また、 α は比例定数であり、式 (2.22) の正規化条件を満足するように決められる。

EMLM は分解能および汎用性の面で優れた推定法であり既に現地波浪データ解析に広く適用されている。

なお、上式を行列表示すると次式で与えられる。

$$\hat{S}(k, \omega) = \frac{\alpha}{D(k, \omega)^* \Phi^{-1}(\omega) D(k, \omega)} \quad (3.46)$$

ここに、 $D(k, \omega) = \{H_1(k, \omega) \exp(ikx_1), \dots, H_M(k, \omega) \exp(ikx_M)\}^T$ 、 $\Phi^{-1}(\omega)$ は $\Phi(\omega)$ の逆行列である。

DFT 法で述べたのと同様に、EMLM では分母がエルミート形式で表わされる。したがって $\Phi^{-1}(\omega)$ がエルミート行列であるために $\hat{S}(k, \omega)$ は実関数として算出されるが、 $\hat{S}(k, \omega) \geq 0$ になるためには $\Phi^{-1}(\omega)$ が正定符号のエルミート行列でなければならない。このためには $\Phi(\omega)$ が正定符号のエルミート行列でなければならない。もし $\Phi(\omega)$ が正定符号以外のエルミート行列であれば、 $\hat{S}(k, \omega)$ には負値が現われるほか、分母が 0 となる点では $\hat{S}(k, \omega)$ は無限大に発散するなどの不合理が生じる。

その他、EMLM のエネルギーピーク値は、式 (3.45) の分子が定数であるために、分母が最小値を取ることで与えられる。すなわち、方向分布関数のエネルギーピークの近傍では EMLM の分母はかなり小さな値となり、エネルギーのほとんどない領域では分母はかなり大きな値となる。このため、例えば波高計群と流速計を組み合わせた複雑な観測系の観測データから方向スペクトルを推定する場合などでは、電子計算機による数値計算の誤差のために、エネルギーピーク近傍でかなり激しい振動を生じる場合がある。これは方向分布関数の逆数上では微細な、有限桁までしか計算し得ない電子計算機上での誤差が、その逆数である方向分布関数では拡大されて現われるためである。この問題を克服するためには、EMLM の分母に何らかの平滑化を施す必要がある。

なお、クロススペクトルに推定誤差が含まれる場合などでは、 $\Phi(\omega)$ は正定符号のエルミート行列にならない場合があり得る。Jefferys²⁰⁾ はこのような場合に $\Phi(\omega)$ の各成分にある定数を加減して、 $\Phi(\omega)$ を補正する方法を提案している。しかしながら、これは便宜的な補正方法であり、本質的な解決策ではない。

上記で述べた様々な不合理が生じる原因は、EMLM の推定理論を構成するために仮定した式 (3.42) の形式的な設定に問題があるように思われる。すなわち、式 (3.39) の方向スペクトルとクロススペクトルが Fourier 逆変換の関係にあること自体は厳密に正しいものの、有限個の観測値を対象とする場合に、これを形式的に有限

個のクロススペクトルの線形結合で表示することは、数学的な厳密さの上で問題があるほか、観測装置の配置によってはこのような形式的な定式化では、もとの物理現象をよく再現し得ない場合があるためと思われる。このような問題は複雑すぎる現象を有限の情報から逆推定する問題において、数学的な形式的方法がもとの物理現象を十分に再現できない問題としてしばしば生じる問題であろう。

なお、DFT 法でも述べたが、EMLM の誘導過程においてもクロススペクトルの推定誤差は明確には考慮されていない。したがって、図-3.2 を用いて解説したように計測器の配置によっては、方向スペクトルとクロススペクトルの 1 対 1 の対応関係が破綻し、異常な方向スペクトルが推定される可能性がある。

(3) 入・反射波共存場に適用可能な方向スペクトル推定法

入・反射波共存場に適用可能な方向スペクトル推定法は磯部ら²⁰⁾により導かれている。これは Capon¹⁰⁾により開発された MLM を、3.2 に示した式 (3.9) を用いて修正したものであり、入・反射波の方向スペクトルのみならず、反射率も推定可能な便利な方法である。磯部らがこの方法を開発した段階ではこの方法は波高計アレイから得られたデータのみを対象とするものであったが、その翌年に同じく磯部ら¹¹⁾により導かれた拡張最尤法と組み合わせることにより、任意の波動量に適用可能な方法に拡張できる。したがって以下ではこのように拡張したものについて述べる。

修正最尤法 (MMLM)²⁰⁾

波数・周波数スペクトルの推定値を式 (3.39) の形から類推して、形式的にクロススペクトルの線形結合で表わされるものとして、

$$\hat{S}(k, \omega) = \sum_m \sum_n a_{mn}(k) \Phi_{mn}(\omega) \quad (3.47)$$

のように置く。上式に式 (3.9) を代入して整理すると、

$$\hat{S}(k, \omega) = \int_{k'} S(k', \omega) w(k, k') dk' \quad (3.48)$$

ここに、

$$\begin{aligned} w(k, k') = & \sum_m \sum_n a_{mn}(k) H_m(k', \omega) H_n^*(k', \omega) \\ & \times \{\exp(ik'x_m) + r \exp(ik'x_{mr})\} \\ & \times \{\exp(-ik'x_n) + r \exp(-ik'x_{nr})\} \end{aligned} \quad (3.49)$$

が得られる。上式によれば、波数・周波数スペクトルの

推定値は真の波数・周波数スペクトルにウィンドー $w(k, k')$ が掛かったものであることが分かる。したがって、ウィンドー $w(k, k')$ をデルタ関数に近づけることにより波数・周波数スペクトルの推定値を真の波数・周波数スペクトルに近づけることができる。

磯部ら²⁰⁾はウィンドー $w(k, k')$ をデルタ関数に近づける操作を近似的に行い、入・反射波共存場の入射波の波数・周波数スペクトルとして次式を導いている。

$$\begin{aligned}\hat{S}(k, \omega) &= \frac{\alpha}{\lambda_{\max}} \\ &= a \left[\sum_m \sum_n \Phi_{mn}^{-1}(\omega) H_m^*(k, \omega) H_n(k, \omega) \right. \\ &\quad \times \{\exp(-ikx_m) + r \exp(-ikx_{mr})\} \\ &\quad \times \{\exp(ikx_n) + r \exp(ikx_{nr})\} \left. \right]^{-1} \quad (3.50)\end{aligned}$$

ここに、 $\lambda_{\max}$ は $k=k'$ におけるウィンドー $w(k, k')$ の値を一定に保ち、式 (3.47) で与えられる $\hat{S}(k, \omega)$ の値を最小にするために構成された固有方程式の最大固有値である。また、 α は比例定数であり、次式、

$$\begin{aligned}\Phi_{mn}(\omega) &= \int_k H_m(k, \omega) H_n^*(k, \omega) \hat{S}(k, \omega) \\ &\quad \times [1 + r^2 + 2r \cos\{k(x_m - x_{nr})\}] dk \quad (3.51)\end{aligned}$$

を満たすように最小自乗法を用いて決定される。ただし、式 (3.51) の積分は入射波の波数ベクトルの範囲で行う。

ところで、式 (3.50) を用いるためには、反射率が与えられなければならない。磯部ら²⁰⁾は、1成分波にノイズ成分が含まれる場合を考え、ノイズ成分が0に近づいた極限において正しい反射率を与えるものとして、

$$\frac{d\lambda_{\max}}{dr} = 0 \quad (3.52)$$

によって便宜的に反射率を決定している。この場合、反射率は式 (3.50) より、

$$\begin{aligned}r &= - \left[\sum_m \sum_n \Phi_{mn}^{-1}(\omega) H_m^*(k, \omega) H_n(k, \omega) \right. \\ &\quad \times \{\exp(ik(x_n - x_{mr})) + \exp(ik(x_{nr} - x_m))\} \left. \right] \\ &\quad \left/ \left[2 \sum_m \sum_n \Phi_{mn}^{-1}(\omega) H_m^*(k, \omega) H_n(k, \omega) \right. \right. \\ &\quad \times \exp(ik(x_{nr} - x_{mr})) \left. \left. \right] \right] \quad (3.53)\end{aligned}$$

で与えられる。

MMLM は EMLM と同様に簡単な演算により比較的推定精度の良い推定値が得られ、また、任意の観測波動量に適用可能という汎用性の面からも、今後、現地波浪データ解析に広く適用されるものと思われる。しかしな

がら、MMLM あるいは EMLM では、その推定式の誘導において、独立な制約条件の数 (式 (3.4) あるいは式 (3.9)) と推定式 (式 (3.42) あるいは式 (3.47)) に現われる未知係数の数が同じことから、観測値に依存して一義的に未知係数が特定される点に問題がある。すなわち、MMLM は結果としては、何らかの関数 (パラメトリック・モデル) を観測値にあてはめて一義的に方向スペクトルの推定値を特定しているに過ぎず、観測波動量の種類や数によっては、EMLM と同様の長所、短所が現われることになる。

なお、MMLM の定式化においては、あらかじめ反射率が与えられたものとして方向スペクトルの推定式を定式化し、その定式化の中で巧みな方法により反射率も推定可能な点に特徴がある。すなわち、方向スペクトルおよび反射率の両方を未知の物理量として定式化すれば、理論的には入射波のエネルギーが存在しない領域では反射率は定義し得ないはずである。しかしながら、MMLM ではあらかじめ構造物による反射率が与えられているものとして定式化し、MMLM により推定される入射波の方向スペクトル推定値が真の入射波の方向スペクトルに近づく極限として反射率を逆推定しているため、構造物前面に入射波のエネルギーが存在しない領域が存在しても、実際には MMLM の適用上の制約はない。このように MMLM で推定される反射率は入射波の方向スペクトル推定値を真値に近づけるように算定される反射率であり、方向スペクトルを推定するためのパラメータ的な意味を持つ反射率と解釈される。

3.5 議論

本章では方向スペクトルの推定法に関連する既往の研究について述べた。

3.1では通常の不規則波浪場における方向スペクトルとクロススペクトルの関係式 (式 (3.4) あるいは式 (3.5)) を導いた。また、3.2では構造物前面などの入・反射波共存場における方向スペクトルとクロススペクトルの関係式 (式 (3.9) あるいは式 (3.10)) を導いた。方向スペクトルはこれらの積分方程式の非負の解として推定される。方向スペクトル推定法の問題の難しさは、この問題が不完全な逆問題であることに起因する。すなわち、海洋波は近似的には種々の方向に伝わる様々な周波数の微小振幅波の重ね合わせとして表現され、無数の自由度を有しているが、観測して得られる情報はそれに比して極めて少数であるためである。したがって、未知数の数よりも、それを解くべき方程式の数が極めて少数であるという意味で不完全であり、基礎式が積分方程式で与えら

れるという意味で逆問題である。

方向スペクトルを推定するために解くべき積分方程式は任意の波動量を観測し、クロススペクトルを推定することにより与えられる。3.3(1)では本研究で用いたクロススペクトルの推定法について述べた。また、3.3(2)ではクロススペクトルの推定誤差について述べた。クロススペクトルの推定誤差はパワースペクトルの推定誤差と異なり、各周波数ごとに異なる変動性を有し、観測波動量の種類に依存して異なる次元を有する。したがって、方向スペクトルを推定するための基礎式として与えられる連立積分方程式は、それぞれ異なる次元や信頼性を有することになる。既往の方向スペクトル推定法にはクロススペクトルのこのような特性を考慮したものはない。より信頼性の高い方向スペクトルを推定するためには、クロススペクトルの推定誤差の特性も考慮した新しい方向スペクトル推定法を開発する必要がある。

3.4では既往の方向スペクトル推定法を概観し、それぞれの方法の問題点について述べた。既往のこれらの方法に共通する点は、一般に、観測して得られた方程式の数と各々の推定式に現われる未知数の数が同じであり、観測値に依存して一義的にその未知数が特定される点にある。すなわち、各々の推定式の誘導方法は異なっているものの、結果として何らかの関数（パラメトリック・モデル）をあてはめているにすぎず、その関数形（パラメトリック・モデルの形）に依存して、分解能や安定性などの面で、各々固有の長所、短所が現われていることにある。このような方法はパラメータの少ない低次のモデルでデータの構造を表現しきれないときに、次数の上昇を行った結果、推定値を不安定にするばかりでなく、パラメトリック・モデル固有のくせを持ち込む点において、一般の統計モデルに共通した問題点が生じる^{30),31)}。

方向スペクトルの推定法のような不完全な逆問題の解法を考える場合、次の2つの場合に分けて考える必要があらう。

① 現象の複雑さに比べて、得られる情報量が極めてわずかな場合。

② 現象を説明するために必要な情報量はある程度得られているものの必ずしも十分とは言えず、また、その情報中には誤差が含まれている可能性がある場合。

①の場合は、得られている情報が少なすぎるので、一般には情報中に含まれる誤差そのものの特性を評価し得ない。この場合には、情報として与えられている以外の情報が混入しないようにし、与えられた情報を最大限有効利用して現象を客観的に把握する必要がある。②の場合は、情報量はある程度得られているものの、必ずしも十分ではないので、得られた情報のみから現象を把握することが最良とは言えない状況を想定したものである。この場合には、対象とする現象の一般的な認識を考慮しつつ、得られた情報の中から現象の本質を模索する形で推定するという方法が良い結果を生むであろうと期待される。

3.4で既往の方向スペクトル推定法を述べる際に、既往の推定法を便宜的に3つの場合に分けて述べたのはこの様な理由によるものである。すなわち3.4(1)の3成分の波動量の観測データに適用可能な方向スペクトル推定法は上記の①の場合に該当し、(2)の3成分以上の任意の波動量の組み合わせに適用可能な方向スペクトル推定法は上記の②の場合に該当するものと思われるためである。ただし、(2)の場合には対象とする現象が比較的単純な構造の場合には3成分の波動量の観測データの場合にも②の方法で推定可能であろうと思われるので、3成分「以上」として場合分けを行った。なお、(3)の入・反射波共存場に適用可能な方向スペクトル推定法は方向スペクトルの工学的な応用技術の一つとして別途取り扱うこととして分類した。

後の第4章では上記の①の場合を対象として、第5章では②の場合を対象として、ここで述べた議論をもとに開発した新しい方向スペクトル推定法について述べている。また、本章で述べた既往の方向スペクトル推定法との比較も行っている。第6章、第7章では入・反射波共存場に適用可能な新しい方向スペクトル推定法について述べている。

第4章 最大エントロピー原理を用いた方向スペクトル推定法

3成分観測データのような限られた少数の波動量の同時計測記録から方向スペクトルを推定する場合には、多くの不確定な要素が存在する。前章に述べた既往の推定法に見られるように、従来の推定法では便宜的に何らかの仮定や近似を用いることにより、解を一義的に求めている。しかしながら、その基礎となる仮定や近似に関してはいくつかの問題点が残されたままである。

そこで、本章ではこれらの問題点を解消し、さらに推定精度を高めるために、特に3成分観測データを対象として、新たに不確定さの尺度であるエントロピーの概念を導入して、最大エントロピー原理(Maximum Entropy Principle: 以下 MEP³²⁾と略記する)から方向スペクトルの推定式の定式化を行うこととする³³⁾。エントロピーの概念を導入することは、解を一義的に求めるために導入される仮定や近似の物理的・理論的な妥当性の検討を必要とせずに、与えられた情報に基づいて客観的に一義的な解が特定されるという利点を有している。

以下ではまず最初に、情報量とエントロピーの定義³⁴⁾ならびに MEP を開発する際に参考にした Jaynes の原理³⁵⁾について議論した後、今回新たに開発した MEP について詳しく述べる。

4.1 情報量とエントロピーの定義³⁴⁾

ある特定の事象が起こって、それを教える情報を受け取ったとき、その情報により得られる情報量は、

$$\text{情報量} = -\log(\text{起こることが可能な事象の総数}) \quad (4.1)$$

あるいは、いっそう正確には

$$\text{情報量} = -\log(\text{可能な事象の中で特定の事象が} \\ \text{起こる確率}) \quad (4.2)$$

と定義される。

この情報量の定義は「独立事象が同時に起こる確率は、個々の事象の起こる確率の積に等しい」という確率論の乗法定理を参照すれば、「複数の独立した情報から成る情報の情報量は個々の情報量の和に等しい」ことを示している。

式(4.2)で定義した情報量に関しては、次の関係が成立する。

ある事象 A が起こる確率を p とすれば、 A の実現に関する情報量 $I(A)$ は式(4.2)により、 $I(A) = -\log p$ である。このとき、

- ① $I(A) \geq 0$ 、ただし等号は $p=1$ の場合にのみ成立する。
- ② $I(A)$ は p の連続関数で、 $1/p$ に関して単調増加関数である。
- ③ 2つの独立事象 A, B の実現する確率をそれぞれ p, q とすれば、 A と B とが同時に起こる確率は $p \times q$ であり、 $I(A \cap B) = I(A) + I(B)$ である。

式(4.2)の情報量の数値は、対数の底を決めないと定まらない。対数の底として10を採ったとき、情報量の単位をディジットと呼び、2を底としたときをビットと呼ぶ。

n 個の異なった互いに相反する事象 A_i ($i=1, \dots, n$) の中から、1つをでたために選択することを繰り返すある偶然事象があり、しかも前の選択の結果は後の選択結果に影響を及ぼさないものとする。また、それぞれの事象 A_i ($i=1, \dots, n$) の起こる確率を p_i ($i=1, \dots, n$) とする ($p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1$)。このとき、 A_i の実現に関する情報量は式(4.2)によって $-\log p_i$ である。したがって、選択を繰り返した結果、得られる情報量の期待値は、

$$H(p_1, \dots, p_n) = -\sum_{i=1}^n p_i \log p_i \quad (4.3)$$

となる。式(4.3)は統計力学でいうエントロピーと同じ形をしている。情報理論においても式(4.3)で定義される H を情報エントロピー、略してエントロピーと呼ぶ。エントロピー H は種々の性質を持っているが、特に次のことは重要である。

- ① p_i のいずれか1つが1になり、他の p_i がすべて0となるときに限って、 H は0となる。すなわち、ある1つの事象のみが確実に生起する場合にのみ、エントロピーは0になる。それ以外では常に正である。
- ② すべての標本点が等確率で生起する場合には、 H は最大値をとる。どの事象も生起し得るわけで、最も不確実な状況である。

分布が連続的な確率密度関数 $p_X(x)$ を持つ確率変数 X のエントロピー $H(X)$ は式(4.3)を拡張して、

$$H(X) = -\int p_X(x) \log p_X(x) dx \quad (4.4)$$

として定義する。エントロピー H は、情報源の中から特定の通報を選ぶときの自由度、あるいはそれを推定するときの不確かさを表す。エントロピー H は情報理論において極めて重要な役割を果たす量である。

4.2 最大エントロピー原理を用いた確率密度関数の決定 (Jaynes の原理)³⁵⁾

エントロピーの概念を用いると、母集団の分布形をあらかじめ仮定せず、あるいは経験によって決定することなく、任意関数の期待値によって与えられる制約条件と確率の規格化条件のもとで、式 (4.4) で与えられるエントロピーを最大化することにより確率密度関数を決定することが可能である。

確率密度関数 $p(x)$ が具備すべき条件と、任意関数 $f_i(x)$ の期待値は、以下のように表現される。

$$\int p(x) dx = 1 \quad (4.5)$$

$$\int f_i(x) p(x) dx = E[f_i(x)], \quad (i=1, \dots, m) \quad (4.6)$$

式 (4.5) と式 (4.6) を制約条件として、式 (4.4) を最大にする $p(x)$ を求めることは、確率の規格化条件 (式 (4.5)) と $f_i(x)$ の期待値 (式 (4.6)) によって与えられる情報以外はできるだけ一様となる $p(x)$ を決定していることになる。換言すれば、このことは、われわれが知り得る情報は積極的に取り入れ、それ以外は x ができるだけランダムに発生するような $p(x)$ を評価していることになる³²⁾。

上記の問題はラグランジュの未定乗数法を用いて解くことができる。ラグランジュ関数は、

$$L = H + (\lambda_0 - 1) \left\{ 1 - \int p(x) dx \right\} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \left[E[f_i(x)] - \int f_i(x) p(x) dx \right] \quad (4.7)$$

で与えられる。ここに、 λ_i ($i=0, \dots, m$) はラグランジュの未定乗数である。 $\partial L / \partial p(x) = 0$ より $p(x)$ の最大エントロピー推定値 $\hat{p}(x)$ を求めると、

$$\hat{p}(x) = \exp \left\{ -\lambda_0 - \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) \right\} \quad (4.8)$$

となる。ここに、ラグランジュの未定乗数 λ_i ($i=0, \dots, m$) は式 (4.8) を式 (4.5) および式 (4.6) に代入して得られる方程式を解くことによって決められる。

このように、任意関数の期待値および確率の規格化条件をもとに、エントロピーの概念を導入して最も偏見のない確率密度関数を決定する方法を Jaynes の原理と呼ぶ³⁵⁾。任意関数 $f_i(x)$ として、種々の関数を選択することにより、一様分布、指数分布、正規分布、ガンベル分布、コーシー分布等、種々の確率密度関数を得ることができ

る。

4.3 最大エントロピー原理を用いた方向スペクトル推定法 (MEP) の定式化³³⁾

ここでは、4.2 で述べた Jaynes の原理を方向スペクトル推定法に適用し、式 (3.28) で与えられる方程式を制約条件として方向スペクトルの最大エントロピー推定値を推定する方法について述べる。

方向分布関数 $G(\theta|f)$ は非負、かつ、

$$\int_0^{2\pi} G(\theta|f) d\theta = 1 \quad (4.9)$$

であるから、 $[0, 2\pi]$ で定義される確率密度関数と考えることができる。したがって、確率密度関数の推定法としての最大エントロピー原理が適用できるものと思われる。この場合、エントロピーは次式で与えられる。

$$H = - \int_0^{2\pi} G(\theta|f) \ln G(\theta|f) d\theta \quad (4.10)$$

3 成分観測データを対象とする場合の確率密度関数 $G(\theta|f)$ が具備すべき条件は、式 (3.28) で与えられている。したがって、式 (3.28) を制約条件として、式 (4.10) で与えられるエントロピー H を最大にする $G(\theta|f)$ を求めれば、これが最大エントロピー推定値 $\hat{G}(\theta|f)$ となる。これは、式 (3.28) で与えられる情報以外の不確定要素ができるだけ一様となる $G(\theta|f)$ を決定していることになる。

そこで、上記の問題をラグランジュの未定乗数法を用いて解く。ラグランジュ関数は

$$L = - \int_0^{2\pi} G(\theta|f) \ln G(\theta|f) d\theta + (\lambda_0 - 1) \times \left\{ 1 - \int_0^{2\pi} G(\theta|f) d\theta \right\} + \sum_{i=1}^4 \lambda_i \left\{ \beta_i - \int_0^{2\pi} G(\theta|f) a_i(\theta) d\theta \right\} \quad (4.11)$$

で与えられる。ここに、 λ_i ($i=0, \dots, 4$) はラグランジュの未定乗数である。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial G(\theta|f)} &= -\{1 + \ln G(\theta|f)\} - (\lambda_0 - 1) \\ &\quad - \sum_{i=1}^4 \lambda_i a_i(\theta) = 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

より、 $G(\theta|f)$ の最大エントロピー推定値 $\hat{G}(\theta|f)$ を求めると、

$$\hat{G}(\theta|f) = \exp\left\{-\lambda_0 - \sum_{i=1}^4 \lambda_i \alpha_i(\theta)\right\} \quad (4.13)$$

となる。 $\alpha_i(\theta)$ は式 (3.29) で与えられており、式 (4.13) は $\exp$ の指数部が Fourier 級数の形となっているが、3 成分観測データを対象とする場合には $i=4$ で打ち切られる。

式 (4.13) に含まれるラグランジュの未定乗数 λ_i ($i=1, \dots, 4$) は、式 (4.13) を式 (3.28) に代入して得られる次式、

$$\int_0^{2\pi} \{\beta_i - \alpha_i(\theta)\} \exp\left\{-\sum_{j=1}^4 \lambda_j \alpha_j(\theta)\right\} d\theta = 0, \quad (i=1, \dots, 4) \quad (4.14)$$

なる非線形連立方程式を解くことによって決定される。また、 λ_0 は次式から計算される。

$$\lambda_0 = \ln\left[\int_0^{2\pi} \exp\left\{-\sum_{j=1}^4 \lambda_j \alpha_j(\theta)\right\} d\theta\right] \quad (4.15)$$

以上をまとめると、式 (4.14) の非線形連立方程式を解いて $\lambda_1 \sim \lambda_4$ を求め、式 (4.15) から λ_0 を算出して式 (4.13) に代入すれば、 $\hat{G}(\theta|f)$ の最大エントロピー推定値 $\hat{G}(\theta|f)$ が決定されることになる。

なお、式 (3.28) において、 $i=0, 1, 2$ の 3 式のみを情報として取り入れる場合の最大エントロピー推定値 $\hat{G}(\theta|f)$ は式 (4.13) と式 (3.29) により次のように与えられる。

$$\hat{G}(\theta|f) = \exp\{-\lambda_0 - \lambda_1 \cos\theta - \lambda_2 \sin\theta\} \quad (4.16)$$

ここで、 $-\lambda_1 = \alpha \cos\theta_0$ 、 $-\lambda_2 = \alpha \sin\theta_0$ とおき、さらに式 (4.15) から λ_0 を求めると、

$$\lambda_0 = \ln\left[\int_0^{2\pi} \exp\{\alpha \cos\theta(\theta - \theta_0)\} d\theta\right] = \ln\{2\pi I_0(\alpha)\} \quad (4.17)$$

を得る。したがって、この場合の最大エントロピー推定値 $\hat{G}(\theta|f)$ として、Borgman²⁹⁾ により提案された円正規分布

$$\hat{G}(\theta|f) = \frac{\exp\{\alpha \cos(\theta - \theta_0)\}}{2\pi I_0(\alpha)} \quad (4.18)$$

が理論的に得られることになる (式 (3.33) に同じ)。式 (4.18) は式 (2.34) に極めて類似した形状を示す。また、式 (4.18) 中のパラメータ α は式 (2.34) 中のパラメータ S とほぼ線形な関係がある。方向分布関数の標準

形として提案されているこのような関数が最大エントロピー推定値として理論的に得られることは極めて興味深い。

4.4 最大エントロピー原理法の数値計算法

式 (4.14) は λ_i に関して非線形な連立積分方程式である。そこで式 (4.14) を λ_i に関して解くために、多変数の Newton-Raphson 法を採用した。結果のみを示せば、以下の手順により λ_i が求められる。

$$\sum_{j=1}^4 A_{ij} \epsilon_j = B_i, \quad (i=1, \dots, 4) \quad (4.19)$$

ここに、

$$A_{ij} = \int_0^{2\pi} \{\alpha_i(\theta) - \beta_i\} \alpha_j(\theta) \exp\left\{-\sum_{k=1}^4 \lambda_k \alpha_k(\theta)\right\} d\theta \quad (4.20)$$

$$B_i = \int_0^{2\pi} \{\alpha_i(\theta) - \beta_i\} \exp\left\{-\sum_{k=1}^4 \lambda_k \alpha_k(\theta)\right\} d\theta \quad (4.21)$$

$$\epsilon_j = \lambda_j^{k+1} - \lambda_j^k, \quad (k, k+1 \text{ は計算ステップ数}) \quad (4.22)$$

なる ϵ_j に関する連立方程式において、初期値 ($\lambda_1^0, \dots, \lambda_4^0$) を与え、残差 ϵ_j について式 (4.19) を解く計算を ($\epsilon_1, \dots, \epsilon_4$) が十分小さくなるまで繰り返すことにより ($\lambda_1, \dots, \lambda_4$) の近似値を算出する。

本論文で示す計算例は、すべて初期値を ($\lambda_1^0, \dots, \lambda_4^0$) = (0, $\dots$, 0) とし、 $|\epsilon_j| \leq 10^{-2}$ ($j=1, \dots, 4$) で収束したと見なして解を算出している。通常、Newton-Raphson 法を用いる場合、 $|\epsilon_j| \leq 10^{-6} \sim 10^{-8}$ を収束の規準として選ぶことが多いが、 $|\epsilon_j| \leq 10^{-2}$ 程度で得られた解を用いた場合でも、方向スペクトルの推定精度はかなり良いこと、および計算時間の節約を考慮して上記の規準を採用した。

なお、上記の計算によって近似解が求まらない場合、すなわち ϵ_j が発散する場合には、式 (4.19) から求められる ϵ_j よりも小さい刻み幅で再計算を行うアルゴリズムを付加した。しかしながら、本方法では初期値 ($\lambda_1^0, \dots, \lambda_4^0$) の値の与え方によっては、解が収束しない場合がある。そこで、繰り返し計算回数がある設定値を越える場合には計算不能として自動的に計算を打ち切ることとした。

4.5 最大エントロピー原理法の数値シミュレーションによる検討

(1) 数値シミュレーション法

数値シミュレーション法¹¹⁾を利用して MEP により推定された方向スペクトルの推定精度の検討を行った。ここでは、方向スペクトルはパワースペクトルと方向分布関数の積で表わされることから、任意の周波数 f に着目したとして、方向角 θ に関する分布のみについて検討した。

数値シミュレーションの具体的な手順は以下の通りである¹¹⁾。

① 検討対象とする方向分布関数を次式で与える。

$$G(\theta) = \sum_i a_i \cos^{2S_i} \left(\frac{\theta - \theta_i}{2} \right) \quad (4.23)$$

2つの波群から構成されるような双峰型の方向分布関数を対象とする場合には、式(4.23)の a_i , S_i , θ_i の値を変えた2種類の方向分布関数を重ね合わせて与えることとする。

② 式(4.23)で与えた方向分布関数をもとに、式(3.27)によりクロススペクトルを計算する。ここでは3成分の観測波動量として水面変動 η , 水面勾配 η_x および η_y を用いることとした。

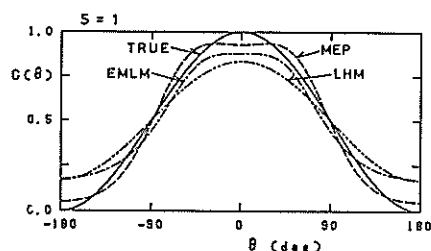
③ ②で得られたクロススペクトルをもとに、MEP, EMLM (拡張最尤法), LHM (Longuet-Higgins らの方法) を用いて方向分布関数の推定を行い、真の方向分布関数、すなわち式(4.23)で与えられる方向分布関数と比較する。

(2) 数値シミュレーション結果の検討

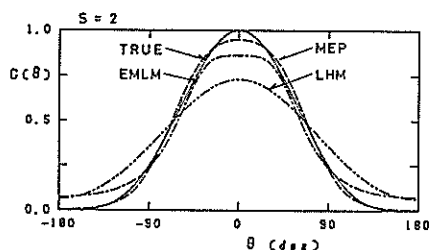
1) 単峰型の方向分布関数を対象とする場合

図—4.1(a)~(e)は単峰型の方向分布関数の推定例であり、それぞれ $S=1, 2, 5, 10, 20$ の場合を示したものである。図中には真の方向分布関数, MEP, EMLM, および LHM による推定結果を併記している。なお、図の縦軸は真の方向分布関数の最大値で規格化して描いている。

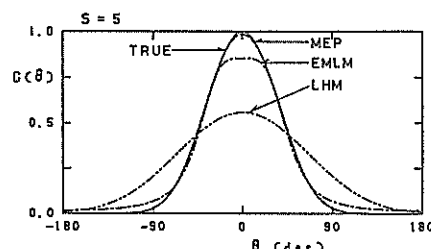
図—4.1より、MEP による方向分布関数の推定精度は $S=1$ の場合が最も低く、 S の増加、すなわちエネルギーの方向集中度の増加とともに推定精度は向上し、 $S \geq 5$ では真の方向分布関数とほぼ一致する推定結果となっている。 $S=1, 2$ の場合、エネルギーピーク付近で推定値は真値を下回っているものの、他の推定法による推定値に比べ、真値に最も近い推定値を与えている。また、エネル



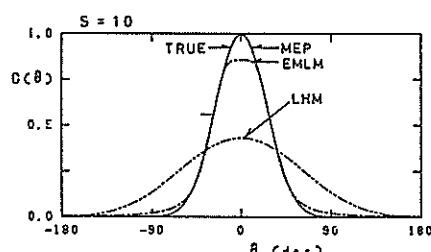
(a) $s=1$



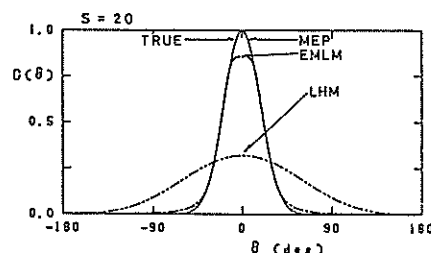
(b) $s=2$



(c) $s=5$



(d) $s=10$



(e) $s=20$

図—4.1 3種類の方法 (MEP, EMLM, LHM) による推定結果の比較 (単峰型方向分布関数に関する数値シミュレーション)

ギーの低い領域においても、他の方法に比べて MEP による推定値が最も推定精度が良い。

LHM はいずれの場合にも推定精度が最も低く、方向分布関数の形状は真値よりもかなり平坦な形状となっている。EMLM はエネルギーピーク付近およびエネルギーが 0 に近い領域で推定精度が低く、特にピーク付近ではエネルギーの方向分布形状をうまく表現できず、偏平な分布形状を示している。

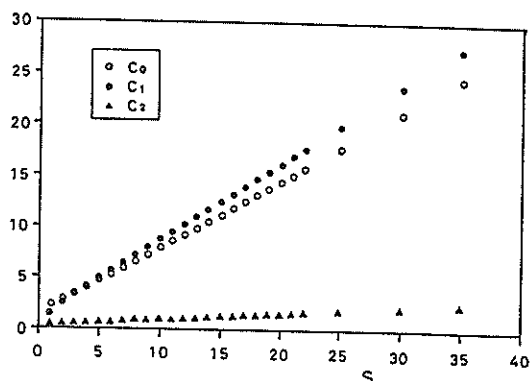
なお、図には示していないが、前節で示した MEP の数値計算法の妥当性を検討するために、種々の方向集中度パラメータ S を対象として方向分布関数の推定を実施した。その結果、 $S \leq 22$ では式 (4.19) の初期値として $\lambda_i^0 = 0, (i=1, \dots, 4)$ を用いても、解 $\lambda_{i1}, (i=1, \dots, 4)$ は容易に求めることができた。しかしながら、 $S > 22$ では式 (4.19) の $\varepsilon_{ij}, (j=1, \dots, 4)$ は発散し、解 $\lambda_{i1}, (i=1, \dots, 4)$ を得ることはできなかった。このため、妥当と思われる初期値 $\lambda_i^0, (i=1, \dots, 4)$ を適宜与えて再計算を実施した。これにより、 $S=35 \sim 40$ までは解を求めることができた。

このように、方向分布関数の方向集中度パラメータ S の違いにより、 λ_i の解の収束度合いが異なることが判明したので、解 λ_i の性質を調べるために、

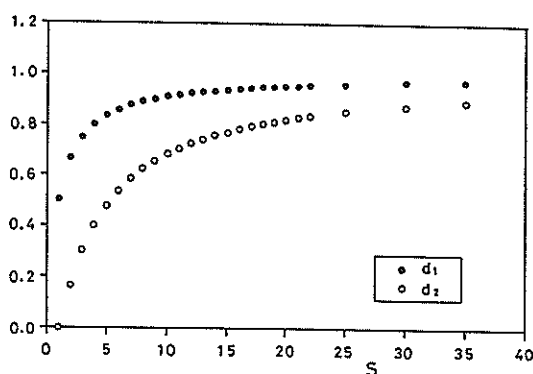
$$\left. \begin{aligned} c_0 &= \sqrt{\lambda_0^2} \\ c_1 &= \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \\ c_2 &= \sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

で表わされるパラメータ c_0, c_1, c_2 が種々の S に対してどのように変化するかを調べることにした。図—4.2(a)は S とこれらの三つのパラメータとの関係を図示したものである。それぞれのパラメータは S の増加に比例して、ほぼ直線的に増大している。すなわち、エネルギーの方向集中度の増大とともに、 $|\lambda_i|$ の値は次第に大きくなるため、初期値として $\lambda_i^0 = 0, (i=1, \dots, 4)$ を用いることが不適当になるものと思われる。しかしながら、必ずしも S が増大するに比例して、解が求まりにくくなるというわけではなく、 $S=1 \sim 22$ の例では、 $S=11$ の場合が最も多くの繰返し計算を必要とした。また、 c_2 は c_1 に比べてかなり小さな値となっている。これは式 (4.23) で与えた単峯型の方向分布関数に対しては、式 (4.13) における $\cos 2\theta, \sin 2\theta$ の項の寄与は $\cos \theta, \sin \theta$ の項に比べて小さいことを示している。解 $\lambda_{i1}, (i=1, \dots, 4)$ の性質、初期値の与え方などについては、今後さらに検討する必要がある。

同様に、LHM の性質を検討するために、式 (3.31) の A_i, B_i を用いて、



図—4.2(a) MEP のパラメータと S の関係



図—4.2(b) LHM のパラメータと S の関係

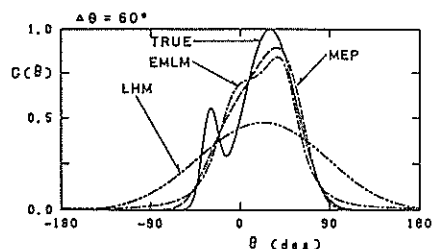
$$\left. \begin{aligned} d_1 &= \sqrt{A_1^2 + B_1^2} \\ d_2 &= \sqrt{A_2^2 + B_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

で表わされるパラメータと S との関係を図示したものが、図—4.2(b)である。方向集中度パラメータ S の増加とともに、各パラメータの増加率は小さくなり、1 に漸近している。こうしたパラメータの特性が、LHM ではエネルギーの方向集中度の大きい方向分布形状を表現できない理由となっている。

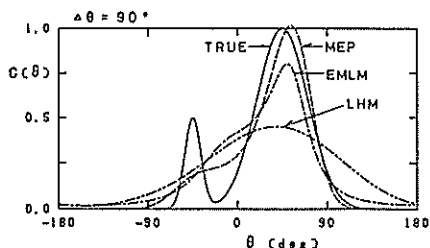
2) 双峯型の方向分布関数を対象とする場合

図—4.3(a)~(e)は双峯型の方向分布関数を対象として数値シミュレーションを実施した結果を示したものである。うねりと風波が重なりあった例として、2種類の方向分布関数を重ね合わせたものであり、それぞれの方向分布関数のピークエネルギーの比を $a_1/a_2 = 0.5$ とし、 $S_1=100, S_2=10$ として、2つの方向分布関数のピークエネルギーの来襲角の差 $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2 = 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ$ とした場合の計算例である。

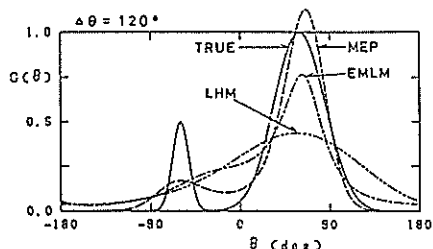
MEP による方向分布関数の推定精度は、2つの方向



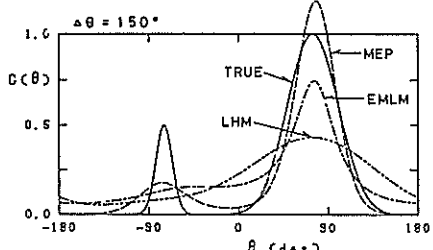
(a) $\Delta\theta=60^\circ$



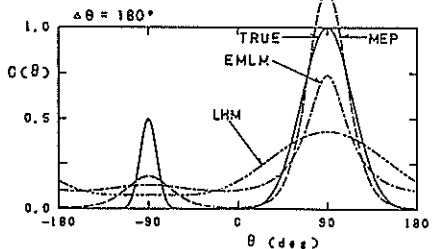
(b) $\Delta\theta=90^\circ$



(c) $\Delta\theta=120^\circ$



(d) $\Delta\theta=150^\circ$



(e) $\Delta\theta=180^\circ$

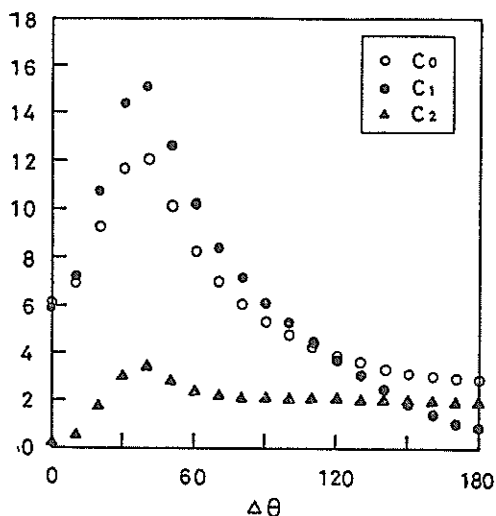
図—4.3 3種類の方法スペクトル推定法 (MEP, EMLM, LHM) による推定結果の比較 (双峰型方向分布関数に関する数値シミュレーション)

分布関数の角度差 $\Delta\theta$ の増大とともに向上している。しかしながら、 $\Delta\theta=180^\circ$ の例を除けば、エネルギーの大きい第1ピークの位置は、真の方向分布関数のピーク位置よりもややずれた位置に出現している。また、 $\Delta\theta=60^\circ$ ではエネルギーの第2ピークは識別されていないが、 $\Delta\theta>90^\circ$ では明確に識別されている。2つのピーク値を見ると、エネルギーの大きいピーク値を過大に、エネルギーの小さいピーク値を過小に推定している。エネルギーの大きいピーク値を過大に推定する程度は、2つの方向分布関数の角度差 $\Delta\theta$ の増大とともに大きくなっている。また、いずれの場合にも、エネルギーの小さい方向分布関数はかなり平滑化されて表現されている。

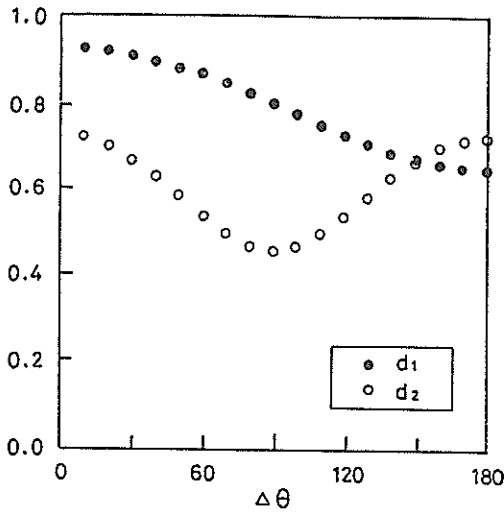
LHMは単峰型方向分布関数の例 (図—4.1) と同様に、3種類の推定法の中で最も推定精度が劣っている。エネルギーのピーク位置およびエネルギーの方向分布形状を見る限りでは、エネルギーの小さい方向分布関数はほとんど識別されていない。

EMLMは、前例と同様に、真の方向分布関数に比べて、エネルギーピーク付近でかなり低いエネルギー値を与えている。また、第2ピークはほとんど識別されていないが、 $\Delta\theta=60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ の例に見られるように、エネルギーの方向分布形状には第2ピークの影響が現われているようである。この影響は、2つの方向分布関数の角度差 $\Delta\theta$ の増大とともに小さくなっており、MEPとは逆の傾向を示している。

図—4.4(a)は、図—4.2(a)と同じパラメータを、2つの方向分布関数の角度差 $\Delta\theta$ に対してプロットしたものである。いずれのパラメータも $\Delta\theta$ の増大とともに増加し、その後減少している。しかしながら、 c_2 は $\Delta\theta \geq 80^\circ$ では



図—4.4(a) MEPのパラメータと $\Delta\theta$ の関係



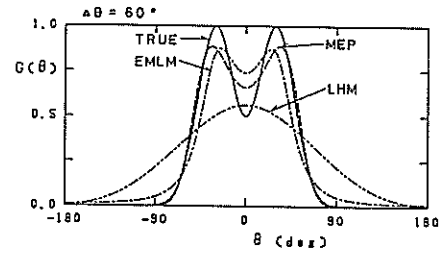
図—4.4(b) LHMのパラメータと $\Delta\theta$ の関係

ほとんど変化していない。また、 $\Delta\theta \geq 150^\circ$ では $c_2 > c_1$ となっており、式(4.13)の指数部の第4項および第5項の影響が、第2項、第3項よりも大きくなっている。なお、本計算例では $\Delta\theta = 10^\circ$ を除けば、式(4.19)の繰り返し計算回数は、概して $\Delta\theta$ の増大とともに減少した。

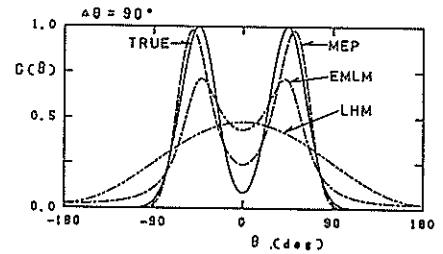
図—4.4(b)は式(4.25)のLHMに関するパラメータと $\Delta\theta$ の関係を図示したものである。 d_1 は $\Delta\theta$ の増大とともに減少している。 d_2 はいったん減少した後、 $\Delta\theta > 90^\circ$ で増大している。特に、 $\Delta\theta > 160^\circ$ では $d_2 > d_1$ となっており、パラメータの大小関係を見る限り、エネルギーの第2ピークの影響が現われるはずである。しかしながら、図—4.3にはその影響はほとんど見られない。これはLHMに用いられている重み関数により、式(3.32)における $n=2$ の項の寄与が減じられたためである。

図—4.5(a)~(e)は、 $\alpha_1 = \alpha_2$, $S_1 = S_2 = 20$ の同じ形の方角分布関数を、角度差 $\Delta\theta = 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ$ と変えた場合の計算例である。いずれの推定法も、前例に比べて、より明確にピークを識別している。MEPによる方角分布関数の推定精度は、前例と同様に、2つの方角分布関数の角度差 $\Delta\theta$ の増大とともに向上している。しかしながら、エネルギーのピーク位置を見ると、 $\Delta\theta = 180^\circ$ を除くいずれの場合にも、真の方角分布関数のピーク位置に比べて、(図の)やや外側にピークが出現している。逆に、EMLMではやや内側にピークが出現している。

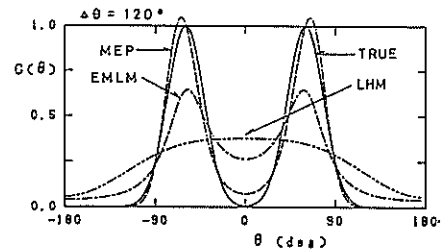
図—4.6(a)は図—4.5の計算結果を用いて、図—4.4(a)と同じ形で式(4.24)のパラメータを図示したものである。図—4.6(a)を見ると図—4.4(a)と異なり、各パラメータは $\Delta\theta$ の増大とともにいったん減少した後、増大し、再び減少している。しかしながら、全体的な傾向は図—4.4(a)と



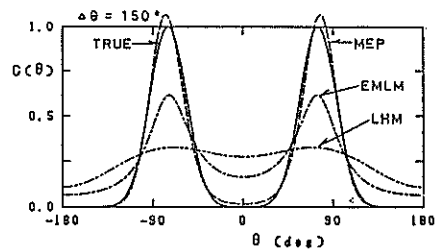
(a) $\Delta\theta = 60^\circ$



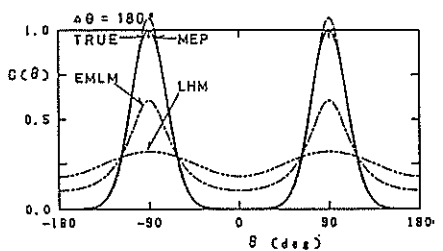
(b) $\Delta\theta = 90^\circ$



(c) $\Delta\theta = 120^\circ$

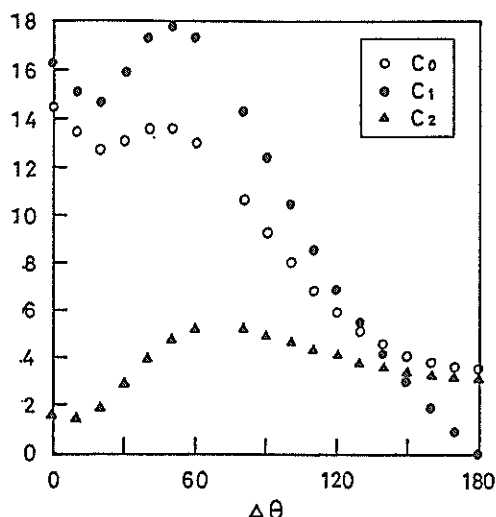


(d) $\Delta\theta = 150^\circ$

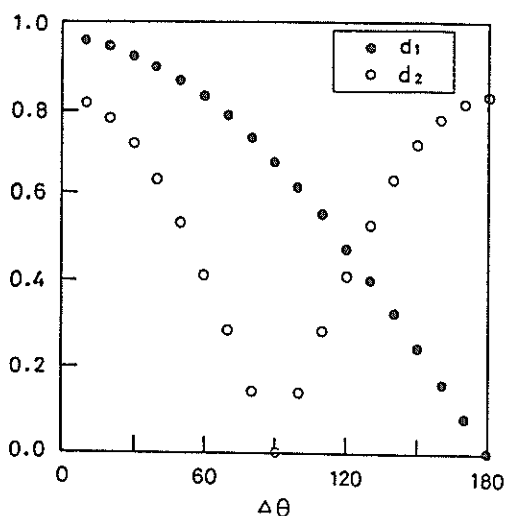


(e) $\Delta\theta = 180^\circ$

図—4.5 3種類の方角スペクトル推定法 (MEP, EMLM, LHM) による推定結果の比較 (双峯型方角分布関数に関する数値シミュレーション)



図—4.6(a) MEPのパラメータと $\Delta\theta$ の関係



図—4.6(b) LHMのパラメータと $\Delta\theta$ の関係

類似している。なお、図中に $\Delta\theta=70^\circ$ の場合のパラメータ値が記載されていないのは、前節に述べた計算法では解が求められなかったためである。

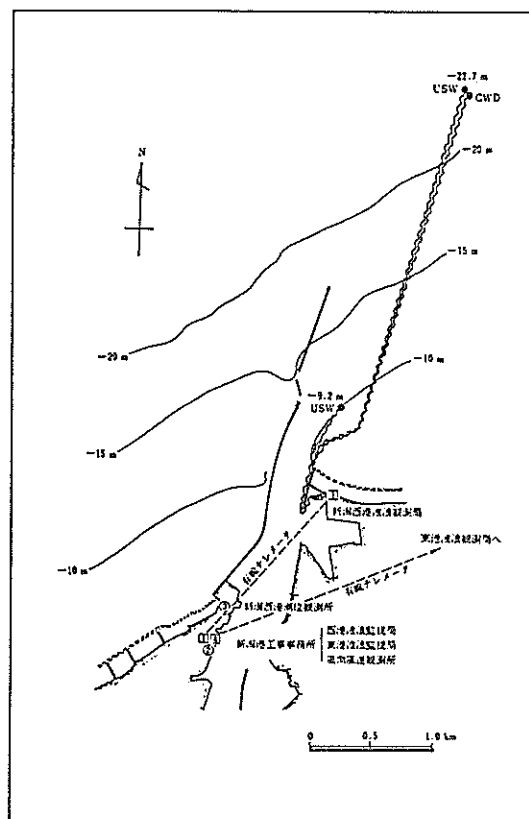
図—4.6(b)は図—4.5の計算結果を用いて、図—4.4(b)と同じ形で式(4.25)のパラメータを図示したものである。図—4.6(b)を見ると、 $\Delta\theta>130^\circ$ で $d_2>d_1$ となっており、図—4.5でも $\Delta\theta>150^\circ$ でLHMは双峯型の方向分布形状を示している。しかしながら、重み関数の影響のため、明確な双峯型とはなっていない。

以上、種々のケースについて、数値シミュレーション法を用いてMEPの推定精度の検討を行った。いずれの場合にもMEPの推定精度が最も高く、また、双峯型の方

向分布関数の識別も可能であることが示された。一方、式(4.19)に基づくラグランジュの未定乗数の算出法の欠点も明らかとなった。しかしながら、エネルギーの方向集中度のあまり大きくない通常の風波、あるいは風波とうねりの重なりあった波浪場の現地観測データから方向スペクトルを推定する方法としては、十分に実用に耐え得るものと考えられる。

4.6 最大エントロピー原理法の現地観測データへの適用

MEPを用いた方向スペクトル推定法の現地観測データへの適用性を検討するために、新潟西港の波浪観測データを用いて方向スペクトル解析を行った。新潟西港では図—4.7に示す水深22.7mの地点に、超音波式波高計および超音波式流速計を設置し、1982年10月より観測を継続して実施している。波浪観測機器の仕様は表—4.1に示すとおりである。解析対象データは1984年3月10日～12日の3日間の観測データであり、毎偶数正時前後10分間の計20分間の記録を合計36観測分解析した。日本海



図—4.7 波浪観測機器設置位置図
(USW：超音波式波高計，CWD：超音波式流速計)

ではこの間に2つの低気圧が通過しており、風向も大きく変動していることから、二方向波浪が出現しやすいと考えたからである。

図—4.8はこの間の波浪諸元の経時変化を示したものである。低気圧の通過にともない、3月10日午後より有義波高 $H_{1/3}$ が増大しはじめ、冬型の気圧配置となった11日午後には、4 m 近い有義波高となっている。その後、波は徐々に減衰していったものの、12日正午には2つ目の低気圧の通過にともなって、再び波高が増大している。なお、図中の風速 U および風向 θ_w は第一港湾建設局新潟港工事事務所に設置された風向・風速計（地上高15.6 m）により得られた記録であり、波浪観測機器設置点のものではないが、参考のために記載した。また、 $\bar{\theta}$ は共分散値によって定義される平均波向であり、次式で定義される¹⁴⁾。

$$\bar{\theta} = \tan^{-1} \left(\frac{-\overline{\eta v}}{-\overline{\eta u}} \right) \quad (4.26)$$

ここに、 $\overline{\eta u}$ 、 $\overline{\eta v}$ はそれぞれ水面変動と水粒子速度の x 成分および y 成分の共分散値である。なお、平均波向の変化した3月10日12、14時、22、24時および12日14、16時には、後で例を示すように、顕著な二方向波浪が出現していることを確認している。

種々の方向スペクトル推定法の現地観測データへの適用に際しては、磯部ら¹⁴⁾の提案を参考にして、表—3.1に示す伝達関数の代わりに、次式により観測データから算出される伝達関数を用いて解析を行った。

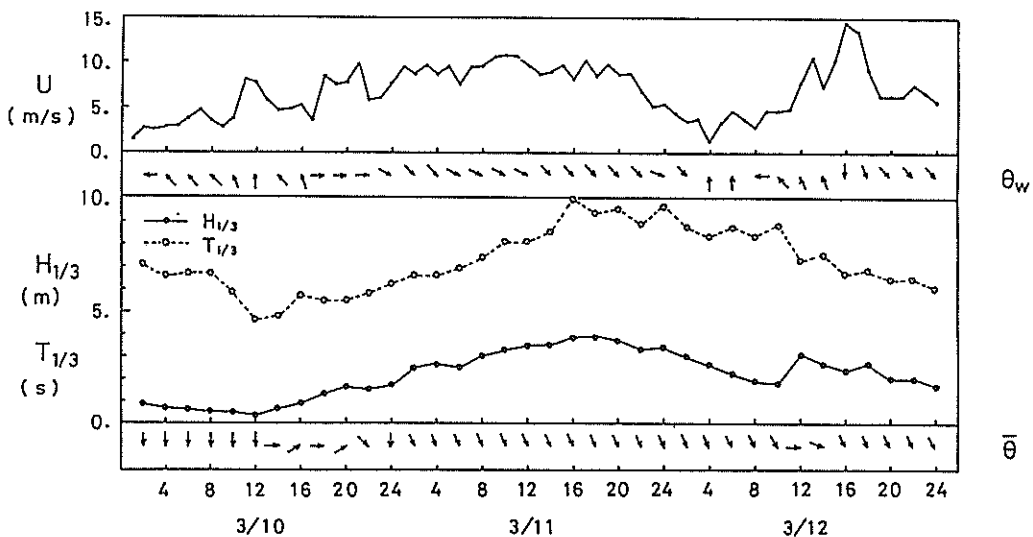
$$h_u(f) = \sqrt{\frac{S_{uu}(f) + S_{vv}(f)}{S_{\eta\eta}(f)}} \quad (4.27)$$

ここに、 $h_u(f)$ は水面変動から水粒子速度への伝達関数、 $S_{\eta\eta}(f)$ 、 $S_{uu}(f)$ 、 $S_{vv}(f)$ はそれぞれ水面変動 η および水粒子速度 u 、 v のパワースペクトルである。

図—4.9は水面変動のパワースペクトルの計算結果の一例である（3月11日24時）。また、図—4.10は同時刻の

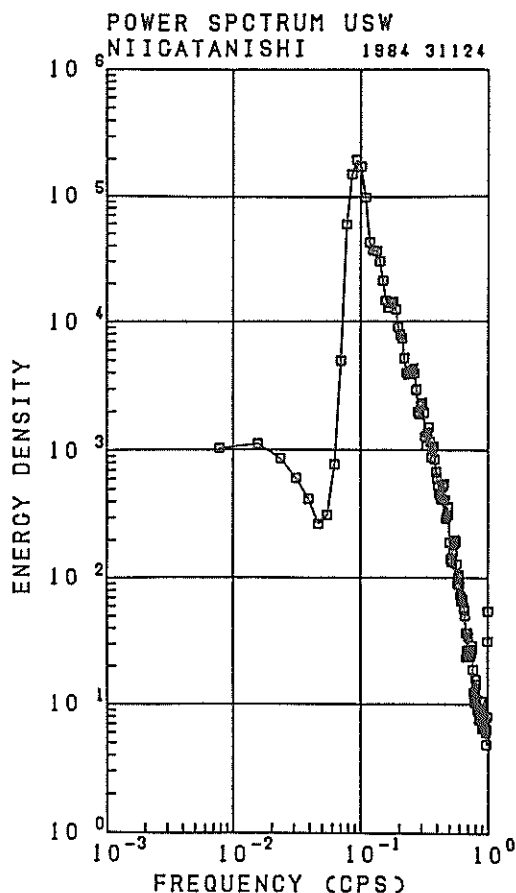
表—4.1 波浪観測地点および機器の仕様

機 種		超音波式波高計	超音波流速計	
測 定 地 点	北 緯	37° 58' 46''		
	東 経	139° 05' 20''		
	水 深	-22.7m		
	離 岸 距 離	3.0km		
	設 置 高	1.0m	1.5m	
	設 置 方 位	—	N0° (真北)	
記 録 方 式	デ ィ ジ タ ル 記 録	感 度	0.75cm/dig	0.3 cm/s/dig
		フルスケール	15m	± 3 m / s
		サンプリング周期	0.5 s	0.5 s
	アナログ記録	感 度	(Ⅰ)(Ⅱ) 10, 5 cm/mm	1.5cm/s/mm
		フルスケール	(Ⅰ)(Ⅱ) 15, 7.5m	± 3 m / s
		記録紙送り速度	60mm/min	40mm/min



図—4.8 波浪諸元の経時変化図

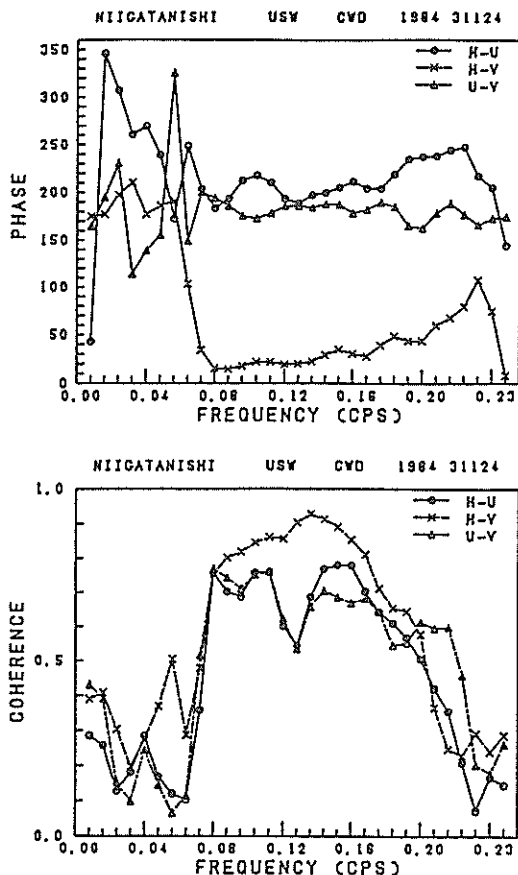
($H_{1/3}$: 有義波高, $T_{1/3}$: 有義波周期, $\bar{\theta}$: 平均波向, U : 風速, θ_w : 風速)



図—4.9 パワースペクトル図
(1984年3月11日24時)

水面変動 η と水粒子速度 u, v とのコヒーレンスおよびフェイズ (位相差) の一例を示したものである。図—4.9 および図—4.10 より、パワースペクトルのエネルギー・ピーク付近、すなわち周波数 $f=0.08\sim0.2$ (Hz) の範囲では、コヒーレンスは1に近くなっている。これは波の線形性が強く、かつエネルギーの方向集中度が高いことを示している。

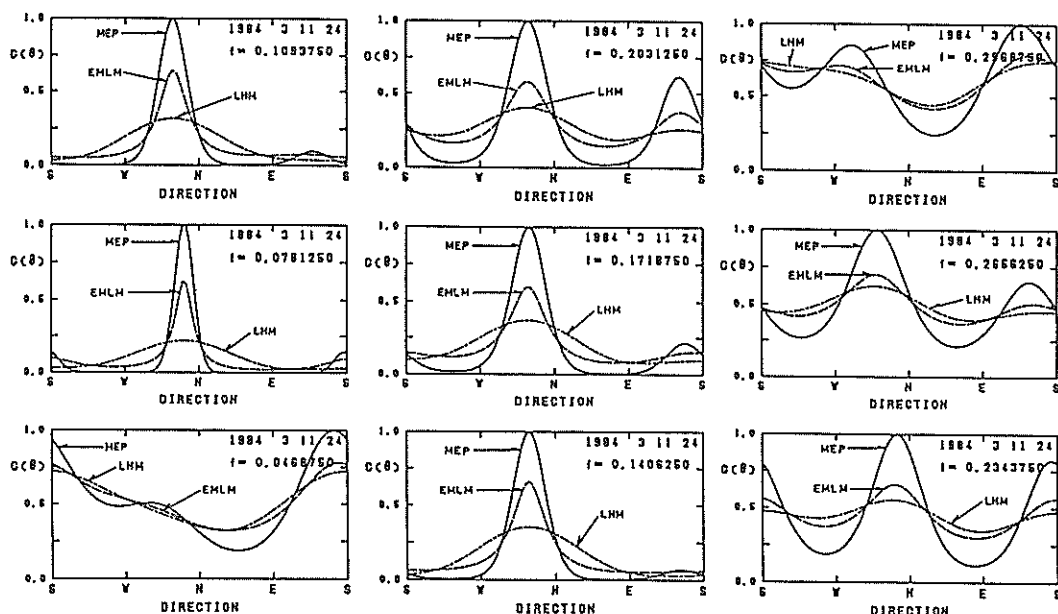
図—4.11は図—4.10と同じデータを用いて、周波数別に方向分布関数の推定値 $\hat{G}(\theta|f)$ を示したものである。図の縦軸は MEP で推定した方向分布関数の最大値で無次元化して示している。いずれの推定法による推定結果も、パワースペクトルのエネルギーの卓越した周波数範囲で、エネルギーの方向集中度が大きく、それよりも低周波数側および高周波数側で、エネルギーの方向集中度の低いエネルギー分布形状を示している。また、パワースペクトルのエネルギーの卓越した周波数帯での方向分布関数のピーク位置は、いずれの方法による推定結果も



図—4.10 コヒーレンスと位相差
(1984年3月11日24時)

図—4.8に示す平均波向 $\bar{\theta}$ の方向と一致している。しかしながら、パワースペクトルのエネルギーの卓越した周波数範囲では、EMLM は LHM に比べて、かなり明確にエネルギーの方向分布形状を示しているものの、コヒーレンスの低下している低周波数側および高周波数側では、EMLM と LHM の差異はほとんど見られず、かなり平坦な方向分布形状を示しているなどの特徴が見られる。このような場合にも、MEP は他の方法に比べてより明確なエネルギーの方向分布形状を示しており、雑音に埋もれた信号の抽出という観点からは、MEP は EMLM に比べて優れた推定法であると言える。

図—4.12および図—4.13は一方波浪の方向スペクトルの等値線図³⁰⁾を示したものである。エネルギー・レベルの広い範囲で詳細な分布を描画するために、方向スペクトルを対数変換し、 $\log \hat{S}(f, \theta)$ を $0 \sim \max\{\log \hat{S}(f, \theta)\}$ の範囲で15分割して描いている。図—4.12は有義波高 $H_{1/3}=3.87$ m の最盛時 (3月11日18時) のものであり、図—4.13は $H_{1/3}=3.47$ m の減衰時 (3月11日24時) のもの



図—4.11 3種類の方向スペクトル推定法 (MEP, EMLM, LHM) による方向分布関数の推定結果の比較 (1984年3月11日24時)

である。減衰時は最盛時に比べて、エネルギーの方向分布幅がやや狭くなっており、また、エネルギーのピーク位置もやや低周波数側へ移行している。MEPとEMLMを比べると、細部についてはいくらかの差異は認められるものの、全体的な傾向は類似している。MEPの方がやや鋭くエネルギー分布を表現している程度である。LHMは、当然のことながら、他の方法に比べてかなり平滑化された方向スペクトル形状となっている。

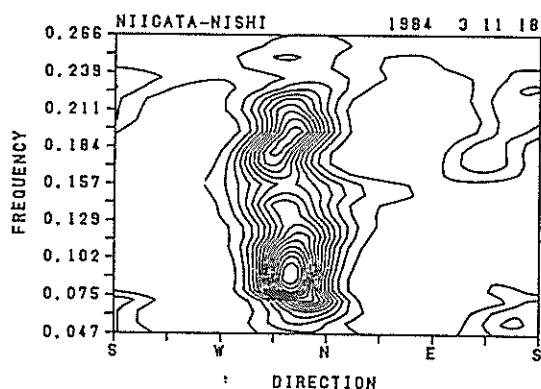
図—4.14および図—4.15は二方向波浪の方向スペクトルの等値線図を示したものである。前者は3月12日14時、後者は同日16時のものである。MEPおよびEMLMはどちらも明確に二方向波浪を表現しており、前例と同様に、両者の間には顕著な差異はない。LHMもいくつかのエネルギーピークを検出しているものの、各周波数別にみると、明確には1つのピークしか表現し得ていない。この性質のために、特に図—4.15(c)では、周波数ごとにそれぞれ異なった位置にピークが現われており、MEPやEMLMの等値線図に見られるような明確な二方向波浪場の特性が把握しにくくなっている。

なお、前節の数値シミュレーションを用いた計算例では、式(4.19)の初期値として、 $\lambda_i^0=0, (i=1, \dots, 4)$ とした場合、 $S>22$ では解 $\lambda_i, (i=1, \dots, 4)$ は求まらなかった。しかしながら、現地観測データを用いた本計算例では、初期値を0としたにもかかわらず、すべてのケースについて解を求めることができた。例えば、図—4.11

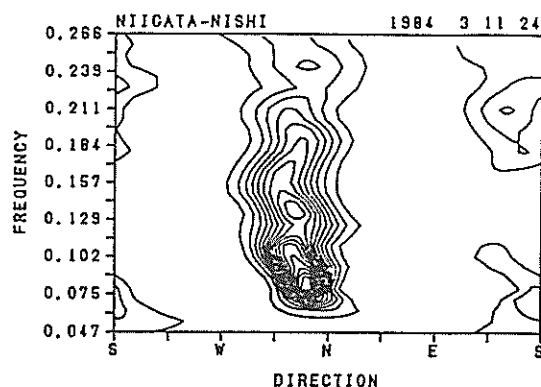
の周波数 $f=0.078125$ (Hz)の例に見られるように、 $S=22$ よりもはるかに先鋭な方向分布形状も算出し得たわけである。この理由として、図—4.11の $f=0.078125$ (Hz)の例では、エネルギーの大きい第1ピークとはほぼ180°離れた位置に、エネルギーの第2ピークが存在しているためか、あるいはコヒーレンスの低下をもたらすノイズの存在により、解が収束しやすくなっていることなどが考えられる。いずれにせよ、式(4.14)からラグランジュの未定乗数 $\lambda_i, (i=1, \dots, 4)$ を算出する一般的方法については、今後、さらに検討する必要がある。

4.7 結論と議論

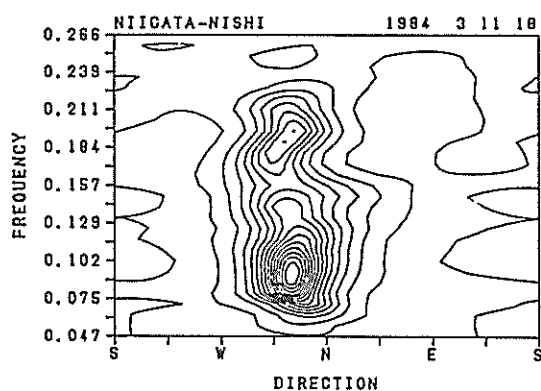
本章では特に3成分の観測データに適用可能な方向スペクトル推定法として、最大エントロピー原理(MEP)を用いる方法について述べた。3成分観測データを対象とする場合にはMEPは既往の方向スペクトル推定法に比べて最も高い分解能を有しており、単峯型の方向スペクトルのみならず、双峯型の方向スペクトルの識別が可能である。しかしながら、3成分観測データを対象とした数値シミュレーションでは、方向分布関数が尖鋭な形状の場合には、ラグランジュの未定乗数が容易に算出し得ないなどの欠点も明らかとなった。また、本論文には示していないが、ここで述べたものと同様の定式化ならびに数値計算法を用いて本方法を拡張し、クローバリーフ型ブイや複数の波高計アレイを対象として試算を行っ



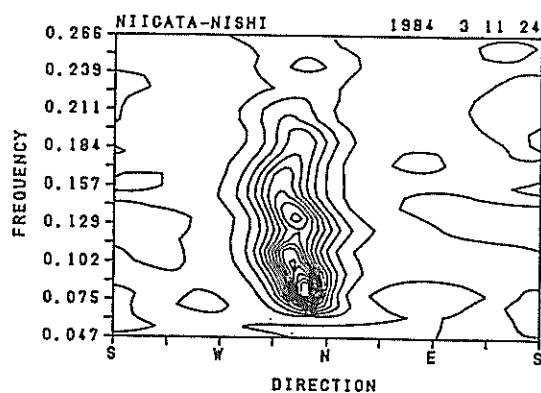
(a) MEP



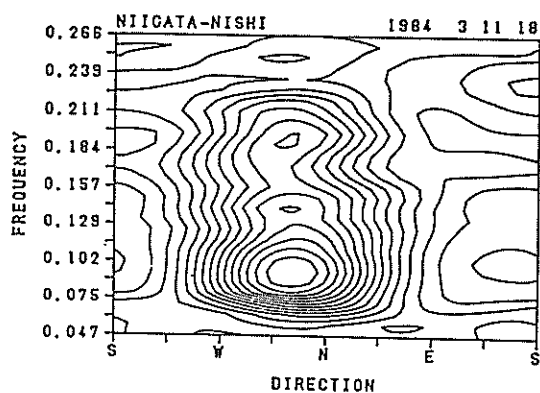
(a) MEP



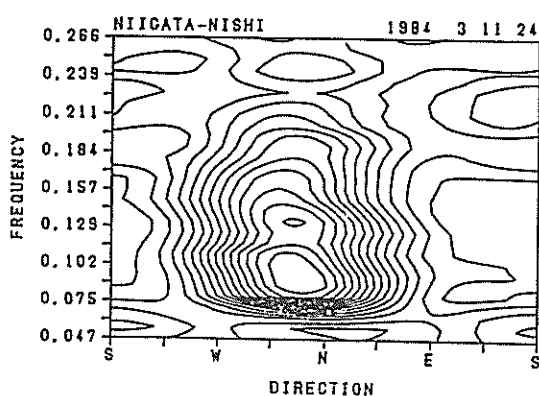
(b) EMLM



(b) EMLM



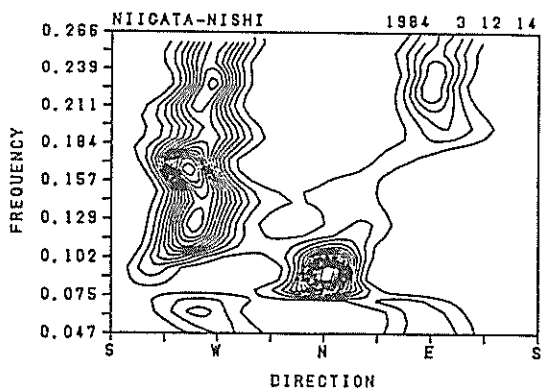
(c) LHM



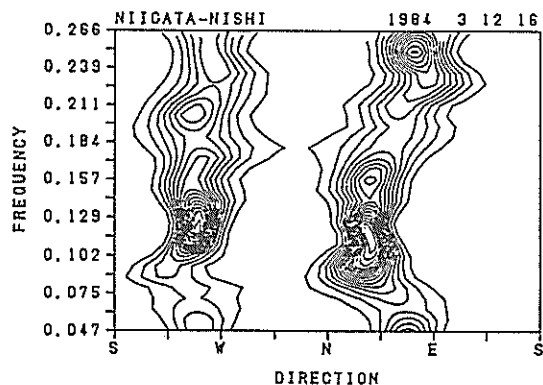
(c) LHM

図—4.12 方向スペクトル等値線図
(一方向波浪, 1984年3月11日18時, 上段:
MEP, 中段:EMLM, 下段:LHM)

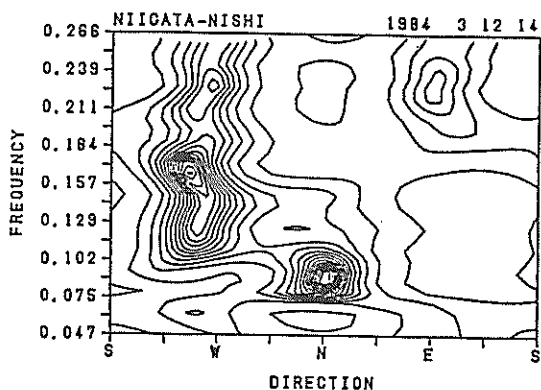
図—4.13 方向スペクトル等値線図
(一方向波浪, 1984年3月11日24時, 上段:
MEP, 中段:EMLM, 下段:LHM)



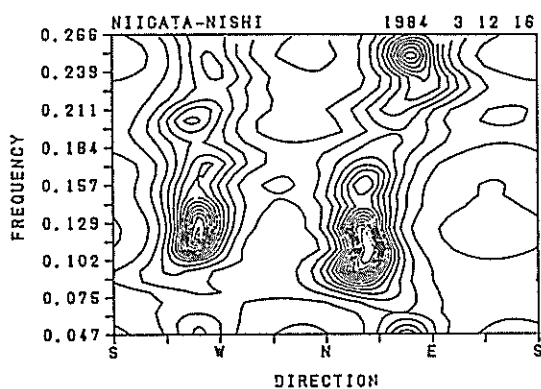
(a) MEP



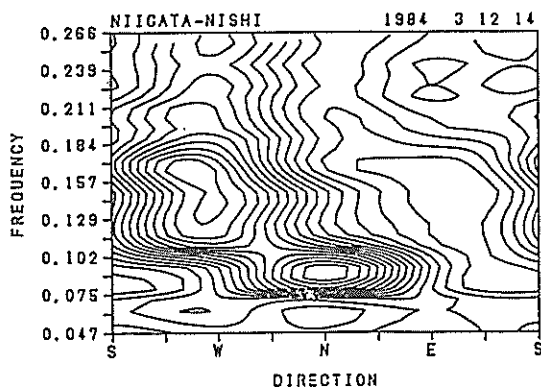
(a) MEP



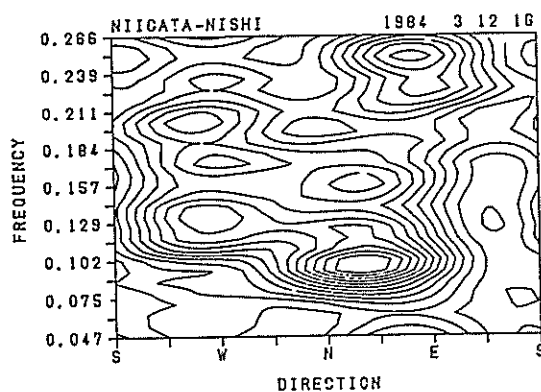
(b) EMLM



(b) EMLM



(c) LHM



(c) LHM

図—4.14 方向スペクトル等値線図
(二方向波浪, 1984年3月12日14時, 上段:
MEP, 中段:EMLM, 下段:LHM)

図—4.15 方向スペクトル等値線図
(二方向波浪, 1984年3月12日16時, 上段:
MEP, 中段:EMLM, 下段:LHM)

た結果、ラグランジュの未定乗数は容易に算出し得なかった。本方法を EMLM のように任意の波動量に適用可能な形に拡張するためには、数値計算法に何らかの工夫を導入する必要がある。あるいはまた、最大エントロピー推定値の存在性についても検討する必要があるかも知れない。すなわち、本方法では方向分布関数の最大エントロピー推定値を誘導する過程において、制約条件式 (3.28) を厳密に満たす形で推定式が定式化されており、クロススペクトルの誤差については考慮されていない。このため、より多くの任意の観測波動量を対象として本方法を拡張する場合には、DFT 法や EMLM の解説で述べたように、方向スペクトルとクロススペクトルの 1 対 1 の対応関係に破綻が生じることがあり、また、クロススペクトルから構成される行列 $\Phi(\omega)$ の形式によっては解が存在しないことも考えられるためである。しかしながら、例えば式 (4.13) に見られるように、本方法の方向分布関数の推定式は $\exp$ の指数部に Fourier 級数形の関数が乗った形となっており、負値はとり得ない。このため、推定式の形としては物理的意味において妥当な形をしているものと思われる。

ここで、最大エントロピー推定値の物理的な意味を考察して見ることとする。赤池^{37),38)}は式 (4.4) で定義されるエントロピー (Shannon のエントロピー) をめぐるさまざまな誤解について解説している。その中で Boltzmann により提案された本来のエントロピーの本質的な理解の必要性を主張している。ここではこれをもとに、本章で述べた方向スペクトル推定法について考察する。

Boltzmann により提案されたエントロピーは次式で与えられる。

$$B(p:q) = -\int p(x) \ln p(x) dx + \int p(x) \ln q(x) dx \quad (4.28)$$

赤池³⁸⁾によれば、 $p(x)$ は真の分布に対応し、 $q(x)$ がわれわれの想定するモデルによる分布に対応しており、 $B(p:q)$ は想定したモデルから $p(x)$ のような分布が得られる確率の対数という解釈が許されるとしている。このため、 $B(p:q)$ は $q(x)$ による $p(x)$ の近似の程度を表わす極めて自然な評価規準であると述べている。 $B(p:q)$ は次の (4.29) を満たす。

$$\left. \begin{aligned} B(p:q) < 0 : p(x) \neq q(x) \\ B(p:q) = 0 : p(x) = q(x) \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

すなわち、Boltzmann のエントロピー $B(p:q)$ はモデルの分布 $q(x)$ が真の分布 $p(x)$ に一致したときに最大値 0

をとる。

なお、式 (4.4) で定義される Shannon のエントロピー H は Boltzmann のエントロピー $B(p:q)$ において、 $q(x) = 1/\alpha$ (一様分布) とした場合に形式的に対応する。これは形式的な類似であり、Shannon が真に意図した解釈とは異なるかも知れないが、形式的な物理的解釈は可能であろうと思われる。すなわち、もし一様分布が、想定される分布の中で、物理的な意味において最も単純な構造をしているものという解釈が許されるならば、最大エントロピー原理法により推定される方向分布関数は、式 (3.28) の制約条件下でとり得る最も単純な構造を持つエネルギー分布を推定しているものと解釈される。情報論的に解釈すれば、この単純さのために、与えられた情報以外の情報が混入することを防ぐことができるものと解釈される。

しかしながら、最大エントロピー原理法では想定したモデルの分布 $q(x)$ を固定し、真の分布 $p(x)$ を変化させることにより、エントロピー最大化を実現している。物理現象を統計的方法により明らかにするという立場からは、本来ならば、真の分布 $p(x)$ を固定し、モデルの分布 $q(x)$ を変化させることにより、エントロピー最大化の実現を図るべきであり、明らかに逆の推論方法となっている。この意味からは、最大エントロピー原理法は、結果として、形式的な便宜的な方法であるのかも知れない。しかしながら、本章の冒頭で述べたように、最大エントロピー原理法は有限の情報から推定される無数の方向スペクトル推定値から、ただ一つの解を特定するという立場で導入した。また、4.3 で示した定式化においては、3 成分観測データから得られる制約条件として 5 つの独立な制約条件を用いて定式化を行った。3 成分観測データは方向スペクトルを特定するための必要最小限のデータであり、また、方向スペクトルの推定においてクロススペクトル相互の矛盾を評価しにくい観測量の組み合わせでもある。このような状況においては、最大エントロピー原理法により推定される方向分布関数は、情報論的解釈において妥当な推定値であろうと思われる。

しかしながら、最大エントロピー原理法を 3 成分よりも多い複数の波動量の観測データへ拡張する場合、特に、図 3.2 を用いて説明したように相互の観測データが方向スペクトルの推定式の中で互いに矛盾を持つ場合には、本方法をそのまま適用することは困難であり、別の方向スペクトル推定法を開発する必要がある。これについては第 5 章で述べている。

第5章 ベイズ型モデルを用いた方向スペクトル推定法

限られた少数の波動量の同時観測記録から方向スペクトルを推定する場合には、多くの不確定な要素が存在する。方向スペクトルの推定問題のように、限られた少数の情報から複雑すぎる現象をとらえる問題では、既往の方向スペクトル推定法に用いられているような便宜的な数学的手法のみによっては、ある場合にはその物理現象をよく表現し得ない場合がある。

換言すれば、方向スペクトルの推定問題においては、我々の得ることのできる情報は、その物理現象が持つ本来の物理構造のある一部の観測結果にすぎず、このような一部のみの情報から、形式的な便宜的方法により、その構造の全体を把握しようとするところに、従来の方向スペクトルの推定理論の問題点があると考えられることである。

一方では、方向スペクトルの観測成果に基づいた、方向分布関数あるいはめ法、などの推定法もあるが、方向分布関数の関数形が固定されているため、設定された関数形の範囲内の近似という意味での妥当性しか保証されない。

したがって、このような問題に対しては、その物理現象の真の構造をも含むであろう、自由度の大きな、柔軟な物理的モデルを想定し、そのモデルの中から真の構造に近いものを模索するという方法が良い結果を生むであろうと期待される。

本章ではこれまでに述べてきた種々の推定法の問題点を解消し、推定精度が良く、かつ安定した方向スペクトルを推定可能な方法として、方向スペクトルの推定法の定式化にベイズ型モデルを導入する方法について検討する。ベイズ型モデルは赤池³⁹⁾により導入され、坂元⁴⁰⁾、石黒^{40), 41), 42)}、北川らによって様々な応用が行われている。ここではこれらの応用の中から、特に、石黒によって応用されたベイズ型スプライン回帰⁴⁰⁾および電波望遠鏡データに基づく像の回復の問題^{41), 42)}を参考にして、ここで用いられた方法を方向スペクトルの推定問題に適用することにより、方向スペクトル推定法の定式化を行うこととした⁴³⁾。ベイズ型モデルを用いた方向スペクトル推定法は一種の分布関数あるいはめ法であるが、後で示されるように海洋波の物理特性を考慮したより物理的な推定法であり、極めて柔軟性に富む方法である。

本章ではまず最初に、ベイズ統計学の基本的考え方を、続いて赤池により導入されたベイズ型モデルについてアウトラインを述べた後、今回新たに開発したベイズ型モ

デルを用いた方向スペクトル推定法について詳しく述べる。

5.1 ベイズの方法^{38), 44)}

確率論の重要な定理として、同時確率密度関数と条件付確率密度関数の関係を表わすベイズの定理がある。これは次式で表わされる。

$$p(x, \theta) = p(x|\theta)p(\theta) = p(\theta|x)p(x) \quad (5.1)$$

式(5.1)を変形すると、

$$p(\theta|x) = \frac{p(x|\theta)p(\theta)}{p(x)} \quad (5.2)$$

が得られる。式(5.2)は x を既知として θ について推論する際に有効な式である。いま、 x をデータ、 θ を母数とすれば、 $p(x|\theta)$ はモデル分布、 $p(\theta)$ は事前分布、 $p(\theta|x)$ は事後分布の確率密度関数と呼ばれる。事前分布は実験あるいは観測によってデータ x を得る前の知識を反映し、事後分布は事前の知識に加えてデータ x により学習した知識を反映する⁴⁴⁾。

モデル分布 $p(x|\theta)$ は x が既知で θ の関数と見なすとき、 θ の尤度を示す尤度関数 $L(\theta|x)$ となる。 x を既知とし、事後分布 $p(\theta|x)$ において、 θ に関係しない項を除くと、

$$p(\theta|x) \propto L(\theta|x)p(\theta) \quad (5.3)$$

と表わされる。すなわち、

$$(\text{事後分布}) \propto (\text{尤度}) \times (\text{事前分布}) \quad (5.4)$$

である。これがベイズの推論方法の本質的部分である。モデル分布 $p(x|\theta)$ が与えられた場合に、ベイズの方法を実現するためには、 θ の事前分布 $p(\theta)$ が必要である。この事前分布 $p(\theta)$ をどう選ぶかがベイズの方法を実用化する際の決定的な問題となる。この事前分布の決定法が一意的でないために、通常のデータの統計的解析におけるベイズの方法が発展しなかったのである³⁸⁾。

なお、一般に用いられている最尤法は、事前分布 $p(\theta)$ を用いることなく、尤度関数 $L(\theta|x)$ だけに基づいて行う推論方法である。(ベイズの方法において、事前分布 $p(\theta)=1/\alpha$ (一様分布)を採用した場合には、形式的に最尤法に一致する。)

5.2 赤池のベイズ型情報量規準^{38),39)}

式 (5.2) を一般化して記述すると,

$$p(\theta|x) = \frac{p(x|\theta)p(\theta)}{\int p(x|\theta)p(\theta)d\theta} \quad (5.5)$$

と表わされる。モデル分布 $p(x|\theta)$ が与えられた場合に、ベイズの方法を実現するためには、 θ の事前分布 $p(\theta)$ が必要である。問題は事前分布 $p(\theta)$ の選択にまつわる主観性である。赤池³⁹⁾はこの問題を次のように解決した。

いま、事前分布 $p(\theta)$ の決定が難しいという事実を認め、可能な $p(\theta)$ として、 $p_1(\theta)$, $p_2(\theta)$, $\dots$, $p_K(\theta)$ を考える。 $p_k(\theta)$; ($k=1, \dots, K$) のいずれを最終的に取るべきかが不確かな状態にあることの表現として、 $p_k(\theta)$ のそれぞれに確率 $p(k)$ を考える。ここで $p(1)+p(2)+\dots+p(K)=1$ である。もちろん $p(k)$ をどう選ぶかが再び問題となるが、ここでは単にある $p(k)$ が与えられたとして考える。この場合、 θ の事前分布 $p(\theta)$ は、最も確からしい値として、

$$p(\theta) = \sum_{k=1}^K p_k(\theta)p(k) \quad (5.6)$$

によって推定される。これを用いると、

$$p(\theta|x) = \sum_{k=1}^K p_k(\theta|x)p(k|x) \quad (5.7)$$

という表現が得られる。ただし、 $p_k(\theta|x)$ は $p(x|\theta)$ と $p_k(\theta)$ とで決まる k 番目のモデルに関する θ の事後分布であり、 $p(k|x)$ は

$$p(k|x) = \frac{p(x|k)p(k)}{\sum_{k=1}^K p(x|k)p(k)} \quad (5.8)$$

で与えられる事後分布を示す。ただし、

$$p(x|k) = \int p(x|\theta)p_k(\theta)d\theta \quad (5.9)$$

である。式(5.8)に見られるように、 k の事後分布 $p(k|x)$ が事前分布 $p(k)$ と $p(x|k)$ とから定まることから、式(5.5)と対比して、 $p(x|k)$ を k 番目のベイズ型モデルの尤度と呼ぶことが適当であることが分かる。このような見方はより一般に k 番目のモデルがモデル分布 $p_k(x|\theta(k))$ とパラメータ $\theta(k)$ の事前分布 $p(\theta(k))$ とによって与えられる場合にそのまま適用することができる。

赤池³⁹⁾は上の結果は、尤度 $p(x|k)$ の大きいモデルは、ベイズの方法に従って θ の事後分布 $p(\theta|x)$ を求めようとする場合に無視できず、中でも一つの k に対する尤度

$p(x|k)$ が他のものの尤度よりも際だって高い場合には、事前分布 $p(k)$ に関する特別な制約がない限り、事前分布が確定されない状況では、このモデルを採用して推論を進めることが合理的だと述べている。なお、実際にベイズ型モデルを適用する際には、式(5.9)の代わりに、次式で表わされる ABIC (赤池のベイズ型情報量規準)³⁹⁾

$$\text{ABIC} = -2 \ln \int p(x|\theta)p_k(\theta)d\theta \quad (5.10)$$

の最小化によって事前分布 $p_k(\theta)$ を決定している。

5.3 ベイズ型モデル^{31),38),39)}

統計モデルによるデータ解析法の一方法として、赤池³⁹⁾により導入されたベイズ型モデルについて述べる。

いま、 y を目的変数、 x を説明変数のベクトルとし、両者の関係を次式のような線形回帰モデルで表現する。

$$y = x'\alpha + \varepsilon \quad (5.11)$$

ここに、 α は未知の係数ベクトルであり、 ε は平均 0、未知の分散 σ^2 の正規分布に従うランダム変数である。 n 組のデータ (y_i, x_i) , ($i=1, \dots, n$) が与えられると、 α の最尤推定値は

$$\sum_{i=1}^n \|y_i - x_i'\alpha\|^2 = \|y - X\alpha\|^2 \quad (5.12)$$

を最小にすることによって得られる。ここに、 $y=(y_1, \dots, y_n)'$, $X=(x_1, \dots, x_n)'$ であり、 $\|\cdot\|$ はユークリッド・ノルムである。

未知係数ベクトル α の次数 k が $2\sqrt{n}$ を越えない比較的少数の未知パラメータで規定されるモデルの族内から最適なモデルを選択する問題では、AIC(赤池の情報量規準)²⁴⁾を導入したモデル選択法(MAICE法)³⁰⁾により、モデルの適合度と推定量の滑らかさの両方の観点から、望ましい結果が得られることが多い。しかしながら、データ数 n が未知係数ベクトル α の次数 k に比べて比較的に小さい場合にはモデルは不安定になる。さらに、次数 k が n よりも大きい場合には式(5.12)から未知係数 α を決定することができない。

このような場合、モデルの適合度と推定値の滑らかさのバランスを考慮し、 α がある既知の値 α_0 に近い、あるいは適当な行列 D に対して $\|D(\alpha - \alpha_0)\|^2$ が小さいと仮定することにより、一つの自然な推定法として、

$$\|y - X\alpha\|^2 + u^2 \|D(\alpha - \alpha_0)\|^2 \quad (5.13)$$

を最小にする α をその推定値とする方法が考えられる。

しかしながら、このような方法では α の推定値は式 (5.13) 中のパラメータ u の値に依存し、 u の大小によって異なる α が得られる。したがって、新たな問題として、 u をどのように選択するか問題となる。

赤池³⁰⁾は、この問題に対して、式 (5.13) の最小化は

$$\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\|y-X\alpha\|^2\right\}\exp\left\{-\frac{u^2}{2\sigma^2}\|D(\alpha-\alpha_0)\|^2\right\} \quad (5.14)$$

の最大化に他ならないとして、以下のように解決した。すなわち、式 (5.14) の第 1 項はデータ (y_i, x_i) , $(i=1, \dots, n)$ が与えられた状況では α と σ^2 の尤度 $L(\alpha, \sigma^2|y)$ に比例し、第 2 項は適当な規準化のもとではパラメータ α の事前分布 $p(\alpha|u^2, \sigma^2)$ であると考えられる。したがって、式 (5.3) より、 α の事後分布は α で規定されるモデルの尤度と α の事前分布の積に比例することから、式 (5.13) の最小化により得られる α の推定値は α の事後分布のモード (最頻値) を推定値とすることに等しい。また、 u^2 は α の事前分布を規定する超パラメータ (ハイパー・パラメータ) であると思なされる。したがって、 u^2 と σ^2 の選択規準としては、ベイズ型モデルの尤度

$$\int L(\alpha, \sigma^2|y)p(\alpha|u^2, \sigma^2)d\alpha \quad (5.15)$$

を最大化することによって決定するとしている。実際には次式で表わされる ABIC³⁰⁾

$$\text{ABIC} = -2\ln \int L(\alpha, \sigma^2|y)p(\alpha|u^2, \sigma^2)d\alpha \quad (5.16)$$

の最小化によって u^2 , σ^2 を決定する。

なお、式 (5.15) そのものを u^2 , σ^2 で規定されるモデルと考えれば、ABIC 最小化法はモデルのパラメータを最尤法によって決める方法であると解釈される³¹⁾。

5.4 ベイズ型モデルを用いた方向スペクトル推定法 (BDM) の定式化⁴³⁾

海の波は無数の周波数および方向角の異なる成分波の重ね合わせとして表現される。この場合、周波数と方向角は独立であり、一般に式 (2.20) の関係が成立する。したがって、パワースペクトルと各周波数ごとの方向分布関数が得られれば、方向スペクトルが確定する。しかしながら、実際には周波数についても無数の成分波が存在し、また各周波数ごとの方向角についても無数の成分波が存在する。したがって、パワースペクトルを推定することと、方向分布関数を推定することはどちらも有限の情報から無数の未知パラメータを推定する問題である

と思なされる。このうち、パワースペクトルについては鉛直方向の波動量の時系列データを所定の時間以上計測すれば、所与の分解能でスペクトルが得られ、実用上は特に問題ない。一方、方向分布関数は、得られる情報量に比べて現象が複雑であることもあり、従来の推定法では、前述したように、情報の種類や量に依存して様々な問題が生じる場合がある。このように、一見複雑な現象の特性を限られたごく少数の情報から逆推定する問題では、ベイズ型モデルを導入することが有効である。

以下では、式の誘導の便宜上、式 (3.5) の 2 次元的表示式 (m 番目の波動量と n 番目の波動量のクロススペクトルを $\Phi_{mn}(f)$ と表示する方式) を、1 次元的表示式 ($\phi_i(f)$ と表示する方式) に再構成して取り扱う。なお、 $\Phi_{mn}(f)$ から構成される行列 $\Phi(f)$ がエルミート行列であることを考慮し、行列 $\Phi(f)$ の上三角の部分のみを用いることとする。このとき、式 (3.5) の方程式の数 N は観測波動量の数を M として、

$$N = M \times (M+1)/2 \quad (5.17)$$

であり、次式のように表わされる。

$$\phi_i(f) = \int_0^{2\pi} H_i(f, \theta) G(\theta|f) d\theta, \quad (i=1, \dots, N) \quad (5.18)$$

ここに、

$$\begin{aligned} H_i(f, \theta) &= H_m(f, \theta) H_n^*(f, \theta) \\ &\times [\cos\{k(x_{mn} \cos \theta + y_{mn} \sin \theta)\} \\ &- i \sin\{k(x_{mn} \cos \theta + y_{mn} \sin \theta)\}] / D_{mn}(f) \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\phi_i(f) = \Phi_{mn}(f) / \{S(f) D_{mn}(f)\} \quad (5.20)$$

$$G(\theta|f) = S(f, \theta) / S(f) \quad (5.21)$$

である。 $D_{mn}(f)$ はクロススペクトルを無次元化するとともにクロススペクトルの推定誤差を正規化するために導入した関数であり、式 (5.18) の実部、虚部に対してそれぞれ式 (3.18) および式 (3.19) の平方根、すなわちクロススペクトルの推定誤差の標準偏差を用いることとした。ただし、5.6 に述べる数値シミュレーションに際しては、用いるクロススペクトルを推定値としてではなく、真値と思なして方向スペクトル解析を実行したため、 $D_{mn}(f)=1$ として計算している。

方向分布関数 $G(\theta|f)$ はその定義域 $[0, 2\pi]$ で 0 以上の値をとる関数であるが、以下では正值として取り扱う。これは $G(\theta|f)$ が 0 の領域でも、限りなく 0 に近い正值であれば、物理的にはそれほど不合理ではないと思われ

ることと、後の展開の便宜のために設けた仮定である。

まず、方向分布関数 $G(\theta|f)$ の定義域 $[0, 2\pi]$ を十分大きな数 K で等分割する ($K\Delta\theta=2\pi$)。また、方向分布関数 $G(\theta|f)$ は等分割された各微小区間内では離散的な一定値関数であるとする。これは、波浪の数値シミュレーション等で周波数および方向角の異なる成分波を重ね合わせることに同じであり、分割数を大きく取れば波浪の線形性を近似する意味で妥当である。

ここで、 $G(\theta|f) > 0$ であるので、

$$\ln G(\theta_k|f) = x_k(f), \quad (k=1, \dots, K) \quad (5.22)$$

と置くと、方向分布関数は次式のように近似される。

$$G(\theta|f) = \sum_{k=1}^K \exp\{x_k(f)\} I_k(\theta) \quad (5.23)$$

ここに、

$$I_k(\theta) = \begin{cases} 1 & : (k-1)\Delta\theta \leq \theta < k\Delta\theta \\ 0 & : \text{その他} \end{cases} \quad (5.24)$$

$$(k=1, \dots, K)$$

である。式 (5.23) を式 (5.18) に代入すると、

$$\phi_i(f) = \sum_{k=1}^K \exp\{x_k(f)\} \int_0^{2\pi} H_i(f, \theta) I_k(\theta) d\theta \quad (5.25)$$

となる。右辺の積分は、 K が十分大きいとき、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} H_i(f, \theta) I_k(\theta) d\theta &= \int_{(k-1)\Delta\theta}^{k\Delta\theta} H_i(f, \theta) I_k(\theta) d\theta \\ &\approx H_i(f, \theta_k) \Delta\theta \approx \alpha_{i,k}(f) \end{aligned} \quad (5.26)$$

ここに、 $\theta_k = (2k-1)\Delta\theta/2$ 、である。

いま、 $\phi_i(f)$ および $\alpha_{i,k}(f)$ は複素数であり、取扱いが不便である。そこで、

$$\left. \begin{aligned} \phi_i &= \text{Real}\{\phi_i(f)\} \\ \phi_{N+i} &= \text{Imag}\{\phi_i(f)\} \\ \alpha_{i,k} &= \text{Real}\{\alpha_{i,k}(f)\} \\ \alpha_{N+i,k} &= \text{Imag}\{\alpha_{i,k}(f)\} \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

と分離し、すべてを実数に関する式として取り扱う。なお、式 (5.27) の左辺は周波数 f の関数であるが、省略して記述した。以後特別な場合を除き、周波数 f は便宜的に省略して扱うこととする。このとき式 (5.26) および (5.27) より、結局、式 (5.25) は次式のように表わされる。

$$\phi_i = \sum_{k=1}^K \alpha_{i,k} \exp(x_k), \quad (i=1, \dots, 2N) \quad (5.28)$$

式 (5.28) は正の未知係数 $\exp(x_k)$ を持つ0次のスプライン

表現である。より高次のスプライン表現も可能であるが、波の線形性からは自然な形の近似であり、以下ではそのまま取り扱う。

式 (5.28) を観測値にあてはめる場合、観測値には誤差が含まれるのが一般である。そこで誤差項も考慮して式 (5.28) を再記すると次式となる。

$$\phi_i = \sum_{k=1}^K \alpha_{i,k} \exp(x_k) + \varepsilon_i, \quad (i=1, \dots, 2N) \quad (5.29)$$

ここに、 ε_i ($i=1, \dots, 2N$) は互いに独立であり、平均0、未知の分散 σ^2 の正規分布に従うものとする。このとき、 ϕ_i ($i=1, \dots, 2N$) が与えられれば、 x_k ($k=1, \dots, K$)、 σ^2 に関する尤度は

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_K; \sigma^2) &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^N \\ &\times \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{2N} \left\{ \phi_i - \sum_{k=1}^K \alpha_{i,k} \exp(x_k) \right\}^2 \right] \end{aligned} \quad (5.30)$$

で与えられる。

以上の展開では方向分布関数 $G(\theta|f)$ は区分的一定値関数として近似した。この際、各微小区間ごとのエネルギーの相関については何ら考慮されていない。波の線形性からは各微小区間ごとのエネルギー分布はそれぞれ独立であると見なされるが、方向角 θ について不連続的なエネルギー分布をしているとは考えにくい。また、一般に方向分布関数は滑らかな連続関数と見なされている。したがって、方向分布関数 $G(\theta|f)$ が方向角 θ に対して滑らかであるという仮定の表現として、系列 $\{x_k\}$ が局所的には k の1次式でよく近似されるべきであると考ええる。この場合、 x_k の2次の階差

$$x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2} \quad (5.31)$$

は0に近いと想定される。すなわち、

$$\sum_{k=1}^K \{x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2}\}^2 \quad (5.32)$$

(ただし、 $x_0 = x_K$, $x_{-1} = x_{K-1}$)

を考えると、式 (5.32) の値が小さいほど方向分布関数の推定値 $\hat{G}(\theta|f)$ は滑らかになると考えられる。したがって、方向分布関数の推定値 $\hat{G}(\theta|f)$ としては、式 (5.32) をあまり大きくしない範囲で尤度、式 (5.30) の大きいものが望ましい。これを定式化すると、適当なパラメータ (超パラメータ) u^2 を用いて、

$$\ln L(x_1, \dots, x_K; \sigma^2) - \frac{u^2}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^K (x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2})^2 \quad (5.33)$$

を最大化する $(x_1, \dots, x_K)$ を求めればよい。式 (5.33) の最大化は式 (5.33) を指数とする指数関数を対象として考えるならば、

$$L(x_1, \dots, x_K; \sigma^2) \times \exp\left\{-\frac{u^2}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^K (x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2})^2\right\} \quad (5.34)$$

の最大化に他ならないことが分かる。これは式 (5.3) の関係において、 $x = (x_1, \dots, x_K)$ の事前分布として、

$$p(x|u^2, \sigma^2) = \left(\frac{u}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^K \times \exp\left\{-\frac{u^2}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^K (x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2})^2\right\} \quad (5.35)$$

を想定したことに他ならない。データが与えられたときの事後分布は、

$$p_{\text{post}}(x|u^2, \sigma^2) \propto L(x, \sigma^2) p(x|u^2, \sigma^2) \quad (5.36)$$

で与えられるから、事後分布のモードを推定値とすればよい。 u^2 を与えれば式 (5.36) を最大化する x は σ^2 に無関係に決まり、

$$\sum_{i=1}^{2N} \left\{ \phi_i - \sum_{k=1}^K \alpha_{i,k} \exp(x_k) \right\}^2 + u^2 \sum_{k=1}^K (x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2})^2 \quad (5.37)$$

を最小化することにより得られる。

u^2 の決定と σ^2 の推定は次式で表わされる ABIC (赤池のベイズ型情報量規準)

$$\text{ABIC} = -2 \ln \int L(x, \sigma^2) p(x|u^2, \sigma^2) dx \quad (5.38)$$

の最小化によればよい。

5.5 ベイズ法の数値計算法

5.4で述べた方法を用いて方向スペクトルを推定する場合、式 (5.37) の最小化および式 (5.38) の積分と最小化を実行しなければならない。しかしながら、いまの場合、それらを解析的に行うことは困難である。そこでここでは、石黒⁴²⁾あるいは坂元³¹⁾に従って以下の方法により数値計算を行うこととした。

まず、 u^2 が与えられたときに、式 (5.37) の最小化を行う方法について述べる。なお、説明の便宜上、以下では方程式をすべて行列表示して取り扱う。この場合、式 (5.37) を再記すると次式で表わされる。

$$J(x) = \|AF(x) - B\|^2 + u^2 \|Dx\|^2 \quad (5.39)$$

ここに、

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,K} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{2N,1} & \dots & \alpha_{2N,K} \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

$$B = (\phi_1, \dots, \phi_{2N})^t \quad (5.41)$$

$$F(x) = \{\exp(x_1), \dots, \exp(x_K)\}^t \quad (5.42)$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.43)$$

であり、 $\|\cdot\|$ はユークリッド・ノルムである。

式 (5.39) の右辺第 1 項は x に関して非線形である。そこでいま、 x_0 が x の推定値 $\hat{x}$ に十分近いものとして $F(x)$ を x_0 のまわりで Taylor 展開すると次式となる。

$$F(x) \doteq F(x_0) + E(x_0)(x - x_0) \quad (5.44)$$

ここに、

$$E(x) = \begin{pmatrix} \exp(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \exp(x_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \exp(x_K) \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

である。

式 (5.44) を式 (5.39) に代入して整理すると、

$$J(x) = \|\tilde{A}x - \tilde{B}\|^2 + u^2 \|Dx\|^2 \quad (5.46)$$

ここに、

$$\tilde{A} = AE(x_0) \quad (5.47)$$

$$\tilde{B} = B - AF(x_0) + AE(x_0)x_0 \quad (5.48)$$

である。

したがって、適当な初期値 x_0 が与えられると、式 (5.46) ~ 式 (5.48) をもとに最小自乗法により、 x_1 が算出される。次に x_1 を式 (5.46) ~ 式 (5.48) の x_0 に置

き換えて、 x_2 を算出する。この演算を繰り返し、適当な収束条件を満たす解 $\hat{x}$ を求め、これを与えられた u^2 に対する推定値 $\hat{x}$ とする。

なお、ここでは最小自乗法の解法として、後に示す理由により Householder 法³⁰⁾を用いて計算した。これは以下のように行われる。

式 (5.46) を書き換えると、

$$J(x) = \left\| \begin{pmatrix} \tilde{A} \\ uD \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} \tilde{B} \\ O \end{pmatrix} \right\|^2 \quad (5.49)$$

である。したがって、

$$Z = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline uD & O \end{array} \right) \begin{array}{l} \xrightarrow{2N} \\ \xrightarrow{K} \end{array} \quad (5.50)$$

において、Householder 変換 (鏡映変換を繰り返して任意の行列を上三角行列に変換する方法) を適用する。なお、鏡映変換は次式で表わされる。

$$U = I - 2ww^t \quad (5.51)$$

$$w = \frac{a-b}{|a-b|} \quad (5.52)$$

ここに、 I は単位行列、 a は任意ベクトル、 b は a の鏡映変換後のベクトルである。

Householder 変換によって、

$$UZ = \left(\begin{array}{c|c} S_{1,1} & \dots & S_{1,K+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & & S_{K+1,K+1} \end{array} \right) \quad (5.53)$$

が得られたものとする。このとき、

$$\begin{aligned} & \left\| U \begin{pmatrix} \tilde{A} \\ uD \end{pmatrix} x - U \begin{pmatrix} \tilde{B} \\ O \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= \left\| \begin{pmatrix} S_{1,1} & \dots & S_{1,K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & & S_{K,K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_K \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} S_{1,K+1} \\ \vdots \\ S_{K,K+1} \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= \left\| \begin{pmatrix} S_{1,1} & \dots & S_{1,K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & & S_{K,K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_K \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} S_{1,K+1} \\ \vdots \\ S_{K,K+1} \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &+ S_{K+1,K+1}^2 \end{aligned} \quad (5.54)$$

であり、右辺第2項は x と無関係な定数であることから、式 (5.46) あるいは式 (5.49) の最小自乗推定値 $\hat{x}$ は、

$$\begin{pmatrix} S_{1,1} & \dots & S_{1,K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & & S_{K,K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{1,K+1} \\ \vdots \\ S_{K,K+1} \end{pmatrix} \quad (5.55)$$

の解として容易に求められる。また、残差分散は、

$$S_{K+1,K+1}^2/(2N) \quad (5.56)$$

で与えられる。

次に、式 (5.38) の計算方法および σ^2 の推定方法について述べる。 u^2 が与えられた場合には、前記の方法により x の推定値 $\hat{x}$ が求められる。このときに算出した $\tilde{A}$ 、 $\tilde{B}$ を $\hat{A}$ 、 $\hat{B}$ で表わすと、事後分布は

$$\begin{aligned} & L(x, \sigma^2) p(x|u^2, \sigma^2) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^N \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \|\hat{A}x - \hat{B}\|^2 \right\} \\ &\quad \times \left(\frac{u}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^K \exp \left\{ -\frac{u^2}{2\sigma^2} \|Dx\|^2 \right\} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^N \left(\frac{u}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^K \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left\| \begin{pmatrix} \hat{A} \\ uD \end{pmatrix} \hat{x} - \begin{pmatrix} \hat{B} \\ O \end{pmatrix} \right\|^2 \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left\| \begin{pmatrix} \hat{A} \\ uD \end{pmatrix} (x - \hat{x}) \right\|^2 \right\} \end{aligned} \quad (5.57)$$

である。したがって、その積分は、

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} L(x, \sigma^2) p(x|u^2, \sigma^2) dx \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^N \left(\frac{u}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^K \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left\| \begin{pmatrix} \hat{A} \\ uD \end{pmatrix} \hat{x} - \begin{pmatrix} \hat{B} \\ O \end{pmatrix} \right\|^2 \right\} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left\| \begin{pmatrix} \hat{A} \\ uD \end{pmatrix} (x - \hat{x}) \right\|^2 \right\} dx \end{aligned} \quad (5.58)$$

となる。ここで、積分公式³¹⁾

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left\| \begin{pmatrix} \hat{A} \\ uD \end{pmatrix} (x - \hat{x}) \right\|^2 \right\} dx \\ &= (\sqrt{2\pi}\sigma)^K \{ \det(\hat{A}'\hat{A} + u^2 D'D) \}^{-1/2} \end{aligned} \quad (5.59)$$

を用いると、式 (5.58) の積分は

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} L(x, \sigma^2) p(x|u^2, \sigma^2) dx \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^N u^K \\ & \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\|\hat{A}\hat{x} - \hat{B}\|^2 + u^2 \|D\hat{x}\|^2) \right\} \\ & \times \{\det(\hat{A}'\hat{A} + u^2 D'D)\}^{-1/2} \end{aligned} \quad (5.60)$$

で与えられる。したがって ABIC は,

$$\begin{aligned} \text{ABIC} &= -2 \ln \int_{-\infty}^{\infty} L(x, \sigma^2) p(x|u^2, \sigma^2) dx \\ &= 2N \ln(2\pi\sigma^2) - K \ln(u^2) \\ &+ \frac{1}{\sigma^2} (\|\hat{A}\hat{x} - \hat{B}\|^2 + u^2 \|D\hat{x}\|^2) \\ &+ \ln\{\det(\hat{A}'\hat{A} + u^2 D'D)\} \end{aligned} \quad (5.61)$$

となる。ABIC を最小化する σ^2 の推定値は上式を σ^2 で微分して 0 とおくと,

$$\frac{\partial(\text{ABIC})}{\partial\sigma^2} = \frac{2N}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^4} (\|\hat{A}\hat{x} - \hat{B}\|^2 + u^2 \|D\hat{x}\|^2) = 0 \quad (5.62)$$

より,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2N} (\|\hat{A}\hat{x} - \hat{B}\|^2 + u^2 \|D\hat{x}\|^2) \quad (5.63)$$

で与えられる。したがって, ABIC は最終的に次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \text{ABIC} &= 2N \ln(2\pi) + 2N + 2N \ln(\hat{\sigma}^2) \\ &- K \ln(u^2) + \ln\{\det(\hat{A}'\hat{A} + u^2 D'D)\} \end{aligned} \quad (5.64)$$

なお, 式 (5.64) 中の $\hat{\sigma}^2$ は式 (5.63) より計算されるが, これは式 (5.56) で与えられる残差分散であり, Householder 法により得られた結果を用いれば容易に求められる。

また, 式 (5.64) の右辺第 5 項では, 行列式の計算を行う必要がある。しかしながら, 後に示す数値シミュレーション例では, 式 (5.64) 中の行列式は一般に非常に小さな値となることが多く, ガウスの消去法などを用いて行列式を算出した後に, 式 (5.64) に従って対数計算を行うと, 通常の場合には計算機のアンダーフローのために ABIC は計算不能となる。したがって, ABIC の計算に必要な行列式の値は Householder 法の結果を用いて次の関係式により算出した。

$$\det(\hat{A}'\hat{A} + u^2 D'D) = \prod_{i=1}^K S_{i,i}^2 \quad (5.65)$$

ここに, $S_{i,i}$ は式 (5.53) に示す行列の対角成分である。

ただし, 式 (5.65) の乗積を計算して対数をとれば, やはりアンダーフローが生じるので, ここでは,

$$\ln\{\det(\hat{A}'\hat{A} + u^2 D'D)\} = \sum_{i=1}^K \ln S_{i,i}^2 \quad (5.66)$$

として, アンダーフローが生じないようにして計算を行った。

最後に, u^2 の決定法について述べる。 u^2 の決定は正確には式 (5.64) の ABIC を最小にする非線形最適化によるなければならない。しかしながら, いまの場合, これは困難であり, また u^2 の推定を目的にする限り式 (5.64) を厳密に最小にする必要はない¹¹⁾。したがって, ここでは, u の与え方として格子探索法を用いることとし,

$$u = ab^m, \quad (m=1, 2, \dots) \quad (5.67)$$

として, a, b に適当な値を代入し, m を変えることにより, 種々の u の値を用いて上記の計算を実施した。

以上の数値計算法をまとめると, 以下のようになる。

- ① 適当な u および x の初期値 x_0 を与えて, 式 (5.46) により, 与えられた u に対応する x の推定値 $\bar{x}$ を算定する。
- ② ①で得られた結果を用いて, 式 (5.64) により, 与えられた u に対応する ABIC を算出する。
- ③ u の値を種々に変えて, ①, ②の計算を繰り返す。
- ④ ①~③の計算結果の内, 最小の ABIC を与える $\bar{u}^2$, $\hat{\sigma}^2$ および $\bar{x}$ を最適な推定値とする。

5.6 ベイズ法の数値シミュレーションによる検討

数値シミュレーション法を利用して, ベイズ型モデルを用いた方向スペクトル推定法の推定精度や適用性, 有効性などを検討した。

(1) 数値シミュレーション法

方向スペクトルはパワースペクトルと方向分布関数の積で表わされることから (式 (2.20)), ここでは任意の周波数 f に着目したとして, 方向角 θ に関する分布 (方向分布関数) のみについて検討した。数値シミュレーションの具体的な手順は以下の通りである¹¹⁾。

- ① 方向分布関数として式 (2.34) を用い, 次式のように与える。

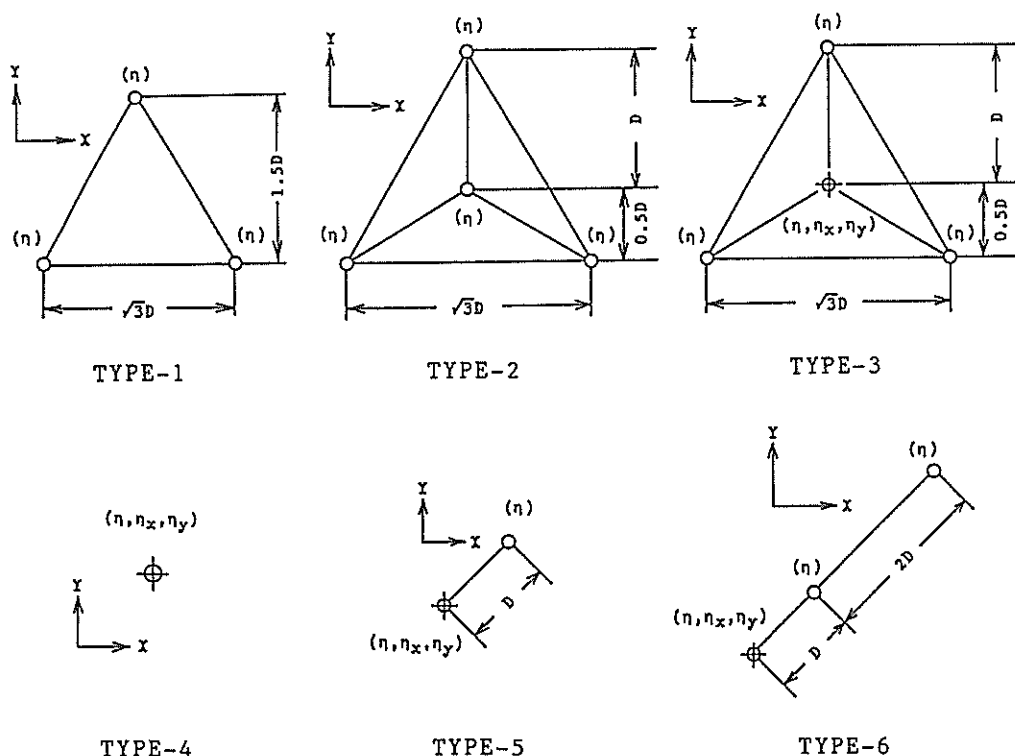
$$G(\theta) = \sum_i \alpha_i \cos^{2s_i} \left(\frac{\theta - \theta_i}{2} \right) \quad (5.68)$$

二つの波群から構成されるような双峰型の方向分布

関数を対象とする場合には、式 (5.68) の α_i , S_i , θ_i の値を変えた 2 種類の方向分布関数を重ね合わせて与えることとする。なお、 α_i は式 (5.68) が式 (2.21) の正規化条件を満足するように決められる。

- ② 上記①で与えた方向分布関数をもとに、式 (3.5) によりクロススペクトルを計算する。クロススペクトルに推定誤差を考慮する場合には、クロススペクトルの実部と虚部に、平均 0、標準偏差 σ_R (実部)、 σ_I (虚部) の正規乱数を付加することとした。なお、標準偏差 σ_R , σ_I は、それぞれクロススペクトルの実部と虚部の絶対値を定数倍 (0.0025, 0.01, ……、0.16) したものをを用いている。
- ③ 上記②で得られたクロススペクトルをもとに、5.5 で述べた方法により方向分布関数の推定を行い、真の方向分布関数、すなわち式 (5.68) で与えられる方向分布関数と比較する。なお、ここでは任意の波動量の組み合わせにベイズ型モデルを用いた方向スペクトル推定法を適用し、その推定精度や適用性、有効性を明らかにすることを目的としており、既往の方向スペクトル推定法との比較のためには任意の波動量に適用可能な EMLM を用いることとした。

なお、数値シミュレーション法としては、ここに示した方法以外にも、与えられた方向スペクトルから水面変動や水面勾配などに対応する不規則信号を発生させて、クロススペクトルを計算し、これをもとに方向スペクトルを推定する方法もある。しかしながら、この場合、各波動量の時系列データが有限長である影響のため、クロススペクトル推定値の母集団からのズレの効果が入り、これがクロススペクトルの推定誤差の一因となる。実際に観測された複数の時系列データをもとに方向スペクトルを推定する場合にも、上記の問題点は必然的に発生する。したがって、現実にはクロススペクトルの推定誤差 0 はありえないが、ここでは与えられたクロススペクトルに対するベイズ法の推定精度や特性などを検討することが主目的であるため、上記①～③に示した方法により、数値シミュレーションを実施した。なお、時系列データからクロススペクトルを推定する場合、各クロススペクトルの推定誤差は互いに関連を持つが、②に示した誤差の付加方法ではこれは考慮されていない。したがって、②は現実的な誤差の混入を考慮したものではないことを付記しておく。



図—5.1 数値シミュレーションに用いたアレイ配置

(○は観測機器の設置位置を示し、 η は水面変動、 η_x は x 軸方向の水面勾配、 η_y は y 軸方向の水面勾配を計測することを意味している)

表-5.1 数値シミュレーションに用いた波浪条件

Case-1~9	Case-10~18	Case-19~27	Case-28~36	Case-37~45	Case-46~54
一方向波浪	二方向波浪				
	$S_1=10$ $S_2=100$ $\alpha_1/\alpha_2=1.0$	$S_1=10$ $S_2=100$ $\alpha_1/\alpha_2=2.0$	$S_1=10$ $S_2=100$ $\alpha_1/\alpha_2=0.5$	$S_1=100$ $S_2=100$ $\alpha_1/\alpha_2=1.0$	$S_1=100$ $S_2=100$ $\alpha_1/\alpha_2=2.0$
$S=1$	$\Delta\theta=20^\circ$				
$S=2$	$\Delta\theta=40^\circ$				
$S=5$	$\Delta\theta=60^\circ$				
$S=10$	$\Delta\theta=80^\circ$				
$S=20$	$\Delta\theta=100^\circ$				
$S=40$	$\Delta\theta=120^\circ$				
$S=60$	$\Delta\theta=140^\circ$				
$S=80$	$\Delta\theta=160^\circ$				
$S=100$	$\Delta\theta=180^\circ$				

(2) 数値シミュレーションの諸条件の設定

ベイズ型モデルを用いた方向スペクトル推定法の諸特性を検討するために、図-5.1に示す6種類のアレイ配置を対象として、表-5.1に示す54種類の波浪条件を用いて数値シミュレーションを実施した。なお、図-5.1中の η は水位変動を、 η_x 、 η_y はそれぞれ x 軸方向および y 軸方向の水面勾配を計測することを示している。表-5.1中の S は波のエネルギーの方向集中度を表わすパラメータであり、そのうち特に $S=10$ は風波を、 $S=100$ はうねりを想定して与えたものである。また、 $\Delta\theta$ は二つの波群の平均的な伝播方向のなす角度を示している。

ベイズ型モデルを用いた方向スペクトル推定法の数値計算に際しては、式(5.46)の繰り返し計算を実施する必要がある。ここでは x の初期値 x_0 として、特別な場合を除いては、

$$x_i = \ln \frac{1}{2\pi}, \quad (i=1, \dots, K) \quad (5.69)$$

を初期値として数値計算を実施した。また、式(5.46)の繰り返し計算の収束規準としては、 $n-1$ ステップ目の推定値 x_{n-1} と n ステップ目の推定値 x_n の差の標準偏差 σ_{en} が、

$$|\sigma_{en}| \leq 10^{-3} \quad (5.70)$$

となったときに収束したと見なして推定値を算出した。通常の場合、収束計算の収束規準としては、 $|\sigma_{en}| \leq 10^{-6} \sim 10^{-8}$ を収束の規準として選ぶことが多いが、 $|\sigma_{en}| \leq 10^{-3}$ 程度で得られた推定値を用いた場合でも推定精度

はかなり良いこと、および計算時間の節約を考慮して上記の規準を採用した。

なお、式(5.46)の繰り返し計算を実施する場合、上記の方法では必ずしも推定値が収束しない場合があり得る。そこで収束計算に以下の処理を付加して数値計算を実施した。

- ① $n-1$ ステップ目の推定値 x_{n-1} と n ステップ目の推定値 x_n の差の標準偏差 σ_{en} がいったん最小値を示し、その後変動して式(5.70)の条件をなかなか満たさない場合には、最小値を示すステップからさらに3~5ステップ計算し、 σ_{en} がさらに小さくならない場合に、それまでの繰り返し計算の内で、差の標準偏差 σ_{en} がいちばん小さい時の x の推定値を参考値として採用する。
- ② $n-1$ ステップ目の推定値 x_{n-1} と n ステップ目の推定値 x_n の差の標準偏差 σ_{en} と、次のステップで算出された差の標準偏差 σ_{en+1} を比較し、 $\sigma_{en+1} > 10\sigma_{en}$ となった場合には、ただちに計算を打ち切り、それまでの繰り返し計算の内で、差の標準偏差 σ_{en} がいちばん小さい場合の x の推定値を参考値として採用する。
- ③ 100回の繰り返し計算を実施しても推定値が収束しない場合には、推定値が収束しないものとして計算をその段階で止め、それまでの繰り返し計算の内で、差の標準偏差 σ_{en} がいちばん小さいときの x の推定値を参考値として採用する。

超パラメータ u の設定に際しては、事前に種々の試算を実施し、クロススペクトルに誤差を考慮しない場合には、式(5.67)中の a 、 b 、 m として、

$$a=0.2, b=0.5, m=1\sim 20 \quad (5.71)$$

を与えて格子探索法を実施した。また、クロススペクトルに誤差を考慮する場合には、

$$a=5.2, b=0.5, m=1\sim 20 \quad (5.72)$$

として格子探索法を実施した。

なお、上記では $m=1\sim 20$ としているが、いったん ABIC が最小値を示し、その後、増大する場合には、その段階で計算を打ち切ることとした。また、 $m=1\sim 20$ の範囲で、初期の段階では推定値は式 (5.70) の規準で収束するが、その後、収束しないケースが現われる場合には、その段階で計算を終了し、収束したケースの内 ABIC が最小となる u を見つけ、これを最適な $\hat{u}$ として採用した。全ての u に対して式 (5.70) の規準で推定値が収束しない場合には、参考値として ABIC が最小となる u を最適な $\hat{u}$ として採用した。

(3) 数値シミュレーション結果の検討

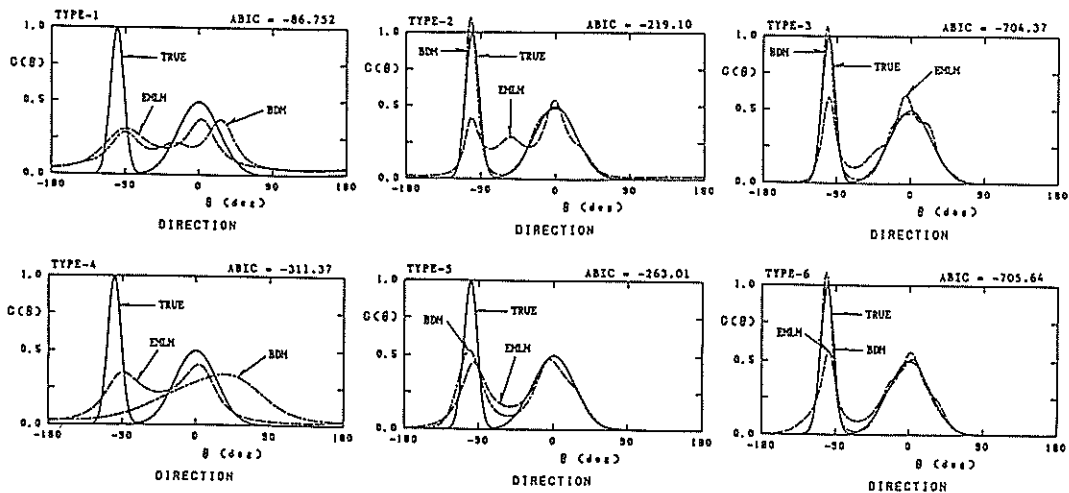
1) 観測アレイの相違による方向スペクトルの推定精度に関する検討

図—5.2は図—5.1に示した6種類のアレイ配置を対象として、同一の波浪条件のもとに数値シミュレーションを実施した結果である。波浪条件としては、 $\theta_1=0^\circ$ の方向から $S_1=10$ の風波が、 $\theta_2=-100^\circ$ の方向から $S_2=100$ のうねりが来襲する状況を示したものであり、2つの波群のエネルギーピーク値の比が $\alpha_1/\alpha_2=0.5$ のものである。

また、波高計間距離 D と波長 L の比 D/L を $D/L=0.2$ として与えている。なお、図—5.2中の TRUE は数値シミュレーションで与えた真の方向分布関数を示しており、BDM はベイズ法により推定された方向分布関数を示している。また、図—5.2の縦軸は真の方向分布関数のピーク値で正規化して描いている。

TYPE—1～TYPE—3を比べると、図—5.2に見られるように、観測波動量の増大とともに BDM および EMLM の推定精度は向上している。特に、TYPE—2、TYPE—3では、BDM はほとんど TRUE に一致する推定結果となっており、TYPE—3では TYPE—2よりもやや推定精度が向上している。なお、3つの観測波動量から構成される TYPE—1では、EMLM は BDM よりも TRUE に近い推定値を示しているものの、TYPE—2ではピークが3つ現われるなどの不合理が生じている。また、EMLM は TYPE—3では TYPE—2で見られた欠点は解消されているものの、BDM に比べて推定精度は劣っている。いずれにせよ、4つ以上の観測波動量から構成される TYPE—2、TYPE—3では、BDM は EMLM に比べて、優れた分解能を示している。

TYPE—4～TYPE—6を比べると、観測波動量の増大とともに、BDM および EMLM のいずれの方法も推定精度は向上している。この内、TYPE—5と TYPE—6では BDM は EMLM に比べて、TRUE に近い推定値を示しており、特に TYPE—6ではほとんど TRUE と一致する推定値を示している。しかしながら、TYPE—1で見られたのと同様に、3つの観測波動量から構成される TYPE—4では、BDM は TRUE とはかなり異なる推定



図—5.2 アレイ配置の相違による方向分布関数の推定値の特性

(図—5.1に示す6種類のアレイ配置を対象として同一条件下でベイズ法 (BDM) および拡張最尤法 (EMLM) により方向分布関数を推定した結果を表示)

値を示しており、EMLM よりも推定精度が劣っている。

TYPE-1およびTYPE-4で、BDM がTRUE とかなり異なる推定値を示す原因は、3つの観測波動量から二方向波浪の方向スペクトルを推定する場合には、確率的な構造を持つ統計モデルを想定しにくいことに原因があるものと思われる。すなわち、前に述べたように3つの独立な波動量は方向スペクトルを特定するための必要最小限のデータであり、また、方向スペクトルの推定において、クロススペクトルの誤差そのものを評価しにくい波動量の組み合わせでもある。3つの観測波動量を用いて、一方向波浪を対象とした別の試算によれば、BDM で推定された方向分布関数はほぼ妥当な推定値を示しており、ここで示したように二方向波浪に対してBDM がEMLM よりも推定精度が劣る原因は、二方向波浪が持つ未知要素の大きさと3つの観測波動量から得られる制約条件式(5.18)の数とのバランスにより、確率的な構造を持つ統計モデルを想定し得なくなることに起因しているものと思われる。すなわち、式(5.29)で導入したクロススペクトルの推定誤差を評価することにより、逆に、3つの観測波動量から二方向波浪を識別し得なくなったものと思われる。なお、第4章で述べた最大エント

ロピー原理法(MEP)を用いた数値シミュレーション例では、 $\Delta\theta > 90^\circ$ の場合には二方向波浪を識別し得た。これは最大エントロピー原理法の定式化に際しては、クロススペクトルの推定誤差を考慮せずに、したがって、確率的な構造を持つ統計モデルを想定していないために、二方向波浪を識別し得たものと思われる。

このように、3つの観測波動量から二方向波浪の方向スペクトルを推定する場合にはBDM は適用できず、他の方法によらなければならない。しかしながら、TYPE-2とTYPE-3あるいはTYPE-5とTYPE-6に見られるように、4つ以上の観測波動量から二方向波浪の方向スペクトルを推定する場合には、BDM は他の方法に比べて優れた方向スペクトル推定法であると言える。

なお、TYPE-2およびTYPE-5は、ともに4つの観測波動量から方向分布関数を推定した結果であるが、アレイ配置によってBDM の推定精度はかなり異なっている。これはTYPE-2のアレイ配置がTYPE-5のアレイ配置に比べて、対象とする方向分布関数を推定するのに優れた配置であるためである。このように、BDM は他の推定法と同様に、アレイ配置の影響を受けるものの、その程度はDFT法やEMLM よりも小さいようである。

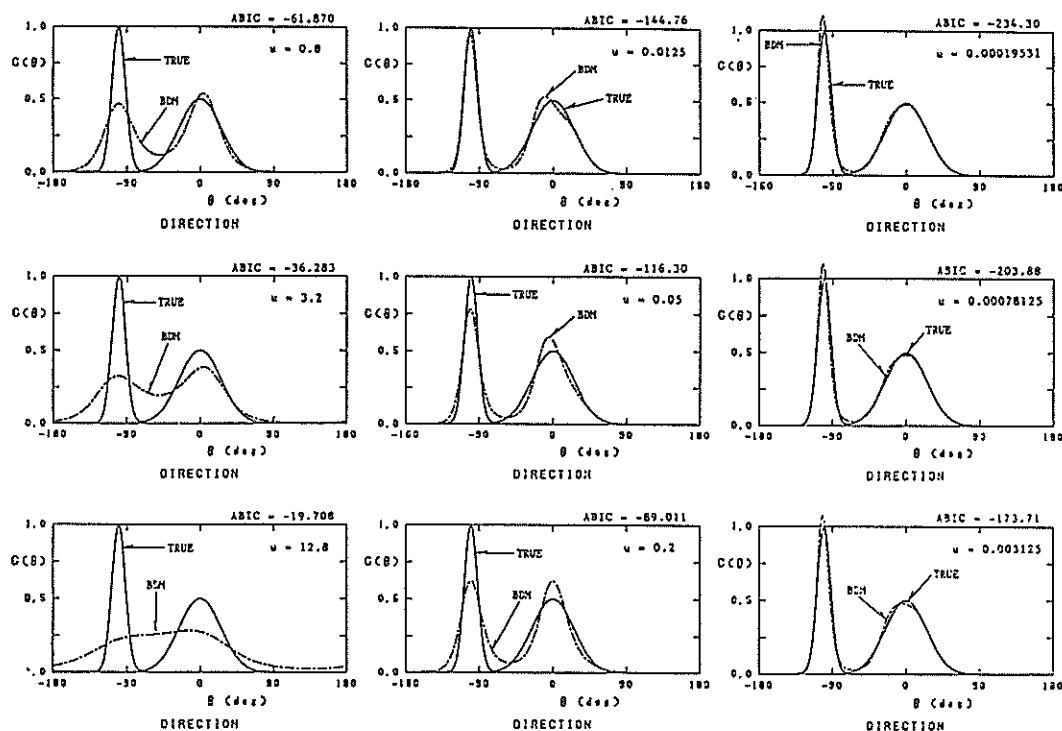


図-5.3 超パラメータ u と方向分布関数の推定値および ABIC との関係
(星型アレイ配置を対象として、種々の超パラメータ u を用いた場合のベイズ法(BDM)の推定精度の相違を表示。また、ABICの値を併記している)

いずれにせよ、BDM を適用する際にも、合田¹⁾により議論されているような最適なアレイ配置で観測することが望ましい。

2) ハイパー・パラメータと方向スペクトル推定値との関係

図—5.3は図—5.1に示した TYPE—2のアレイ配置を対象として、 $D/L=0.2$ とし、式 (5.33) で導入した超パラメータ u とそれに対応する方向分布関数の推定精度の関係、および式 (5.64) で定義される ABIC の値の大小による方向分布関数の推定精度の関係を示したものである。図—5.3に示されるように u を $u=12.8$ から $u=0.00019531$ へと減少させるにつれて、BDM により推定される方向分布関数は平坦な形状から尖鋭な形状に変化して行く。また、図中の右肩に示した ABIC の値を見ると u の減少とともに ABIC の値は減少し、BDM による推定値は TRUE に近づいて行く。なお、本計算例では $u=0.00019531$ よりも小さい u の値を設定した場合、式 (5.46) は式 (5.70) の条件での収束解は得られなかった。したがって、この場合には $ABIC=-234.30$ が最小 ABIC、すなわち、 $u=0.00019531$ が最適な u の推定値となる。図—5.3を見ても明らかなように、この場合の BDM は最も TRUE に近く、ABIC 最小化法によるベイズ型モデルの選択は妥当な推定値を選択し得ることが示されている。

3) 方向スペクトル形状の相違による方向スペクトルの推定精度に関する検討

図—5.4(a)~(f)は図—5.1に示した TYPE—2のアレイ配置を用いて、 $D/L=0.2$ とし、表—5.1に示した54種類の波浪条件について方向分布関数を推定した結果を示したものである。図—5.4(a)は一方方向波浪を、図—5.4(b)~(f)は二方向波浪の数値シミュレーション結果である。図—5.4(a)に示されるように、 $S=1$ あるいは $S=2$ の場合のように、幅広いエネルギー分布を推定の対象とする場合には、EMLM により推定される方向分布関数は、アレイの配置と対象とする波浪の波長に依存して、図に見られるような振動が発生する。しかしながら、BDM はほぼ妥当な推定値を推定し得るようである。また、図—5.4(b)~(f)に示される二方向波浪の例では、EMLM により推定される方向分布関数は、波浪条件によってはエネルギーピークが3つ現われるなどの不合理が生じている。あるいはまた、本来エネルギーが存在していない領域にもエネルギーが存在するなどの不合理が生じている。これらの影響のために、EMLM により推定される方向分布関数

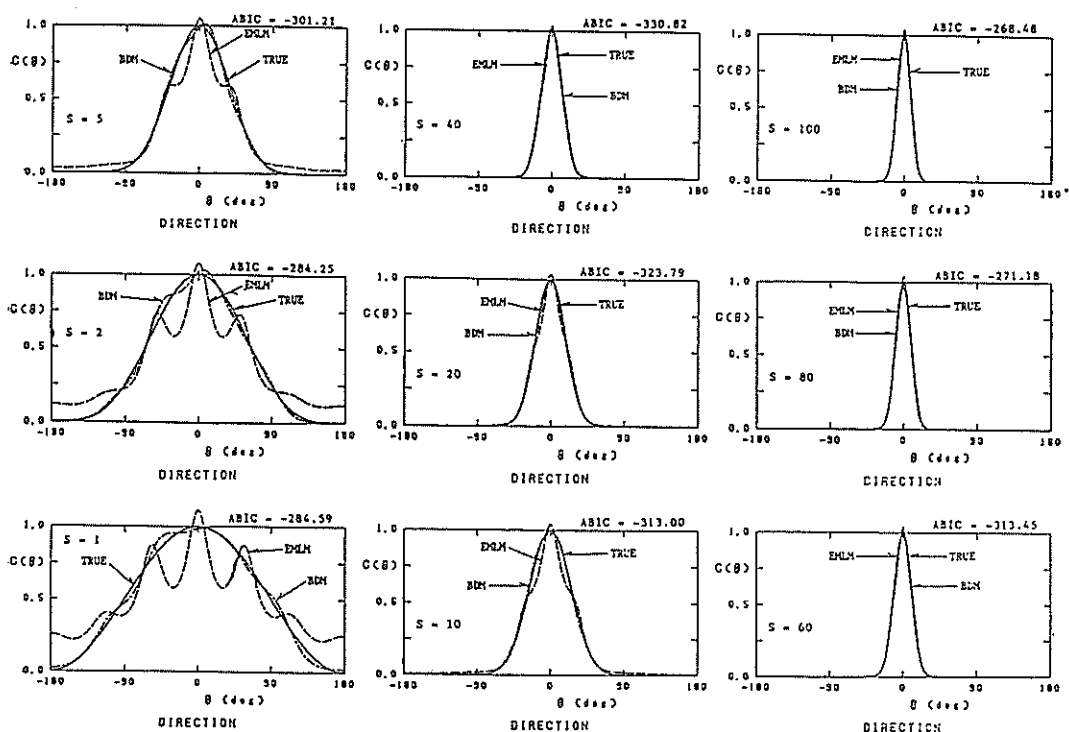
は、エネルギーピークの近傍で低めのエネルギーを推定する傾向が現われている。

一方、BDM により推定される方向分布関数は、二方向波浪のいずれの条件に対しても極めて TRUE に近い推定値を示している。以上のことから、図—5.1の TYPE—2のアレイ配置のもとでは、ここに示した以外のどのような二方向波浪に対しても、BDM は極めて優れた推定精度で方向スペクトルを推定し得るものと期待される。なお、図—5.4(d)および図—5.4(f)中の ABIC の右肩に*が付してあるものは、式 (5.46) が式 (5.70) の条件で収束しなかった計算例である。この場合、5.6で述べた条件で数値計算を打ち切り、参考値として方向分布関数を示したものであるが、この場合でも BDM は極めて妥当な推定値を推定し得ている。解の収束性と推定精度および ABIC の値との関係については、今後、より詳細に検討する必要がある。

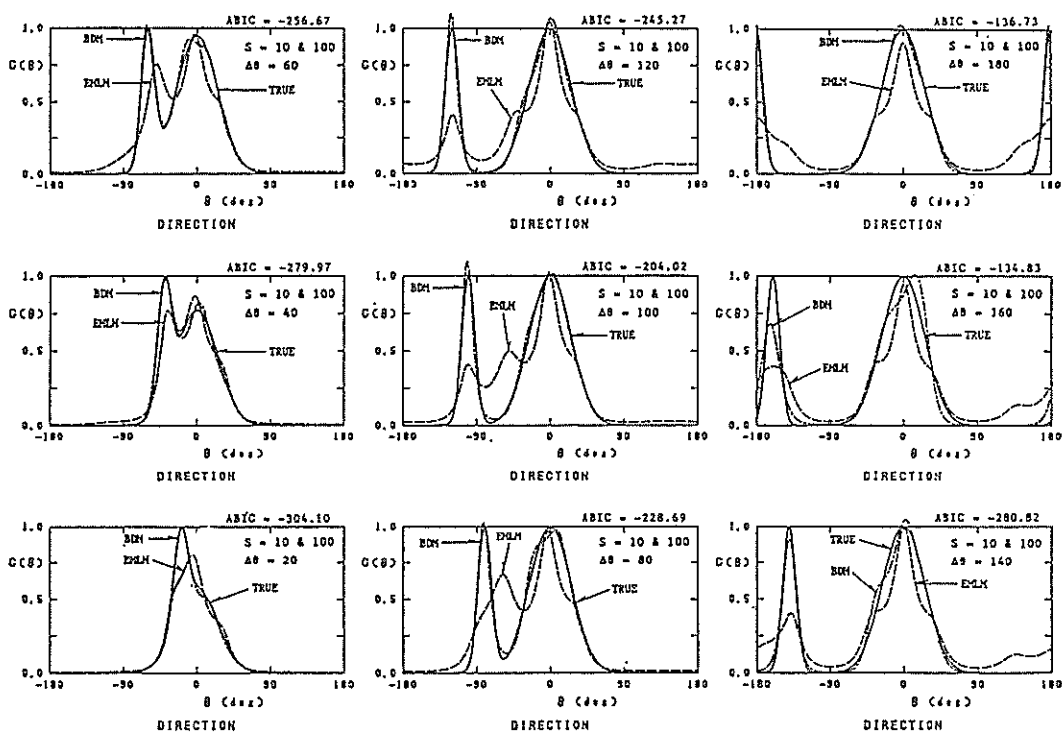
4) クロススペクトルの誤差と方向スペクトルの推定精度

図—5.5はクロススペクトルに誤差を付加した場合の方向スペクトルの推定結果を示したものである。誤差の付加方法としては各々のクロススペクトルに単純に正規乱数を付加する方式を採用した。ここでは前例と同様に、図—5.1の TYPE—2のアレイ配置を対象として解析した。図中に示す $r=(0.05)^2$, $(0.1)^2$, ……はノイズ付加率を示しており、クロススペクトルの実部および虚部のそれぞれの絶対値を r 倍した値を標準偏差 σ_R (実部), σ_I (虚部) とする平均 0 の正規乱数を付加した。 $r=(0.05)^2$ のように 2 乗の形式で記載しているのは、パワースペクトルあるいはクロススペクトルが、波動量の振幅の 2 乗に比例することを考慮したものである。なお、ここでは 4 つの波動量のすべてに同じ比率でノイズを付加しており、極めて厳しい条件でノイズの混入による推定精度の影響を検討していることになる。当然のことながら、ノイズ付加率の増加とともに、方向スペクトルに関する情報はノイズの中に埋もれて行く。この影響のため、図—5.5に見られるように、BDM で推定される方向分布関数は r の増加とともに徐々に平坦な方向分布関数に推移して行く。しかしながら、BDM で推定される 2 つのエネルギーピークの位置は、ノイズ付加率をかなり増加させても、ほぼ妥当な位置に推定されており、BDM による方向スペクトル推定法はノイズの混入に対しても安定した推定法であると言える。

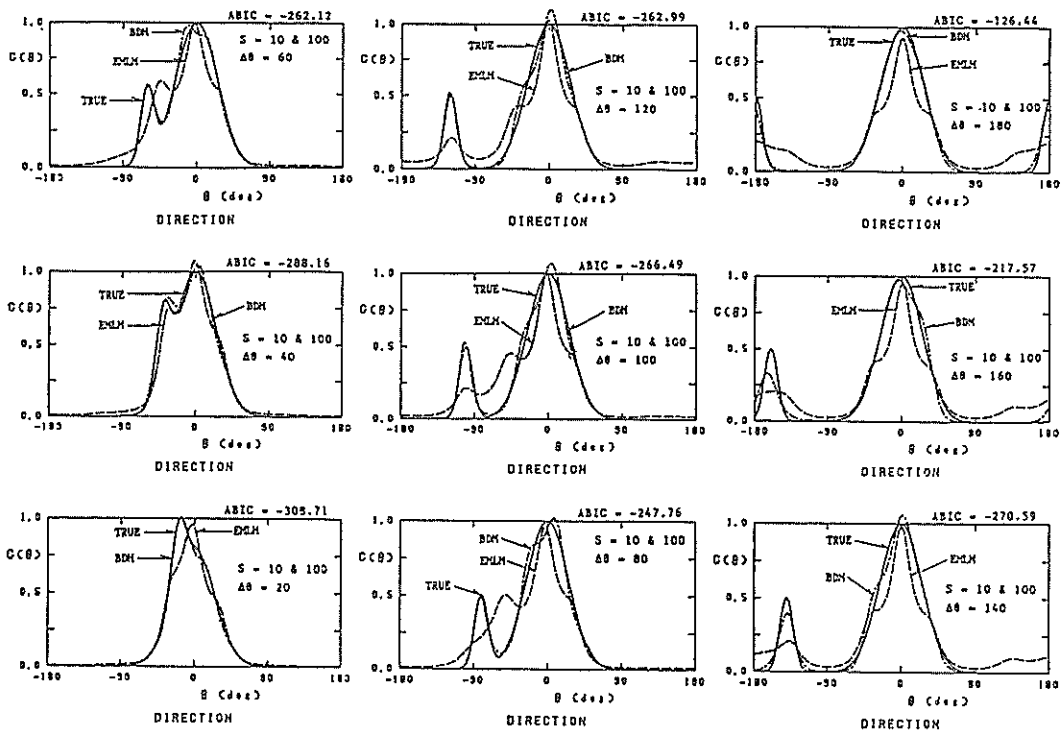
一方、EMLM を見ると、ノイズの混入具合により推定値が無限大に発散したり、負値が現われるなどの不合理



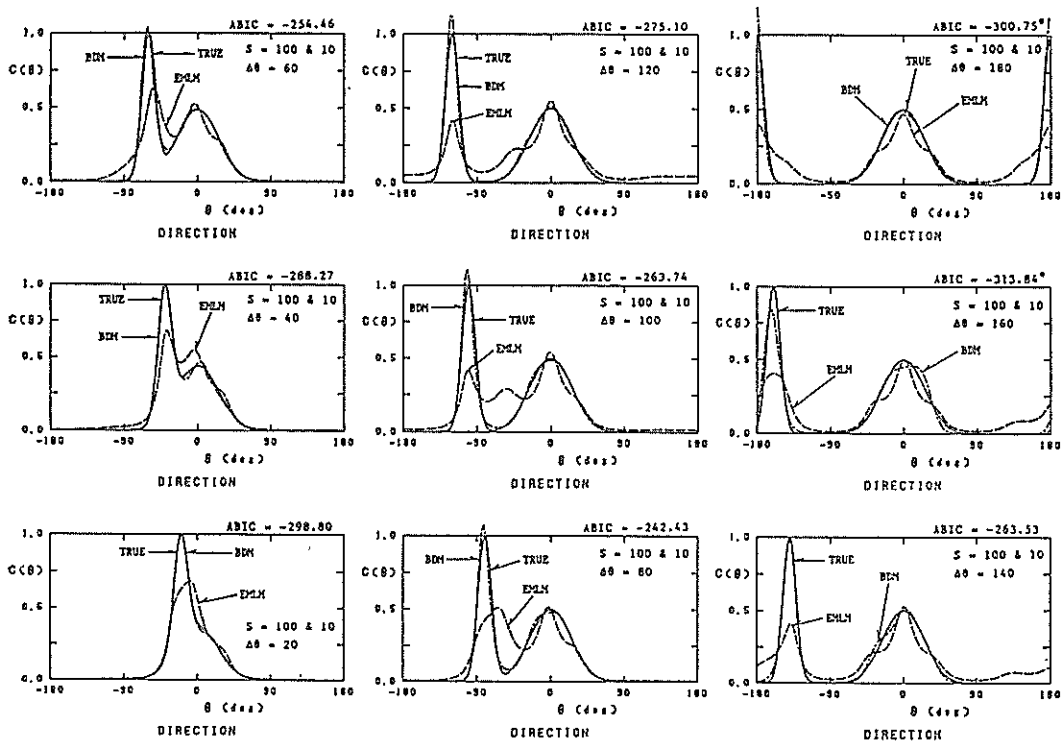
図—5.4(a) 数値シミュレーションによる BDM と EMLM の推定精度の比較
(星型アレイ配置を対象として、表—5.1に示す Case—1～Case—9 の一方向波浪の条件のもとに BDM と EMLM の方向分布関数の推定結果を比較)



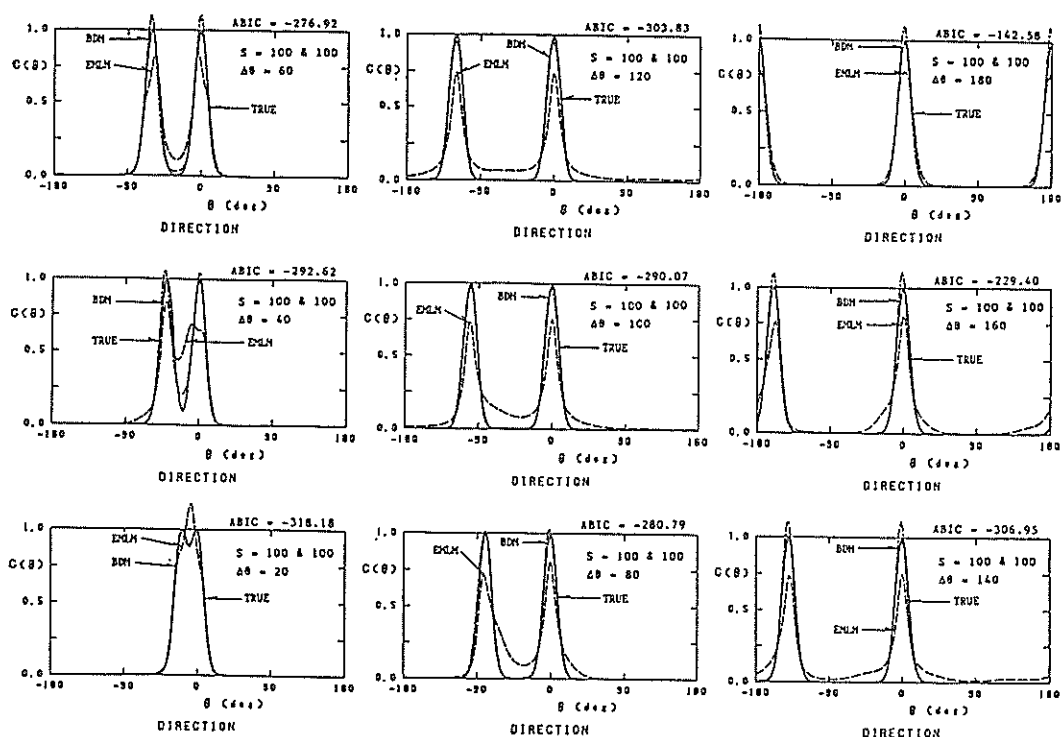
図—5.4(b) 数値シミュレーションによる BDM と EMLM の推定精度の比較
(星型アレイ配置を対象として、表—5.1に示す Case—10～Case—18 の二方向波浪の条件のもとに BDM と EMLM の方向分布関数の推定結果を比較)



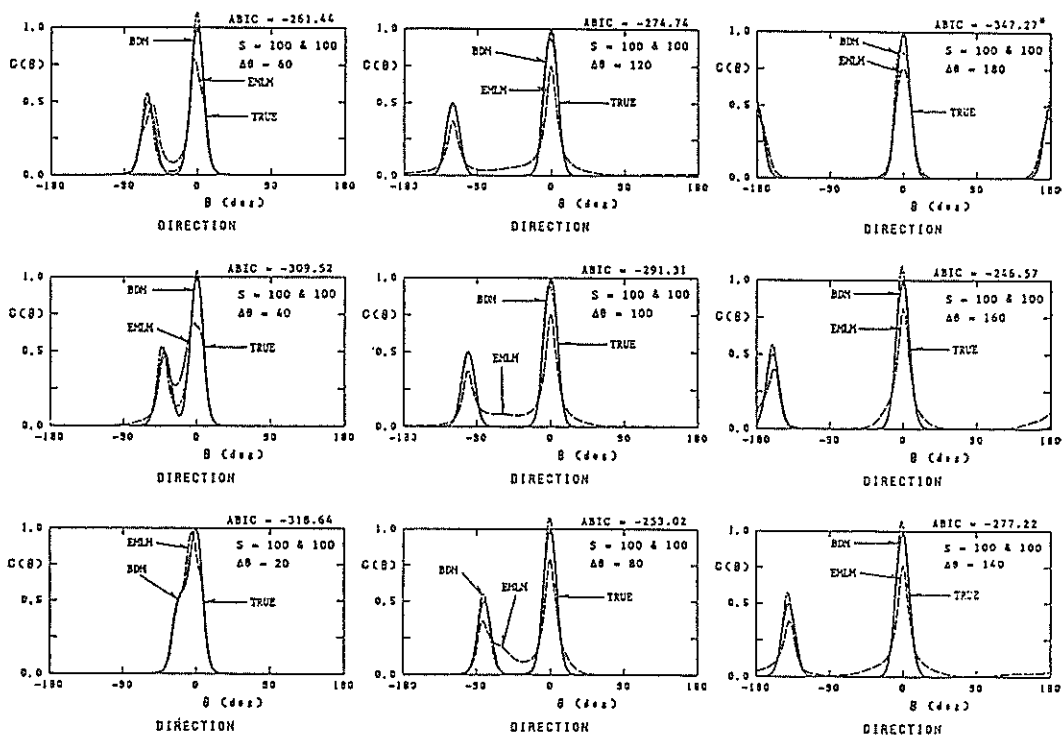
図—5.4(c) 数値シミュレーションによる BDM と EMLM の推定精度の比較
(星型アレイ配置を対象として、表—5.1に示す Case—19～Case—27の二方向波浪の条件のもとに BDM と EMLM の方向分布関数の推定結果を比較)



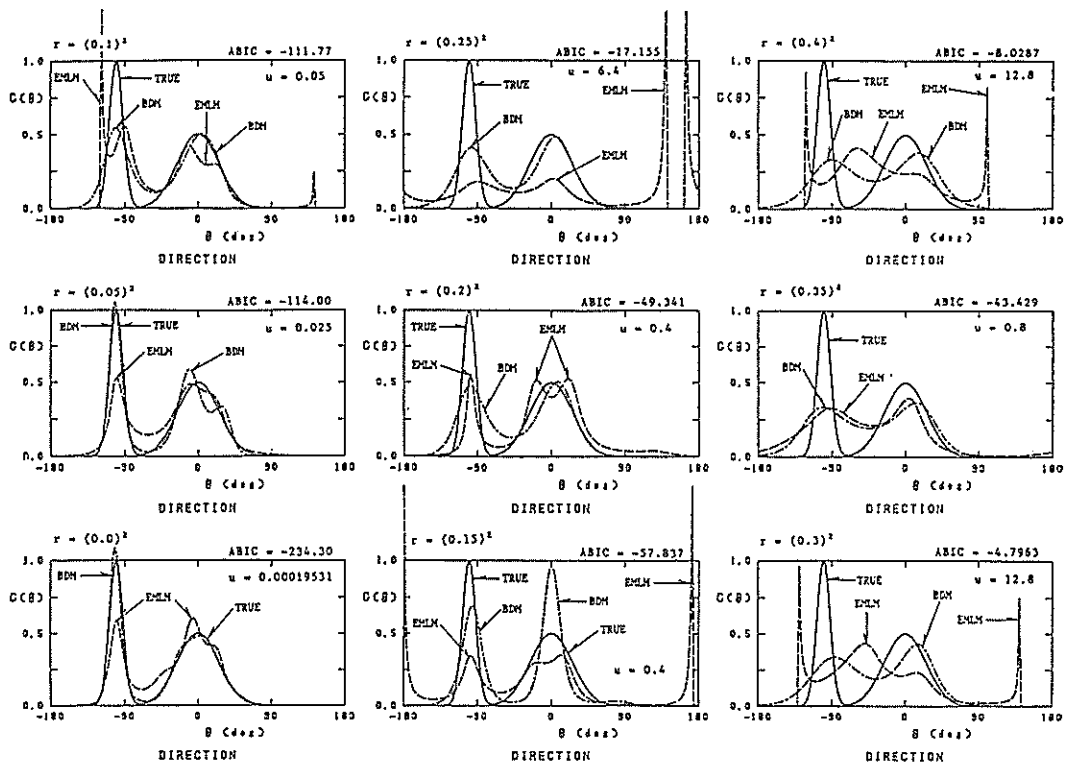
図—5.4(d) 数値シミュレーションによる BDM と EMLM の推定精度の比較
(星型アレイ配置を対象として、表—5.1に示す Case—28～Case—36の二方向波浪の条件のもとに BDM と EMLM の方向分布関数の推定結果を比較)



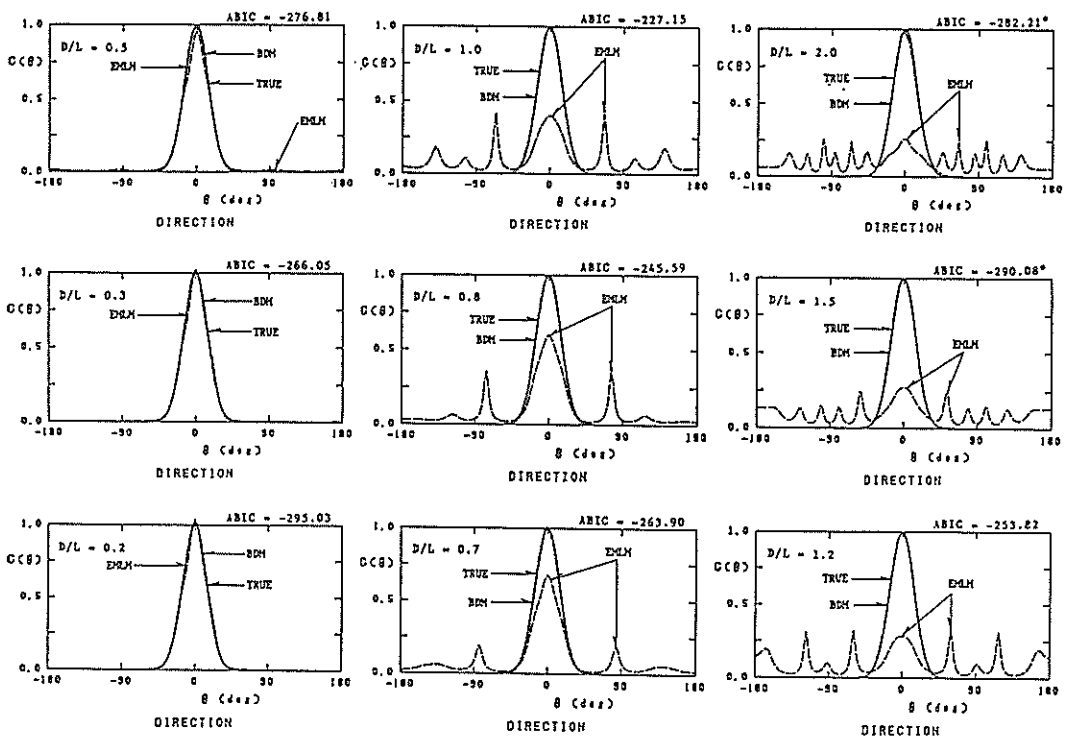
図—5.4(e) 数値シミュレーションによる BDM と EMLM の推定精度の比較
(星型アレイ配置を対象として、表—5.1に示す Case—37~Case—45の二方向波浪の条件のもとに BDM と EMLM の方向分布関数の推定結果を比較)



図—5.4(f) 数値シミュレーションによる BDM と EMLM の推定精度の比較
(星型アレイ配置を対象として、表—5.1に示す Case—46~Case—54の二方向波浪の条件のもとに BDM と EMLM の方向分布関数の推定結果を比較)



図—5.5 ノイズ付加率 r の相違による方向分布関数の推定値の特性
(星型アレイ配置を対象として、ノイズ付加率 r を種々に変えた場合のBDMとEMLMの方向分布関数の推定結果を比較)



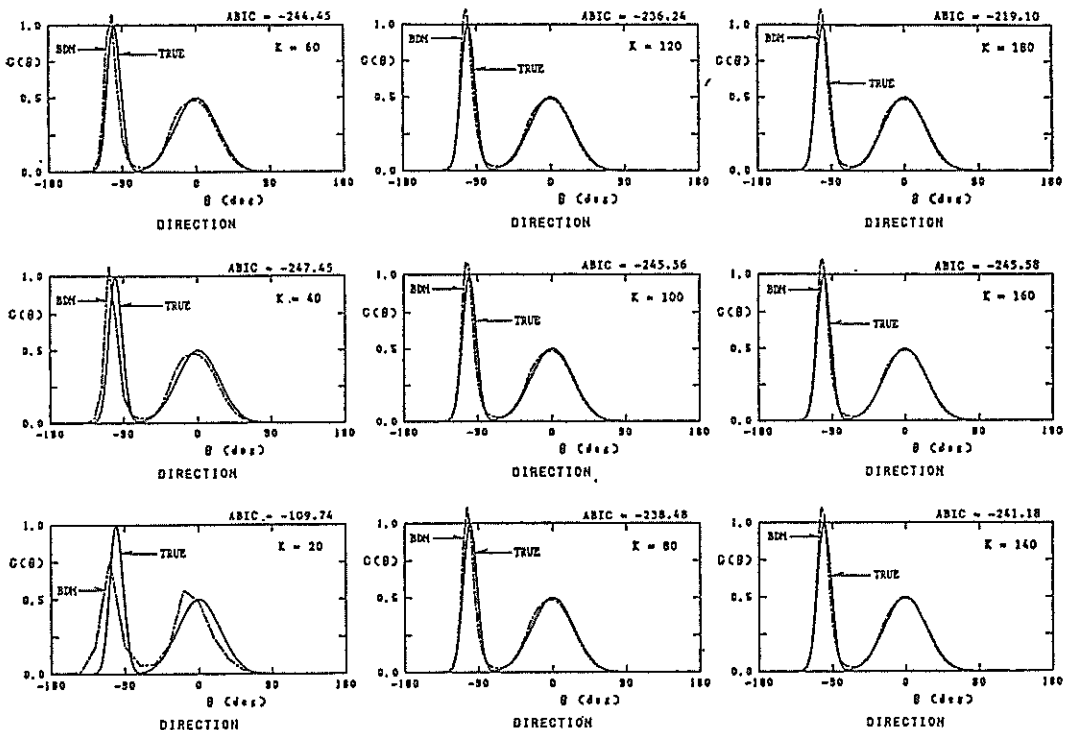
図—5.6 波高計間距離 D の相違による方向分布関数の推定値の特性
(星型アレイ配置を対象として、波高計間距離 D と波長 L の比 D/L を種々に変えた場合のBDMとEMLMの方向分布関数の推定結果を比較)

が生じており、BDM に比べてノイズの混入に対して不安定である。なお、図—5.5 の EMLM で負値が現われていないのは、負値が現われた領域では方向分布関数のエネルギーを 0 に置き換えているためである。

5) 観測アレイの大きさと方向スペクトルの推定精度

図—5.6 は図—5.1 の TYPE—2 のアレイ配置を対象として、波高計間の最小距離 D と波長 L の比 D/L を種々に変えた場合の方向分布関数の推定値を示したものである。波浪条件としては $S=30$ の一方向波浪を用いている。合田¹⁾によれば、波高計配置の一般的指針の 3 つの要件の 1 つとして、「波高計間の最小距離を測定対象の最小波長の $1/2$ 以下に設定する。」とある。この要件は、既往の方向スペクトル推定法では、 $D/L > 0.5$ では方向分布関数に顕著な side lobe が出現することを考慮したものである。図—5.6 に見られるように、EMLM で推定された方向分布関数は $D/L > 0.5$ では明確な side lobe が出現している。また、side lobe は D/L の値の増大とともに、その数が増加している。一方、BDM により推定された方向分布関数を見ると、 D/L の値のいかによらず、その推定値は極めて TRUE に近い形状を示している。この

ように、BDM に side lobe が生じない理由として、ABIC 最小化法はエントロピー最大化原理の一つの具体化として導入されていることにあると思われる。すなわち、TRUE で示されている方向分布関数は明らかに対象とする方向分布関数の逆推定問題の解であり、一方、side lobe が生じている EMLM による方向分布関数の推定値もまた、一つの見かけの解である。この場合、モデルの適合性と推定値の滑らかさのバランスの面からエントロピー最大化原理の一つの具体化として推定される BDM の推定値は、その滑らかさの構造のために見かけのピークを生じず、真の方向分布関数 (TRUE) に近い推定値を推定し得るものと解釈される。換言すれば、4.7 で述べた Shannon のエントロピー最大化原理は、与えられた制約条件下で取り得るエネルギー分布の内、最も単純な構造を持つエネルギー分布を推定し得るものと解釈したが、ベイズ型モデルの導入は Boltzmann のエントロピー最大化原理の一つの具体化であり、ここで示した例のように見かけのピークが生じるような問題では、Shannon のエントロピー最大化原理と同様に、見かけのピークを排除し、真の構造 (ここでは、より単純な構造) に近い推定値を推定し得るものと解釈される。



図—5.7 方向分割数 K と方向分布関数の方向分解能の関係

(星型アレイ配置を対象として、方向分割数 K を種々に変えた場合の BDM により推定される方向分布関数の推定精度を比較)

なお、図—5.6中、 $D/L=1.5$ および $D/L=2.0$ ではABICの右肩に*が付してある。これは、式(5.46)が式(5.70)の条件で収束しなかった例であり、5.6で述べた条件で数値計算を打ち切り、参考値として方向分布関数を示した例である。このように、 D/L が極端に大きな場合に対しては、BDMにより推定される方向分布関数の推定値は疑わしい。この意味では、波高計のみによる観測アレイに対してBDMを適用する際には、 D/L の値に関して適用限界があるようである。

6) 方向分布関数の方向分割数と方向スペクトルの推定精度

これまでに示した種々の数値シミュレーション例では、式(5.22)で導入した方向分割数として、 $K=180$ を採用して方向分布関数を推定した。この場合、5.5で解説したHouseholder法を用いて式(5.46)を解く場合に、非常に大きな行列を用いる必要があり、また計算時間も要する。したがって、ここでは対象とする方向分布関数に対して、最小限どの位の方向分割数が必要かを検討するために、方向分割数と方向分布関数の推定精度の関係を調べることにした。

図—5.7はこの関係を示したものであり、 $K=20, 40, \dots, 180$ と方向分割数を種々に変えた例を示したものである。図—5.7に見られるように $K=40$ の場合でもかなり良い推定値を推定しており、また $K=20$ の場合でも、使用目的によっては十分な分解能を有している。式(5.26)の積分では方向分割数 K が十分に大きいものとして積分の近似値を用いたが、この例に見られるように、 K があまり大きくなくても、それほど問題はないようである。したがって、本方法を適用する際には、必要な推定精度に応じて、プログラムのメモリー・サイズや計算時間を勘案し、適当な方向分割数を決定すれば良い。

5.7 結論と議論

以上、ベイズ型モデルを用いた方向スペクトル推定法について、その理論的背景、理論式の定式化、および数値シミュレーションにより本方法の推定精度や有効性、

適用性について検討した結果を述べた。ベイズ型モデルを用いた方向スペクトルの推定理論の定式化に際しては、モデル分布として波浪の線形性を考慮して、自由度の大きい、波のエネルギーの離散分布的な構造を想定した。さらに、それらの離散的なエネルギー分布が、方向角に対しては滑らかな連続関数であるという期待を事前分布として想定し、理論式の定式化を行った。ベイズ型モデルを用いた方向スペクトル推定法は、分布関数あてはめ法の一種であるが、既往の方向スペクトル推定法に比べて、より物理的な意味を有する推定法であり、極めて柔軟性に富む方法である。

数値シミュレーション結果によれば、ベイズ型モデルを用いた方向スペクトル推定法は、5.7に示したいずれの場合にも、極めて優れた推定精度で、シミュレーション条件として与えた真の方向分布関数に近い推定値を推定し得た。

得られた主な結果は以下のとおりである。

- 1) 本方法は任意の波動量に適用可能である。しかしながら、二方向波浪のような複雑な方向スペクトルに対しては4成分以上の波動量が必要である。
- 2) 本方法により推定される方向スペクトルの推定精度は、既往の方向スペクトル推定法により推定される方向スペクトルに比べて、極めて良い。
- 3) 本方法は既往の方向スペクトル推定法に比べて、観測アレイの配置の影響を受けにくいけれども、より推定精度の良い方向スペクトルを観測するためには、観測アレイの最適配置に留意する必要がある。
- 4) 本方法はクロススペクトルの推定誤差の影響を受けにくく、安定した方向スペクトルが推定可能である。
- 5) 本方法を用いて方向スペクトル解析を実施する際には、必要な推定精度やプログラムのメモリー・サイズ、計算時間等を勘案して、最適な方向分割数を決定すれば良い。実用上は30以上の方向分割数を用いる場合には、既往の方向スペクトル推定法よりも推定精度の良い方向スペクトルが推定されるようである。

第6章 反射率をモデルを規定するパラメータと見なした場合の入・反射波共存場を対象としたベイズ法の修正

方向スペクトル推定法の応用技術の1つとして、入・反射波共存場における入射波と反射波の方向スペクトルの分離計算がある。本章および次の第7章では、第5章で述べたベイズ型モデルを用いた方向スペクトル推定法を修正あるいは拡張し、入・反射波共存場に適用可能な新しい方向スペクトル推定法について述べる。

入・反射波共存場を対象として、式(3.10)から入射波と反射波の方向スペクトルを分離するためのモデルをベイズ型モデルにより定式化する場合、ABICが尤度の一種であり、またABIC最小化法がモデルのパラメータを拡張された最尤法によって決める方法であることから、反射率をモデルを規定するパラメータと見なせば、種々の反射率の内、正しい反射率が与えられる場合にABICは最小値を示すものと期待される。この特性を利用すれば、入・反射波共存場を対象とした方向スペクトル推定法の簡便法が作成可能である。本章では、反射率をモデルを規定するパラメータと見なし、いくつかの反射率の内で最適な反射率を選択するとともに、入・反射波の方向スペクトルを分離する方法について述べる。

6.1 修正ベイズ法(MBM)の推定理論の定式化⁴⁵⁾

反射率をモデルを規定するためのパラメータと見なし、式(3.10)から入射波と反射波の方向スペクトルを分離するための理論を定式化する。ここでの定式化は第5章で述べた推定理論と、基礎式(3.10)および入射波の方向に関する定義域の違いによる端条件が異なるほかは、ほぼ同様の定式化である。

以下では、式の誘導の便宜上、式(3.10)の2次元的表示(m 番目の波動量と n 番目の波動量のクロススペクトルを $\Phi_{mn}(f)$ と表示する方式)を、1次元的表示式($\Phi_i(f)$ と表示する方式)に再構成して取り扱う。なお、 $\Phi_{mn}(f)$ から構成される行列 $\Phi(f)$ がエルミート行列であることを考慮し、 $\Phi(f)$ の上三角の部分のみを用いることとする。このとき式(3.10)の方程式の数 N は、 M を観測波動量の数として、

$$N=M \times (M+1)/2 \quad (6.1)$$

であり、式(3.10)は次のように表わされる。

$$\Phi_i(f) = \int_0^\pi H_i(f, \theta) S(f, \theta) d\theta \quad (6.2)$$

$$(i=1, \dots, N)$$

ここに、

$$\Phi_i(f) = \Phi_{mn}(f) / D_{mn}(f) \quad (6.3)$$

$$H_i(f, \theta) = H_m(f, \theta) H_n^*(f, \theta) \times [\cos\{k(x_{mn} \cos \theta + y_{mn} \sin \theta)\} - i \sin\{k(x_{mn} \cos \theta + y_{mn} \sin \theta)\} + r^2 [\cos\{k(x_{mnr} \cos \theta + y_{mnr} \sin \theta)\} - i \sin\{k(x_{mnr} \cos \theta + y_{mnr} \sin \theta)\}] + r [\cos\{k(x_{mrn} \cos \theta + y_{mrn} \sin \theta)\} - i \sin\{k(x_{mrn} \cos \theta + y_{mrn} \sin \theta)\} + \cos\{k(x_{mnr} \cos \theta + y_{mnr} \sin \theta)\} - i \sin\{k(x_{mnr} \cos \theta + y_{mnr} \sin \theta)\}]] / D_{mn}(f) \quad (6.4)$$

である。また、 $D_{mn}(f)$ は式(5.19)、式(5.20)と同様に、クロススペクトルを無次元化するとともにクロススペクトルの推定誤差を正規化するために導入した関数であり、式(6.2)の実部と虚部に対してそれぞれ式(3.18)および式(3.19)の平方根、すなわちクロススペクトルの推定誤差の標準偏差を用いることとした。ただし、6.3に述べる数値シミュレーションに際しては、5.4に述べた理由により $D_{mn}(f)=1$ として計算している。なお、式(6.2)中の $S(f, \theta)$ は入射波の方向スペクトルであり、0または正の値を取る関数である。また方向角 θ に関する定義域は反射面を図3.1のように取り、 $[0, \pi]$ としている。ここでは反射率 r は既知としているので、式(6.2)に含ませて取り扱うこととする。これにより、式(6.2)は第5章で述べた式(5.18)と積分範囲の相違を除いて同じ形となり、第5章で述べた方向スペクトル推定法がほとんどそのままの形で利用可能となる。ただし、式(5.18)では両辺をパワースペクトル $S(f)$ で除して正規化して扱ったが、ここでは入射波成分のパワースペクトル $S(f)$ が不明であるため、そのまま正規化せずに取り扱っている。

第5章と同様に、入射波の方向スペクトルの定義域 $[0, \pi]$ を十分大きな数 K で等分割する($K\Delta\theta=\pi$)。ま

た、入射波の方向スペクトル $S(f, \theta)$ は等分割された各微小区間内では離散的な一定値関数であるとし、新しい変数 $x_k(f)$ を導入し、

$$x_k(f) = \ln S(f, \theta_k), \quad (k=1, \dots, K) \quad (6.5)$$

と置くと、入射波の方向スペクトル $S(f, \theta)$ は次式のよ

$$S(f, \theta) \doteq \sum_{k=1}^K \exp\{x_k(f)\} I_k(\theta) \quad (6.6)$$

ここに、

$$I_k(\theta) = \begin{cases} 1; & (k-1)\Delta\theta \leq \theta < k\Delta\theta \\ 0; & \text{その他} \end{cases} \quad (6.7)$$

($k=1, \dots, K$)

である。式 (6.6) を式 (6.2) に代入すると、

$$\Phi_i(f) = \sum_{k=1}^K \exp\{x_k(f)\} \int_0^\pi H_i(f, \theta) I_k(\theta) d\theta \quad (6.8)$$

となる。右辺の積分は K が十分大きいとき、

$$\begin{aligned} \int_0^\pi H_i(f, \theta) I_k(\theta) d\theta &= \int_{(k-1)\Delta\theta}^{k\Delta\theta} H_i(f, \theta) I_k(\theta) d\theta \\ &\doteq H_i(f, \theta_k) \Delta\theta \equiv \alpha_{i,k}(f) \end{aligned} \quad (6.9)$$

ここに、 $\theta_k = (2k-1)\Delta\theta/2$ である。

いま、 $\Phi_i(f)$ および $\alpha_{i,k}(f)$ は複素数であり、取扱いが不便である。そこで、

$$\left. \begin{aligned} \Phi_i &= \text{Real}\{\Phi_i(f)\} \\ \Phi_{N+i} &= \text{Imag}\{\Phi_i(f)\} \\ \alpha_{i,k} &= \text{Real}\{\alpha_{i,k}(f)\} \\ \alpha_{N+i,k} &= \text{Imag}\{\alpha_{i,k}(f)\} \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

と分離し、全てを実数の式として取り扱う。なお、式 (6.10) の左辺は周波数 f の関数であるが省略して記述した。以後特別の場合を除き、便宜的に周波数 f は省略して扱うこととする。このとき式 (6.9) および式 (6.10) より、式 (6.8) は次式のように表わされる。

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^K \alpha_{i,k} \exp(x_k), \quad (i=1, \dots, 2N) \quad (6.11)$$

式 (6.11) を観測値に当てはめる場合、観測値には誤差が含まれることが一般である。そこで誤差項も考慮して式 (6.11) を再記すると次式となる。

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^K \alpha_{i,k} \exp(x_k) + \varepsilon_i, \quad (i=1, \dots, 2N) \quad (6.12)$$

ここに、 ε_i ($i=1, \dots, 2N$) は互いに独立であり、平均 0、未知の分散 σ^2 の正規分布に従うものとする。

このとき、 Φ_i ($i=1, \dots, 2N$) が与えられれば x_k ($k=1, \dots, K$)、 σ^2 に関する尤度は

$$L(x_1, \dots, x_K; \sigma^2) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^N \times \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{2N} \left\{ \Phi_i - \sum_{k=1}^K \alpha_{i,k} \exp(x_k) \right\}^2 \right] \quad (6.13)$$

で与えられる。

ここで第 5 章と同様に、入射波の方向スペクトル $S(f, \theta)$ が方向角 θ に対して滑らかであるという仮定の表現として、系列 $\{x_k\}$ が局所的には k の 1 次式でよく表現されるべきであると考ええる。この場合、 x_k の 2 次の階差

$$x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2} \quad (6.14)$$

は 0 に近いと想定される。すなわち、

$$\sum_{k=3}^K [x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2}]^2 \quad (6.15)$$

を考えると、式 (6.15) が小さいほど、方向スペクトルの推定値 $\bar{S}(f, \theta)$ は滑らかになると考えられる。したがって、方向スペクトルの推定値 $\bar{S}(f, \theta)$ としては、式 (6.15) をあまり大きくしない範囲で尤度 (式 (6.13)) の大きいものが望ましい。これを定式化すると、適当なパラメータ (超パラメータ) u^2 を用いて、

$$\begin{aligned} \ln L(x_1, \dots, x_K; \sigma^2) \\ - \frac{u^2}{2\sigma^2} \sum_{k=3}^K (x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2})^2 \end{aligned} \quad (6.16)$$

を最大化する $(x_1, \dots, x_K)$ を求めれば良い。式 (6.16) の最大化は、式 (6.16) を指数とする指数関数を対象として考えるならば、

$$L(x_1, \dots, x_K; \sigma^2) \times \exp \left\{ -\frac{u^2}{2\sigma^2} \sum_{k=3}^K (x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2})^2 \right\} \quad (6.17)$$

の最大化にほかならない。これは式 (5.3) のベイズの推論公式において、 $x = (x_1, \dots, x_K)$ の事前分布として、

$$\begin{aligned} p(x|u^2, \sigma^2) &= \left(\frac{u}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^{K-2} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{u^2}{2\sigma^2} \sum_{k=3}^K (x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2})^2 \right\} \end{aligned} \quad (6.18)$$

を想定したことにほかならない。

データが与えられたときの事後分布は、

$$p_{\text{post}}(x|u^2, \sigma^2) \propto L(x, \sigma^2) p(x|u^2, \sigma^2) \quad (6.19)$$

で与えられるから、事後分布のモードを推定値とすれば良い。 u^2 を与えれば式(6.19)を最大化する x は σ^2 に無関係に決まり、

$$\sum_{i=1}^{2N} \left\{ \Phi_i - \sum_{k=1}^K \alpha_{i,k} \exp(x_k) \right\}^2 + u^2 \left\{ -\frac{u^2}{2\sigma^2} \sum_{k=3}^K (x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2})^2 \right\} \quad (6.20)$$

を最小化することにより得られる。

u^2 の決定と σ^2 の推定は次式で表わされる ABIC (赤池のベイズ型情報量基準)

$$\text{ABIC} = -2 \ln \int L(x, \sigma^2) p(x|u^2, \sigma^2) dx \quad (6.21)$$

の最小化によればよい。

なお、式(6.15)では入射波の方向スペクトルの定義域が $[0, \pi]$ であるため、総和の範囲は $k=3$ から K までとなっている。第5章では、方向スペクトルの定義域が $[0, 2\pi]$ であったため、 $x_0 = x_K$ 、 $x_{-1} = x_{K-1}$ の関係があり、総和の範囲を $k=1$ から K として、特に問題はなかった。ここでの端条件の設定方法、妥当性については、別途、検討する必要があるが、種々の数値シミュレーションによる検討の結果、総和の範囲を $k=3$ から K とした場合でも、ほぼ妥当な推定値が得られるため、この端条件を用いることとした。

6.2 修正ベイズ法の数値計算法

6.1で述べた方法を用いて反射率を選択し、入・反射波の方向スペクトルを分離するためには式(6.20)の最小化および式(6.21)の積分と最小化を実行しなければならない。しかしながら、今の場合それらを解析的に行うのは不可能である。そこでここでは5.5に述べた方法と同じ逐次近似法を採用することとした。逐次近似計算に用いる式は、若干の相違を除き5.5に示した式とほとんど同じである。したがって、以下では計算手順のみを示すこととする。

- ① 適当な u^2 および x の初期値 x_0 を与えて、以下の式により、最小自乗法によって、与えられた u^2 に対する x の推定値 $\bar{x}$ を算出する。

$$J(x) = \|\bar{A}x - \bar{B}\|^2 + u^2 \|Dx\|^2 \quad (6.22)$$

ここに、

$$\bar{A} = AE(x_0) \quad (6.23)$$

$$\bar{B} = B - AF(x_0) + AE(x_0)x_0 \quad (6.24)$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,K} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{2N,1} & \cdots & \alpha_{2N,K} \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

$$B = (\Phi_1, \dots, \Phi_{2N})^t \quad (6.26)$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.27)$$

$$E(x) = \begin{pmatrix} \exp(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \exp(x_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \exp(x_K) \end{pmatrix} \quad (6.28)$$

$$F(x) = \{\exp(x_1), \dots, \exp(x_K)\}^t \quad (6.29)$$

であり、 $\|\cdot\|$ はユークリッド・ノルムである。式(6.27)のマトリックス D は第5章で用いた式(5.43)と異なるが、これは入射波の方向スペクトルの定義域の相違によるものである。

計算手順は、式(6.22)～式(6.24)で x の初期値 x_0 を与え、式(6.22)に最小自乗法を適用することにより x_1 を算出する。次に x_1 を式(6.22)～(6.24)の x_0 に置き換えて x_2 を算出する。この演算を繰り返し、適当な収束条件を満たす解 $\bar{x}$ を求め、これを与えられた u^2 に対する推定値 $\bar{x}$ とすればよい。

- ② ①で得られた結果を用いて、次式により与えられた u^2 に対応する ABIC を算出する。

$$\begin{aligned} \text{ABIC} = & 2(N-1) \ln(2\pi\sigma^2) + 2(N-1) \\ & - (K-1) \ln(u^2) \\ & + \ln(\det(\bar{A}'\bar{A} + u^2 D'D)) \end{aligned} \quad (6.30)$$

ここに、

$$\sigma^2 = \frac{1}{2(N-1)} (\|\bar{A}\bar{x} - \bar{B}\|^2 + u^2 \|\bar{D}\bar{x}\|^2) \quad (6.31)$$

であり、 $\bar{A}$ 、 $\bar{B}$ は①で収束解 $\bar{x}$ を算出する際に用いられた式(6.23)、式(6.24)の $\bar{A}$ 、 $\bar{B}$ である。

- ③ u^2 の値を種々に変えて①、②の計算を繰り返す。

- ④ ①～③の計算結果の内、最小の ABIC を与える $\bar{x}$, σ^2 および u^2 を最適な推定値とする。

なお、①での超パラメータの設定に際しては、5.5で述べた方法と同様に格子探索法を用いることとし、

$$u = ab^m, \quad (m=1, 2, \dots) \quad (6.32)$$

として、 a , b に適当な値を代入し、 m を変えることにより、種々の u の値を用いて上記の計算を実施した。

6.3 修正ベイズ法の数値シミュレーションによる検討

数値シミュレーション法を利用して、6.1～6.2で述べた入・反射波共存場における入射波と反射波の方向スペクトルの分離計算法の妥当性、適用性などの検討を行った。

(1) 数値シミュレーション法

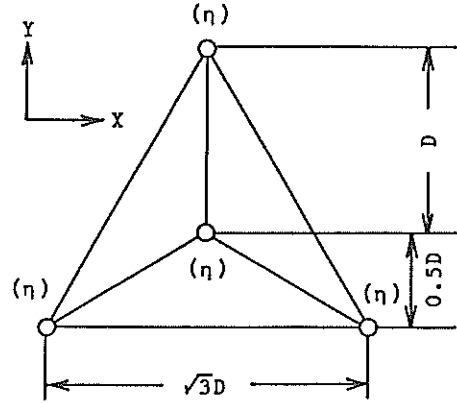
数値シミュレーションの方法は、4.5や5.5で述べた方法とはほぼ同じ方法により実施した。すなわち、ここでは任意の周波数 f に着目したとして、方向角 θ に関する量についてのみ検討した。その具体的な手順は以下の通りである¹⁰⁾。

- ① 入射波の方向スペクトル形として次式のような関数を与える。

$$S(\theta) = \sum_i a_i \cos^{2s_i} \left(\frac{\theta - \theta_i}{2} \right) \quad (6.33)$$

二つの波群から構成されるような双峰型の方向スペクトルを対象とする場合には、式 (6.33) の a_i , S_i , θ_i の値を変えた2種類の方向スペクトルを重ね合わせて与えることとする。

- ② ①で与えた方向スペクトルおよび適当に設定された反射率をもとに、式 (3.10) によりクロススペクトルを算出する。
- ③ ②で得られたクロススペクトルをもとに、6.2で述べた方法により方向スペクトルの推定を行い、真の方向スペクトル、すなわち式 (6.33) で与えられる方向スペクトルと比較する。なお、ここでは任意の波動量の組み合わせから方向スペクトルの分離計算を実施することを目的としているため、既往の方向スペクトルの分離計算法として MMLM を用いて解析し、両者の比較を行うこととした。



図—6.1 数値シミュレーションに用いたアレイ配置
(星型アレイ配置；○は観測機器の設置位置を示し、 η は水面変動を計測することを意味する)

(2) 数値シミュレーションの諸条件の設定

波浪観測条件としては、図—6.1に示す星型アレイ配置を用い、最短波高計間距離 D と波長 L の比を $D/L=0.2$ とし、反射面から波高計アレイまでの最短距離を波長の0.2倍の位置に設定した場合を対象として数値シミュレーションを実施した。ここで星型アレイ配置を用いたのは、5.7で述べたように、ベイズ型モデルを用いた方向スペクトル推定法では、式 (6.12) でクロススペクトルの推定誤差を考慮しているため、2方向波浪のような複雑な波浪場を対象として推定精度のよい方向スペクトルを推定するためには、最小限4個以上の観測波動量が必要なためである。なお、式 (6.22) の繰り返し計算を実施するに際しては、ここでは便宜的に、 $x_0=(x_1, \dots, x_K)$ の初期値として、MMLM により推定された入射波の方向スペクトル $\hat{S}_{\text{MMLM}}(\theta)$ を用いて、

$$x_k = \ln\{\hat{S}_{\text{MMLM}}(\theta_k)\}, \quad (k=1, \dots, K) \quad (6.34)$$

として与えた。

また、式 (6.22) ～ (6.24) の繰り返し計算の収束基準としては、 $n-1$ ステップ目の推定値 x_{n-1} と n ステップ目の推定値 x_n の差を $n-1$ ステップ目の推定値 x_{n-1} で正規化した値の標準偏差が、

$$|\sigma_{en}| \leq 10^{-3} \quad (6.35)$$

となった場合に収束したと見なして推定値 $\bar{x}$ を算出した。

超パラメータの設定に際しては、事前に種々の試算を実施し、式 (6.32) 中の a , b , m として、

$$a=256, \quad b=0.5, \quad m=1 \sim 20 \quad (6.36)$$

を与えて格子探索法を実施した。

なお、式 (6.6) の入射波の方向スペクトルの方向分割数として、ここでは $K=90$ として数値計算を実施した。

(3) 数値シミュレーション結果の検討

1) 単峯型の方向スペクトルを対象とする場合

図—6.2は真の反射率を方向角 θ に関して一定として $r_{\text{TRUE}}=0.7$ とし、ベイズ型モデルによる方向スペクトルの分離計算のための反射率 r_{MBM} に種々の反射率を与えた場合の、入射波と反射波の方向スペクトルを分離した結果を示したものである。波浪条件としては、 $\theta=45^\circ$ の方向から $S=10$ の一方向波浪が来襲する条件を与えている。なお、図—6.2では入・反射波の方向スペクトルの値はそれぞれ入射波の真の方向スペクトルのピーク値で正規化して描いている。図—6.2中の TRUE は真の方向スペクトルを、MBM は修正ベイズ法により推定された方向スペクトルを、MMLM は修正最尤法により推定された方向スペクトルを示している。なお、ここでは恣意的に与えた MBM の反射率 r_{MBM} の相違による MBM の推定精度と MMLM の推定精度を比較するために、便宜的に図—6.2(1)~(8)の全てに MMLM の同じ計算結果を示している。

図—6.2に見られるように、MBM はモデルの反射率 r_{MBM} が真の反射率 r_{TRUE} に近づくにつれて、真の方向スペクトル (TRUE) に近づいてゆく。また、図—6.2中に示す ABIC の値を見ると、図—6.2(5)に見られるように、モデルの反射率が真の反射率と一致したときに最小 ABIC の値 ($\text{ABIC}=-276.87$) を示している。

一方、MMLM で推定された方向スペクトルと反射率を見ると、図—6.2の例では反射率および方向スペクトルのいずれもほぼ妥当な推定値を示しているものの、方向スペクトルには3つのピークが現われており、また、反射率にも TRUE には見られない0の領域が現われている。(これは、MMLM の計算において、反射率に負値が現われるという不合理が生じた場合に、反射率を0に置き換えているためである。)

図—6.3は真の反射率 r_{TRUE} を方向角の関数として、 $r_{\text{TRUE}}=0.7 \sin \theta$ とし、モデルの反射率 r_{MBM} も方向角 θ の関数として、種々の反射率を与えた場合の入・反射波の方向スペクトルの分離計算結果を示したものである。図—6.3(6)に見られるように、モデルの反射率として真の反射率を与えた場合に、 $\text{ABIC}=-140.66$ となり、最小

ABIC 値を示すことが分かる。しかしながら、入・反射波の方向スペクトル形状を見ると、最小 ABIC 値を示すケース(6)は入射波の方向スペクトルの端 ($\theta=0^\circ$ 近傍) で MBM と TRUE との差が大きく、むしろ図—6.3(7)あるいは(8)の方が、より TRUE に近い推定値を示しているように思われる。これは式 (6.15) で導入した方向スペクトルが滑らかであるという条件式の端条件の決め方に問題があるものと思われる。すなわち、式 (6.15) では総和の範囲を便宜的に $k=3$ から K までとしたが、この影響が端での方向スペクトルの推定値にズレを生じさせ、さらにその影響が内部にも及んでいるためである。しかしながら、同じ波浪条件を用いた図—6.2では、このような影響はそれほど明確に現われていないことから、端条件の影響は入射波の方向スペクトル形状のみならず、反射率の方向角 θ に関する形状にも依存するものと思われる。いずれにせよ、式 (6.3) の端条件の設定方法については、今後より詳細に検討する必要がある。

一方、図—6.3中の MMLM により推定された結果を見ると、反射率は入射波の方向スペクトルのエネルギーの卓越した領域付近でのみ妥当な推定値を示しており、それ以外の領域では真値と推定値とのズレは大きいようである。

2) 双峯型の方向スペクトルを対象とする場合

図—6.4、図—6.5は二方向波浪を対象として、反射率としてそれぞれ図—6.2、図—6.3と同一の値を用いた場合の数値シミュレーション結果を示したものである。図—6.2、図—6.3と同様にモデルの反射率 r_{MBM} が真の反射率 r_{TRUE} に一致したときに、最小 ABIC 値を示している。なお、図—6.3と同じ反射率を用いた図—6.5では、MBM と入射波の真の方向スペクトル (TRUE) との端でのズレは生じていない。図—6.3で方向スペクトル推定値の端でのズレが生じた原因は、図—6.3では端 ($\theta=0^\circ$ 近傍) でエネルギーの変化率が大きいためと思われる。

以上、図—6.2~図—6.5の例では、推定精度の良否の問題は別にして、いずれの場合にもモデルの反射率 r_{MBM} が真の反射率 r_{TRUE} に一致した場合に、ABIC の値は最小値を示した。また、モデルの反射率 r_{MBM} が真の反射率 r_{TRUE} に近いほど、ABIC は小さな値を示している。したがって、第6章の冒頭に述べたように、いまいくつかの反射率が想定されている場合に、そのいずれがより妥当な反射率であるのかを判断する場合に、ABIC の値は良い選択基準を与えるものと期待される。

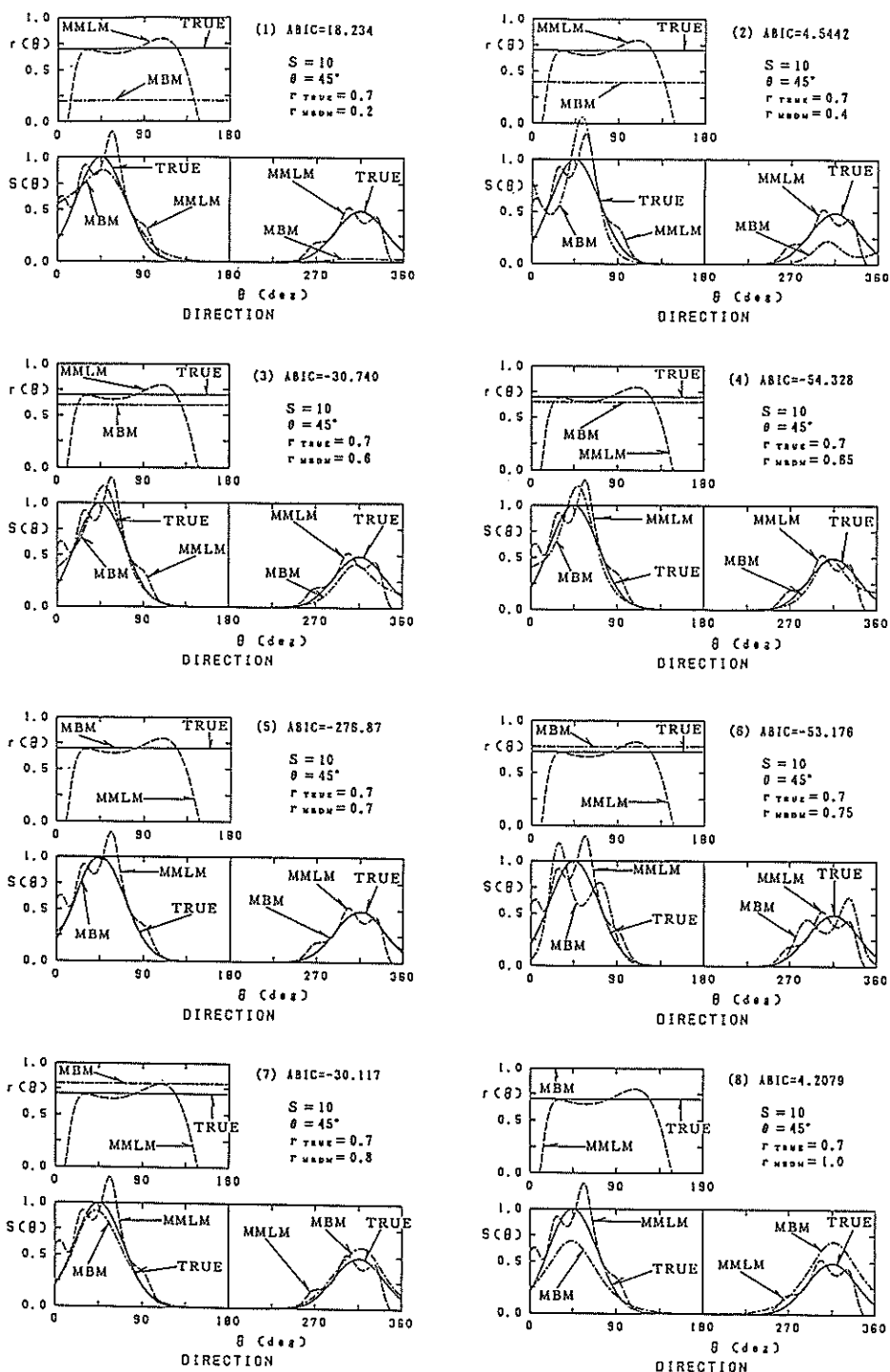
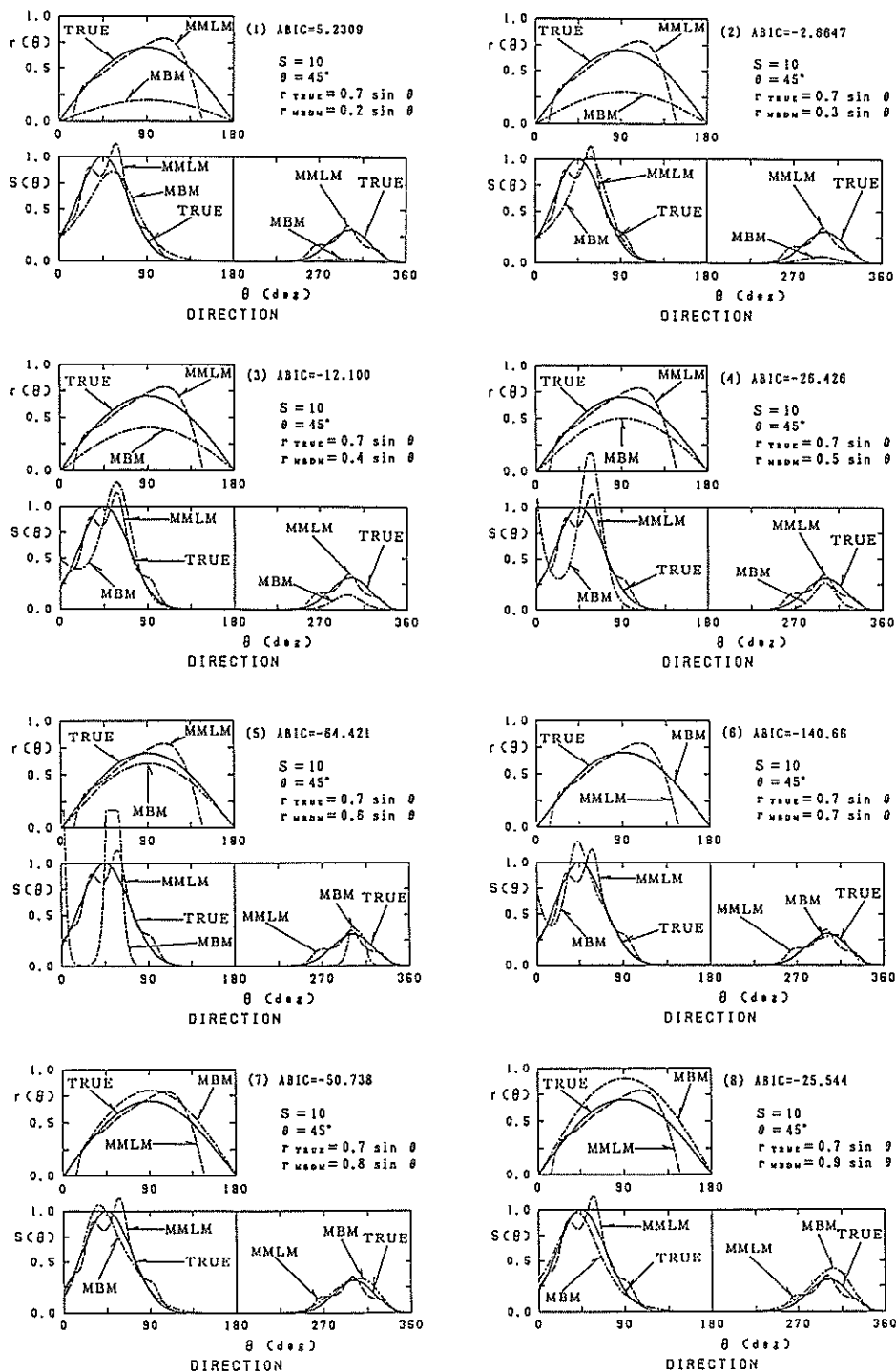


図-6.2 r_{MBM} の相違による MBM の推定精度と ABIC の関係

(単峯型の入射波の方向スペクトルを対象として、反射率 r_{TRUE} を方向角によらず一定とした場合に、MBM の反射率 r_{MBM} を種々に変えて与えた場合の MBM による入・反射波の方向スペクトルの分離計算結果を比べたものである。MBM と MMLM の比較の便宜のために(1)~(8)に MMLM の同じ計算結果を示している。(1)~(8)の上段は反射率を、下段左には入射波の方向スペクトルを、下段右には反射波の方向スペクトルを示している)



図—6.3 r_{MBM} の相違による MBM の推定精度と ABIC の関係

(単峯型の入射波の方向スペクトルを対象として、反射率 r_{TRUE} を方向角の関数として変化させた場合に、MBM の反射率 r_{MBM} を種々変えて与えた場合の MBM による入・反射波の方向スペクトルの分離計算結果を比したものである。MBM と MMLM の比較の便宜のために(1)~(8)に MMLM の同じ計算結果を示している。(1)~(8)の上段は反射率を、下段左には入射波の方向スペクトルを、下段右には反射波の方向スペクトルを示している)

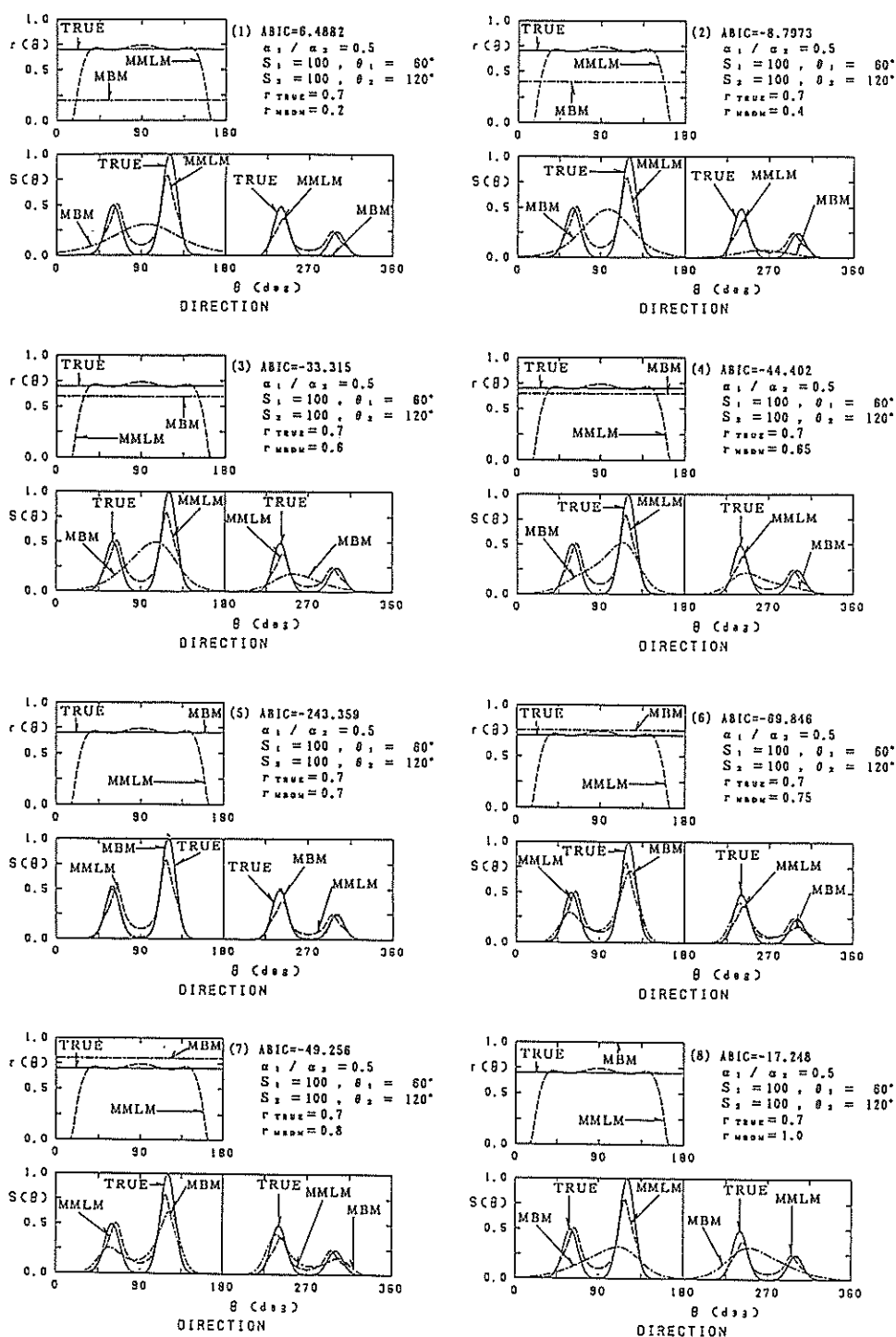
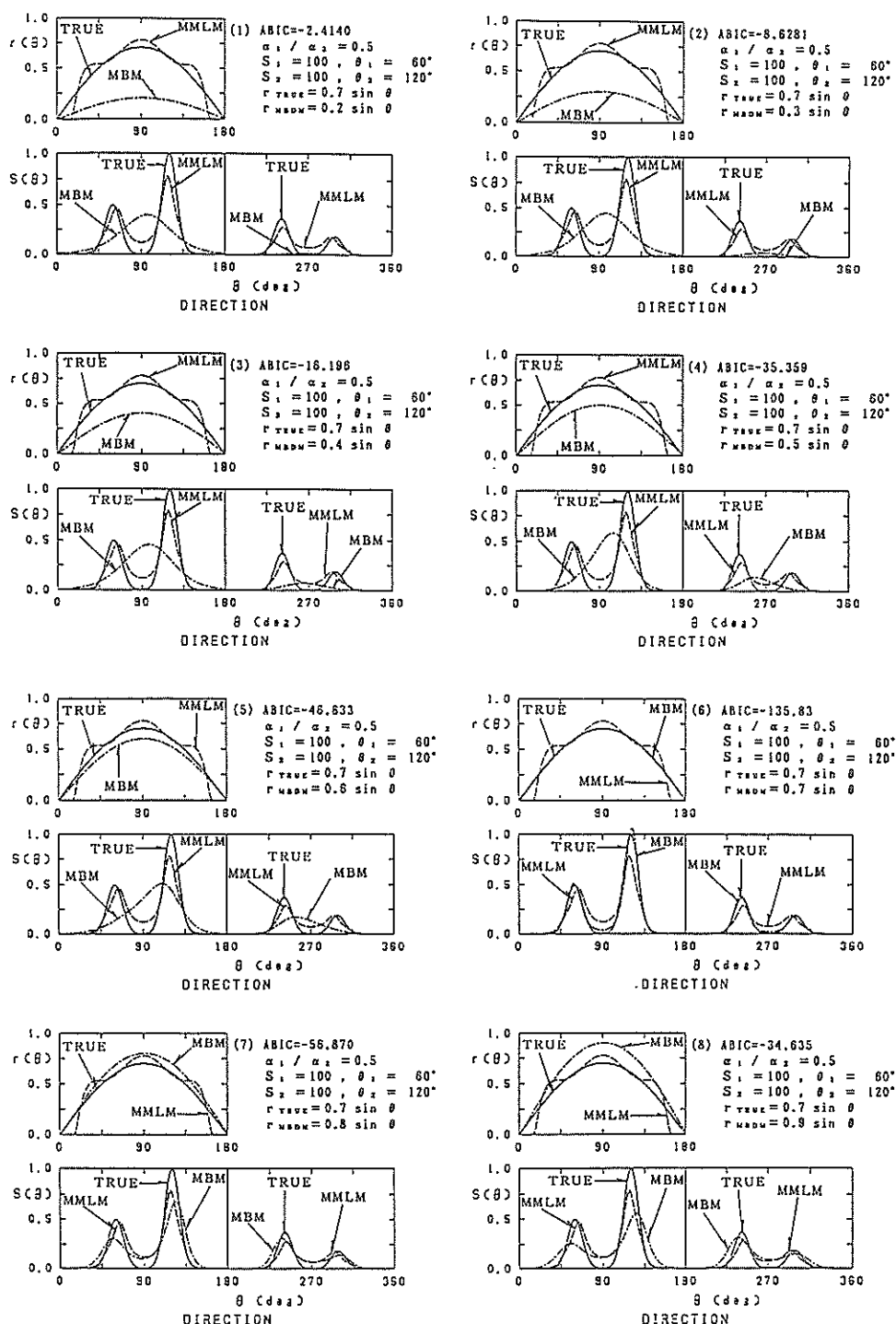


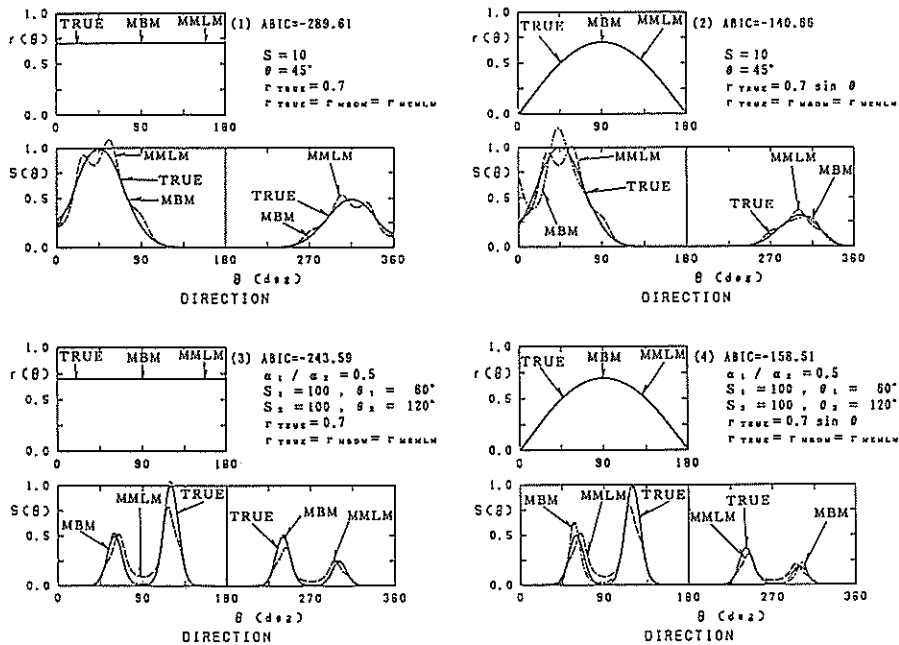
図-6.4 r_{MBM} の相違による MBM の推定精度と ABIC の関係

(双峯型の入射波の方向スペクトルを対象として、反射率 r_{TRUE} を方向角によらず一定とした場合に、MBM の反射率 r_{MBM} を種々に変えて与えた場合の MBM による入・反射波の方向スペクトルの分離計算結果を比したものである。MBM と MMLM の比較の便宜のために(1)~(8)に MMLM の同じ計算結果を示している。(1)~(8)の上段は反射率を、下段左には入射波の方向スペクトルを、下段右には反射波の方向スペクトルを示している)



図一6.5 r_{MBM} の相違による MBM の推定精度と ABIC の関係

(双峯型の入射波の方向スペクトルを対象として、反射率 r_{TRUE} を方向角の関数として変化させた場合に、MBM の反射率 r_{MBM} を種々に変えて与えた場合の MBM による入・反射波の方向スペクトルの分離計算結果を比べたものである。MBM と MMLM の比較の便宜のために(1)~(8)に MMLM の同じ計算結果を示している。(1)~(8)の上段は反射率を、下段左には入射波の方向スペクトルを、下段右には反射波の方向スペクトルを示している)



図—6.6 MBM と MMLM の反射率として真の反射率 r_{TRUE} を用いた場合の MBM と MMLM の推定精度の比較

(1)は単峯型の入射波の方向スペクトルを対象として、反射率を方向角によらず一定とした場合、(2)は単峯型の入射波の方向スペクトルを対象として、反射率を方向角の関数として変化させた場合、(3)は双峯型の入射波の方向スペクトルを対象として、反射率を方向角によらず一定とした場合、(4)は双峯型の入射波の方向スペクトルを対象として、反射率を方向角の関数として変化させた場合を示しており、それぞれの場合に真の反射率 r_{TRUE} を用いた場合の入・反射波の方向スペクトルの分離計算結果を示している)

3) 反射率の相違による修正ベイズ法 (MBM) と修正最尤法 (MMLM) の方向スペクトルの推定精度の比較

図—6.6 は MBM および MMLM の反射率として、両者に真の反射率 r_{TRUE} を与えて、入・反射波の方向スペクトルの分離計算を実施した結果を示したものである。また、図—6.7 は MBM および MMLM の反射率として、両者に MMLM で推定された反射率 r_{MMLM} を与えて入・反射波の方向スペクトルの分離計算を実施した結果を示したものである。

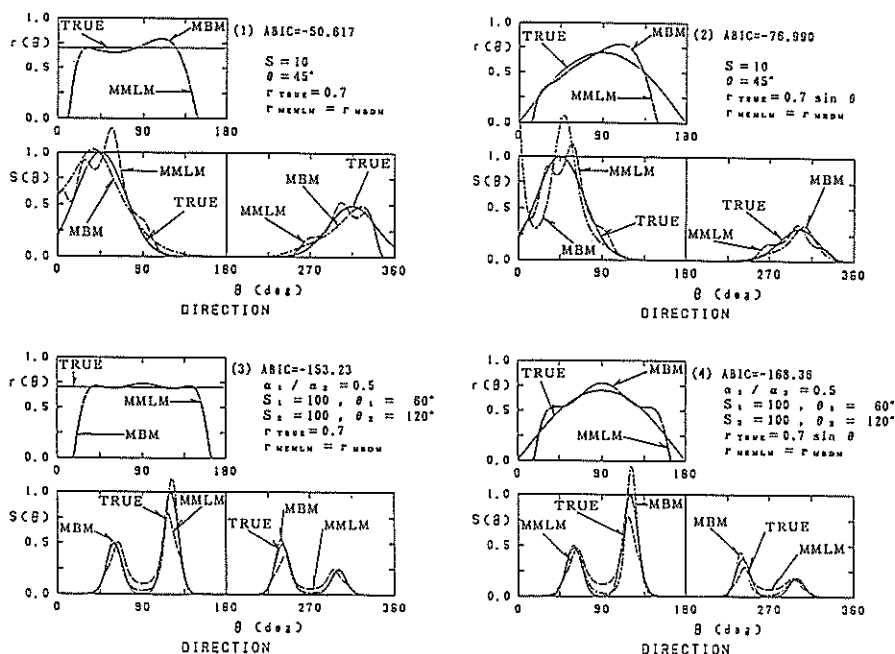
図—6.6 に見られるように、MMLM では反射率として真の反射率を与えた場合でも、図—6.7 に比べて推定精度はほとんど改善されていない。一方、MBM では反射率として真の反射率を与えた場合には、図—6.6(2)の左端での推定値のズレを除き、極めて TRUE に近い推定値を示している。しかしながら、図—6.7 に見られるように、モデルの反射率として MMLM で推定された反射率を用いる場合には、MBM は MMLM よりも推定精度が良い場合 (図—6.7(3), (4)) もあれば、推定精度が劣る場合 (図—6.7(1), (2)) もあり、一概に推定精度の良否の判断

はできない。これについては、今後更に種々の数値シミュレーションを実施して検討する必要がある。いずれにせよ、真の反射率が与えられる場合には、MBM は MMLM に比べて優れた推定法であると言える。

6.4 結論と議論

入・反射波共存場を対象として、反射率をモデルを規定するパラメータと見なした場合のベイズ型モデルを用いた入・反射波の方向スペクトルの分離計算法 (修正ベイズ法; MBM) について述べた。また、想定されたいくつかの反射率の中で、より妥当な反射率を ABIC 最小化法により選択し得ることを示した。

MBM は、BDM (ベイズ法) と同様に、3 個以上の任意の波動量が観測されている場合に適用可能である。しかしながら、二方向波浪のような複雑な入射波の方向スペクトルを対象とする場合には 4 個以上の観測波動量が必要である。また、MBM を適用する際には、与えられた反射率が真値に近い場合には、MBM は MMLM よりも優れた推定精度で入・反射波の分離計算が可能である



図—6.7 MBM と MMLM の反射率として MMLM で推定された反射率 r_{MMLM} を用いた場合の MBM と MMLM の推定精度の比較

((1)は単峯型の入射波の方向スペクトルを対象として、反射率を方向角によらず一定とした場合、(2)は単峯型の入射波の方向スペクトルを対象として、反射率を方向角の関数として変化させた場合、(3)は双峯型の入射波の方向スペクトルを対象として、反射率を方向角によらず一定とした場合、(4)は双峯型の入射波の方向スペクトルを対象として、反射率を方向角の関数として変化させた場合を示しており、それぞれの場合に MMLM で推定された反射率 r_{MMLM} を用いた場合の入・反射波の方向スペクトルの分離計算結果を示している)

ものの、波のエネルギーが反射面に沿う方向から来襲し、かつ反射面に沿う方向の近傍で方向角 θ に対するエネルギーの変化率が大きい場合には、反射率の方向角に関する特性に依存して、端（反射面に沿う方向）での方向スペクトルの推定値と真値との誤差が大きく現われるなど欠点も明らかとなった。

MMLM (修正最尤法) は反射率を方向角によらず一定とする場合や反射率を方向角の関数として変化させる場合のいずれの場合にも適用可能な実用的な方法である。しかしながら、MMLM では入射波のエネルギーの卓越した領域ではほぼ妥当な反射率を推定し得るものの、入射波のエネルギー・レベルが低い領域では反射率に負値が現われるなどの不合理が生じる場合がある。

反射率が不明の場合に、MBM を用いて入・反射波の方向スペクトルを分離する場合には、恣意的にいくつかの反射率を与えて ABIC 最小化法により最適な反射率

を選択せねばならず、MMLM に比べて取り扱いが面倒である。しかしながらこの場合には、MMLM で推定された反射率を参考値として採用すれば、入・反射波の方向スペクトルの近似的な分離計算が可能である。

なお、ここでは特に示さなかったが、ベイズ型モデルを用いた方向スペクトル推定法は、もともと、その高い推定精度のみならず、観測波動量の観測誤差やクロススペクトルの推定誤差の影響を受けにくく、安定した方向スペクトル推定法として提案したものである。ここで示した MBM もこれと同様の性質を有しており、この点においては MMLM にはない利点を有している。

以上、本章で得られたいくつかの結果について述べた。次の第 7 章では、本章で述べた入・反射波共存場における MBM の欠点を解消し、より便利な形に拡張した方法について述べる。

第7章 方向スペクトルおよび反射率を未知量とする場合の入・反射波共存場を対象とした修正ベイズ法の拡張

第6章では反射率をモデルを規定するパラメータと見なし、反射率を既知として設定する場合の入・反射波の分離計算法について述べた。また、設定されたいくつかの反射率の中で妥当な反射率を選択する方法についても述べた。しかしながら、第6章の方法では恣意的にいくつかの反射率を与えて計算せねばならず、取り扱いが不便である。そこでここでは、方向スペクトルおよび反射率の両方を未知数として定式化し、方向スペクトルのみならず反射率も同時に推定する方法について述べることにする。

7.1 拡張ベイズ法 (EMBM) の推定理論式の定式化⁴⁵⁾

ここでの定式化は第6章で述べた方法に反射率も未知数とする修正を追加することにより行われる。なお、以下では反射率は周波数 f および方向角 θ の関数として一般的に取り扱うこととする。

以下では式 (6.2) と同様に、式の誘導の便宜上、式 (3.10) の2次元の表示式 (m 番目の波動量と n 番目の波動量のクロススペクトルを $\Phi_{mn}(f)$ と表示する方式) を1次元の表示式 ($\Phi_i(f)$ と表示する方式) に再構成して取り扱う。ただし、ここでは反射率 r も未知数であるため、式 (3.10) を次式のように表示して取り扱うこととする。

$$\begin{aligned}\Phi_i(f) = & \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} H_{0i}(f, \theta) S(f, \theta) d\theta \\ & + \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} H_{1i}(f, \theta) r(f, \theta) S(f, \theta) d\theta \\ & + \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} H_{2i}(f, \theta) r^2(f, \theta) S(f, \theta) d\theta \\ & (i=1, \dots, N)\end{aligned}\quad (7.1)$$

ここに、

$$\Phi_i(f) = \Phi_{mn}(f) / D_{mn}(f) \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned}H_{0i}(f, \theta) = & H_m(f, \theta) H_n^*(f, \theta) \\ & \times [\cos\{k(x_{mn} \cos\theta + y_{mn} \sin\theta)\} \\ & - i \sin\{k(x_{mn} \cos\theta + y_{mn} \sin\theta)\}] \\ & / D_{mn}(f)\end{aligned}\quad (7.3)$$

$$\begin{aligned}H_{1i}(f, \theta) = & H_m(f, \theta) H_n^*(f, \theta) \\ & \times [\cos\{k(x_{mnr} \cos\theta + y_{mnr} \sin\theta)\} \\ & - i \sin\{k(x_{mnr} \cos\theta + y_{mnr} \sin\theta)\} \\ & + \cos\{k(x_{mnr} \cos\theta + y_{mnr} \sin\theta)\} \\ & - i \sin\{k(x_{mnr} \cos\theta + y_{mnr} \sin\theta)\}] \\ & / D_{mn}(f)\end{aligned}\quad (7.4)$$

$$\begin{aligned}H_{2i}(f, \theta) = & H_m(f, \theta) H_n^*(f, \theta) \\ & \times [\cos\{k(x_{mnr} \cos\theta + y_{mnr} \sin\theta)\} \\ & - i \sin\{k(x_{mnr} \cos\theta + y_{mnr} \sin\theta)\}] \\ & / D_{mn}(f)\end{aligned}\quad (7.5)$$

であり、式 (7.2) ~ 式 (7.5) 中の $D_{mn}(f)$ は式 (5.19), (5.20) や式 (6.3), (6.4) で用いたものと同じ関数を用いることとする。ただし、7.3に述べる数値シミュレーションに際しては、5.4に述べた理由により $D_{mn}(f)=1$ を用いている。

いま、反射率 r の値域は $0 \leq r \leq 1$ であり、定義域は入射波の来襲する範囲 $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$ で定義される。そこでいま、反射率の方向角に関する定義域 $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$ を十分大きな数 K で等分割する ($K\Delta\theta = \theta_{\max} - \theta_{\min}$)。また、等分割した微小区間内では反射率は区分的一定値関数であるとする。さらに、反射率の値域を便宜的に $0 < r < 1$ と仮定し、次式で定義される新しい変数、

$$y_k(f) = \ln \frac{r(f, \theta_k)}{1 - r(f, \theta_k)}, \quad (k=1, \dots, K) \quad (7.6)$$

を導入する。このとき反射率は次式のように近似される。

$$r(f, \theta) \approx \sum_{k=1}^K \frac{\exp\{y_k(f)\}}{1 + \exp\{y_k(f)\}} I_k(\theta) \quad (7.7)$$

ここに、

$$I_k(\theta) = \begin{cases} 1: (k-1)\Delta\theta \leq \theta < k\Delta\theta \\ 0: \quad \text{その他} \end{cases} \quad (7.8)$$

($k=1, \dots, K$)

である。式 (6.6) および式 (7.7) を式 (7.1) に代入すると、

$$\begin{aligned}\Phi_i(f) = & \sum_{k=1}^K \exp\{x_k(f)\} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} H_{0i}(f, \theta) I_k(\theta) d\theta \\ & + \sum_{k=1}^K \frac{\exp\{x_k(f) + y_k(f)\}}{1 + \exp\{y_k(f)\}} \\ & \times \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} H_{1i}(f, \theta) I_k(\theta) d\theta \\ & + \sum_{k=1}^K \frac{\exp\{x_k(f) + 2y_k(f)\}}{[1 + \exp\{y_k(f)\}]^2} \\ & \times \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} H_{2i}(f, \theta) I_k(\theta) d\theta\end{aligned}\quad (7.9)$$

となる。右辺の積分が十分大きいとき、

$$\begin{aligned}\int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} H_{0i}(f, \theta) I_k(\theta) d\theta \\ = \int_{(k-1)\Delta\theta}^{k\Delta\theta} H_{0i}(f, \theta) I_k(\theta) d\theta \\ \approx H_{0i}(f, \theta_k) \Delta\theta \approx \alpha_{i,k}(f)\end{aligned}\quad (7.10)$$

同様に、

$$\int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} H_{1i}(f, \theta) I_k(\theta) d\theta \approx H_{1i}(f, \theta_k) \Delta\theta \approx \beta_{i,k}(f)\quad (7.11)$$

$$\int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} H_{2i}(f, \theta) I_k(\theta) d\theta \approx H_{2i}(f, \theta_k) \Delta\theta \approx r_{i,k}(f)\quad (7.12)$$

ここに、 $\theta_k = (2k-1)\Delta\theta/2$ である。

いま、 $\Phi_i(f)$ および $\alpha_{i,k}(f)$, $\beta_{i,k}(f)$, $r_{i,k}(f)$ は複素数であり、取扱いが不便である。そこで、

$$\left. \begin{aligned}\Phi_i &= \text{Real}\{\Phi_i(f)\} \\ \Phi_{N+i} &= \text{Imag}\{\Phi_i(f)\} \\ \alpha_{i,k} &= \text{Real}\{\alpha_{i,k}(f)\} \\ \alpha_{N+i,k} &= \text{Imag}\{\alpha_{i,k}(f)\} \\ \beta_{i,k} &= \text{Real}\{\beta_{i,k}(f)\} \\ \beta_{N+i,k} &= \text{Imag}\{\beta_{i,k}(f)\} \\ r_{i,k} &= \text{Real}\{r_{i,k}(f)\} \\ r_{N+i,k} &= \text{Imag}\{r_{i,k}(f)\}\end{aligned}\right\}\quad (7.13)$$

と分離し、全てを実数の式として取り扱う。なお、式(7.13)の左辺は周波数 f の関数であるが、省略して記述した。以後特別の場合を除き、便宜的に周波数 f は省略して扱うこととする。このとき、式(7.10)～式(7.12)および式(7.13)より、結局、式(7.9)は次式のように表わされる。

$$\begin{aligned}\Phi_i = & \sum_{k=1}^K a_{i,k} \exp(x_k) + \sum_{k=1}^K \beta_{i,k} \frac{\exp(x_k + y_k)}{1 + \exp(y_k)} \\ & + \sum_{k=1}^K r_{i,k} \frac{\exp(x_k + 2y_k)}{[1 + \exp(y_k)]^2} \\ & (i=1, \dots, 2N)\end{aligned}\quad (7.14)$$

式(7.14)を観測値に当てはめる場合、観測値には誤差が含まれることが一般である。そこで誤差項も考慮して式(7.14)を再記すると次式となる。

$$\begin{aligned}\Phi_i = & \sum_{k=1}^K a_{i,k} \exp(x_k) + \sum_{k=1}^K \beta_{i,k} \frac{\exp(x_k + y_k)}{1 + \exp(y_k)} \\ & + \sum_{k=1}^K r_{i,k} \frac{\exp(x_k + 2y_k)}{[1 + \exp(y_k)]^2} + \varepsilon_i \\ & (i=1, \dots, 2N)\end{aligned}\quad (7.15)$$

ここに、 ε_i ($i=1, \dots, 2N$) は互いに独立であり、平均0、未知の分散 σ^2 の正規分布に従うものとする。

このとき、 Φ_i ($i=1, \dots, 2N$) が与えられれば、 x_k , y_k ($k=1, \dots, K$)、 σ^2 に関する尤度は、

$$\begin{aligned}L(x_1, \dots, x_K, y_1, \dots, y_K; \sigma^2) \\ = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^N} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{2N} \left\{ \Phi_i - \sum_{k=1}^K a_{i,k} \exp(x_k) \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{k=1}^K \beta_{i,k} \frac{\exp(x_k + y_k)}{1 + \exp(y_k)} \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{k=1}^K r_{i,k} \frac{\exp(x_k + 2y_k)}{[1 + \exp(y_k)]^2} \right\}^2\right]\end{aligned}\quad (7.16)$$

で与えられる。

以上の展開では方向スペクトル $S(f, \theta)$ は区分的一定値関数として近似した。この際、各微小区間ごとのエネルギーの相関については何ら考慮されていない。波の線形性からは各微小区間ごとのエネルギー分布はそれぞれ独立であると見なされるが、方向角 θ について不連続的なエネルギー分布をしているとは考えにくい。また、一般に方向スペクトルは滑らかな連続関数と見なされている。

一方、反射率 $r(f, \theta)$ も同様に方向角 θ について滑らかな連続関数であると仮定すると、方向スペクトル $S(f, \theta)$ および $r(f, \theta)$ が方向角 θ に対して滑らかであるという仮定の表現として、系列 $\{x_k\}$ および $\{y_k\}$ が局所的には k の1次式でよく近似されるべきであると考える。この場合、 x_k , y_k の2次の階差、

$$x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2}\quad (7.17)$$

および

$$y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}\quad (7.18)$$

は0に近いと想定される。すなわち、

$$\sum_{k=3}^K (x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2})^2 \quad (7.19)$$

および

$$\sum_{k=3}^K (y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2})^2 \quad (7.20)$$

を考えると、式(7.19)が小さいほど方向スペクトル $S(f, \theta)$ が滑らかになり、式(7.20)が小さいほど反射率 $r(f, \theta)$ が滑らかになると考えられる。したがって、方向スペクトルの推定値 $\hat{S}(f, \theta)$ および反射率の推定値 $\hat{r}(f, \theta)$ としては、式(7.19)および式(7.20)をあまり大きくしない範囲で、尤度(式(7.16))の大きいものが望ましい。これを定式化すると、適当なパラメータ(超パラメータ) u^2 および v^2 を用いて、

$$\begin{aligned} & \ln L(x_1, \dots, x_K, y_1, \dots, y_K; \sigma^2) \\ & - \frac{u^2}{2\sigma^2} \sum_{k=3}^K (x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2})^2 \\ & - \frac{v^2}{2\sigma^2} \sum_{k=3}^K (y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2})^2 \end{aligned} \quad (7.21)$$

を最大化する $(x_1, \dots, x_K)$ および $(y_1, \dots, y_K)$ を求めれば良い。式(7.21)の最大化は式(7.21)を指数とする指数関数を対象として考えるならば、

$$\begin{aligned} & L(x_1, \dots, x_K, y_1, \dots, y_K; \sigma^2) \\ & \times \exp\left\{-\frac{u^2}{2\sigma^2} \sum_{k=3}^K (x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2})^2\right\} \\ & \times \exp\left\{-\frac{v^2}{2\sigma^2} \sum_{k=3}^K (y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2})^2\right\} \end{aligned} \quad (7.22)$$

の最大化に他ならないことが分かる。これは式(5.3)の関係において、 $x=(x_1, \dots, x_K)$ および $y=(y_1, \dots, y_K)$ の事前分布として、

$$\begin{aligned} & p(x, y|u^2, v^2, \sigma^2) = p(x|u^2, \sigma^2)p(y|v^2, \sigma^2) \\ & = \left(\frac{u}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^{K-2} \\ & \times \exp\left\{-\frac{u^2}{2\sigma^2} \sum_{k=3}^K (x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2})^2\right\} \\ & \times \left(\frac{v}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^{K-2} \\ & \times \exp\left\{-\frac{v^2}{2\sigma^2} \sum_{k=3}^K (y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2})^2\right\} \end{aligned} \quad (7.23)$$

を想定したことに他ならない。

データが与えられたときの事後分布は、

$$p_{\text{POST}}(x, y|u^2, v^2, \sigma^2) \propto L(x, y, \sigma^2)p(x, y|u^2, v^2, \sigma^2) \quad (7.24)$$

で与えられるから、事後分布のモードを推定値とすれば良い。 u^2 および v^2 を与えれば式(7.24)を最大化する x および y は σ^2 に無関係に求まり、

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{2N} \left\{ \phi_i - \sum_{k=1}^K a_{i,k} \exp(x_k) - \sum_{k=1}^K \beta_{i,k} \frac{\exp(x_k + y_k)}{1 + \exp(y_k)} \right. \\ & \left. - \sum_{k=1}^K r_{i,k} \frac{\exp(x_k + 2y_k)}{\{1 + \exp(y_k)\}^2} \right\}^2 \\ & + u^2 \left\{ \sum_{k=3}^K (x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2})^2 \right. \\ & \left. + v^2 \left\{ \sum_{k=3}^K (y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2})^2 \right\} \right\} \end{aligned} \quad (7.25)$$

を最小化することにより得られる。

u^2 および v^2 の決定と σ^2 の推定は次式で表わされる ABIC (赤池のベイズ型情報量基準)

$$\text{ABIC} = -2 \ln \int L(x, y, \sigma^2) p(x, y|u^2, v^2, \sigma^2) dx dy \quad (7.26)$$

の最小化によればよい。

7.2 拡張ベイズ法の数値計算法

7.1で述べた方法を用いて、方向スペクトルおよび反射率を推定する場合、式(7.25)の最小化および式(7.26)の積分と最小化を実行しなければならない。しかしながら、今の場合、それらを解析的に行うのは不可能である。そこで、ここでも5.2で述べた方法と同様に、以下の方法により数値計算を行うこととした。

まず、 u^2 および v^2 が与えられたときに、式(7.25)の最小化を行う方法について述べる。なお、説明の便宜上、以下では方程式をすべて行列表示して取り扱う。この場合、式(7.25)を再記すると次式で表わされる。

$$\begin{aligned} J(x) = & \|AF_0(x) + BF_1(x, y) + CF_2(x, y) - \Phi\|^2 \\ & + u^2 \|Dx\|^2 + v^2 \|Dy\|^2 \end{aligned} \quad (7.27)$$

ここに、

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,K} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{2N,1} & \dots & a_{2N,K} \end{pmatrix} \quad (7.28)$$

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \dots & \beta_{1,K} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{2N,1} & \dots & \beta_{2N,K} \end{pmatrix} \quad (7.29)$$

$$C = \begin{pmatrix} \gamma_{1,1}, & \dots, & \gamma_{1,K} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{2N,1}, & \dots, & \gamma_{2N,K} \end{pmatrix} \quad (7.30)$$

$$\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_{2N})^t \quad (7.31)$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.32)$$

$$F_0(x) = (\exp(x_1), \dots, \exp(x_K))^t \quad (7.33)$$

$$F_1(x, y) = \left\{ \frac{\exp(x_1 + y_1)}{1 + \exp(y_1)}, \dots, \frac{\exp(x_K + y_K)}{1 + \exp(y_K)} \right\}^t \quad (7.34)$$

$$F_2(x, y) = \left[\frac{\exp(x_1 + 2y_1)}{\{1 + \exp(y_1)\}^2}, \dots, \frac{\exp(x_K + 2y_K)}{\{1 + \exp(y_K)\}^2} \right]^t \quad (7.35)$$

であり、 $\| \cdot \|$ はユークリッド・ノルムである。

式 (7.27) の右辺第 1 項は x および y に関して非線形である。そこでいま、 x_0 が x の推定値 $\hat{x}$ に、 y_0 が y の推定値 $\hat{y}$ に十分近いものとして、 $F_0(x)$ を x_0 のまわりで、 $F_1(x, y)$ および $F_2(x, y)$ を (x_0, y_0) のまわりで Taylor 展開して x および y の 1 次の項まで取ると、次式となる。

$$F_0(x) \approx F_0(x_0) + E_0(x_0)(x - x_0) \quad (7.36)$$

$$F_1(x, y) \approx F_1(x_0, y_0) + E_1^x(x_0, y_0)(x - x_0) + E_1^y(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (7.37)$$

$$F_2(x, y) \approx F_2(x_0, y_0) + E_2^x(x_0, y_0)(x - x_0) + E_2^y(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (7.38)$$

ここに、

$$E_0(x) = \begin{pmatrix} \exp(x_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \exp(x_K) \end{pmatrix} \quad (7.39)$$

$$E_1^x(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\exp(x_1 + y_1)}{1 + \exp(y_1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{\exp(x_K + y_K)}{1 + \exp(y_K)} \end{pmatrix} \quad (7.40)$$

$$E_1^y(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\exp(x_1 + y_1)}{\{1 + \exp(y_1)\}^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{\exp(x_K + y_K)}{\{1 + \exp(y_K)\}^2} \end{pmatrix} \quad (7.41)$$

$$E_2^x(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\exp(x_1 + 2y_1)}{\{1 + \exp(y_1)\}^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{\exp(x_K + 2y_K)}{\{1 + \exp(y_K)\}^2} \end{pmatrix} \quad (7.42)$$

$$E_2^y(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2\exp(x_1 + 2y_1)}{\{1 + \exp(y_1)\}^3} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{2\exp(x_K + 2y_K)}{\{1 + \exp(y_K)\}^3} \end{pmatrix} \quad (7.43)$$

である。

式 (7.36) ~ 式 (7.38) を式 (7.27) に代入して整理すると次式となる。

$$J(x, y) = \|\tilde{A}x + \tilde{B}y - \tilde{C}\|^2 + u^2\|Dx\|^2 + v^2\|Dy\|^2 \quad (7.44)$$

ここに、

$$\tilde{A} = AE_0(x_0) + BE_1^x(x_0, y_0) + CE_2^x(x_0, y_0) \quad (7.45)$$

$$\tilde{B} = BE_1^y(x_0, y_0) + CE_2^y(x_0, y_0) \quad (7.46)$$

$$\begin{aligned} \tilde{C} = & \Phi - AF_0(x_0) - BF_1(x_0, y_0) - CF_2(x_0, y_0) \\ & + AE_0(x_0)x_0 + BE_1^x(x_0, y_0)x_0 + BE_1^y(x_0, y_0)y_0 \\ & + CE_2^x(x_0, y_0)x_0 + CE_2^y(x_0, y_0)y_0 \end{aligned} \quad (7.47)$$

である。

したがって、適当な初期値 x_0, y_0 が与えられると、式

(7.44)～式(7.47)をもとに最小自乗法により、 x_1, y_1 が算出される。次に x_1, y_1 を式(7.44)～式(7.47)の x_0, y_0 に置き換えて x_2, y_2 を算出する。この演算を繰り返し、適当な収束条件を満たす解 $\hat{x}, \hat{y}$ を求め、これを与えられた u^2, v^2 に対する最適な推定値 $\hat{x}, \hat{y}$ とする。

このとき、式(7.26)で与えられるABICは、 x および y の推定値 $\hat{x}$ および $\hat{y}$ を求める際に算出した $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ を $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ で表わすと、5.5で述べた方法と同様にして次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \text{ABIC} = & -2 \ln \int L(x, y, \sigma^2) p(x, y | u^2, v^2, \sigma^2) dx dy \\ = & 2(N-2) \ln(2\pi\sigma^2) - (K-2) \ln(u^2 v^2) \\ & + \frac{1}{\sigma^2} (\|\hat{A}\hat{x} + \hat{B}\hat{y} - \hat{C}\|^2 + u^2 \|D\hat{x}\|^2 + v^2 \|D\hat{y}\|^2) \\ & + \ln[\det\{(\hat{A}, \hat{B})'(\hat{A}, \hat{B}) + u^2 D'D + v^2 D'D\}] \end{aligned} \quad (7.48)$$

また、 σ^2 の推定値 $\hat{\sigma}^2$ は式(7.48)を σ^2 で微分して0と置くことにより得られ、

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2(N-2)} (\|\hat{A}\hat{x} + \hat{B}\hat{y} - \hat{C}\|^2 + u^2 \|D\hat{x}\|^2 + v^2 \|D\hat{y}\|^2) \quad (7.49)$$

で与えられる。したがって、ABICは最終的に次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \text{ABIC} = & 2(N-2) \{1 + \ln(2\pi\hat{\sigma}^2)\} - (K-2) \ln(u^2 v^2) \\ & + \ln[\det\{(\hat{A}, \hat{B})'(\hat{A}, \hat{B}) + u^2 D'D + v^2 D'D\}] \end{aligned} \quad (7.50)$$

なお、式(7.44)の最小自乗法の解法としては、5.5と同様にHouseholder法を用いて計算した。ただしこの場合、式(5.50)に対応する行列 Z は次式で与えられる。

$$Z = \begin{pmatrix} \overbrace{\left[\begin{array}{cc|c} \hline \hat{A} & \hat{B} & \hat{C} \\ \hline \end{array} \right]}^{\leftarrow K \rightarrow \leftarrow K \rightarrow \leftarrow 1 \rightarrow} \\ \hline \begin{array}{cc|c} uD & 0 & 0 \\ \hline 0 & vD & 0 \end{array} \\ \hline \end{pmatrix} \begin{array}{c} \updownarrow 2N \\ \updownarrow K-2 \\ \updownarrow K-2 \end{array} \quad (7.51)$$

最後に、 u^2 および v^2 の決定法について述べる。 u^2 および v^2 の決定は正確には式(7.50)のABICを最小にする非線形最適化によらなければならない。しかしながら、今の場合これは困難であり、また、 u^2 および v^2 の推定を目的にする限り、式(7.50)を厳密に最小にする必要はない。したがって、ここでも5.5と同様に、 u および v の与え方として格子探索法を用いることとし、

$$u = ab^m, \quad (m=1, 2, \dots) \quad (7.52)$$

$$v = cd^n, \quad (n=1, 2, \dots) \quad (7.53)$$

として、 a, b, c, d に適当な値を代入し、 m, n をえることにより、種々の u および v の値を用いて上記の計算を実行した。

以上に述べた数値計算法により得られた結果の内、最小のABICを与える $\hat{u}, \hat{v}$ を最適な $\hat{u}, \hat{v}$ として決定した。

以上の数値計算法をまとめると、以下のようになる。

- ① 適当な u, v および x, y の初期値 x_0, y_0 を与えて、式(7.44)より与えられた u, v に対応する x, y の推定値 $\hat{x}, \hat{y}$ を算出する。
- ② ①で得られた結果を用いて、与えられた u, v に対応するABICを式(7.50)より算出する。
- ③ u, v の値を種々に変えて、①、②の計算を繰り返す。
- ④ ①～③の計算結果の内、最小のABICを与える $\hat{u}, \hat{v}, \hat{\sigma}^2$ および $\hat{x}, \hat{y}$ を最適な推定値とする。

7.3 拡張ベイズ法の数値シミュレーションによる検討

数値シミュレーション法を利用して、7.1～7.2で述べた入・反射波共存場における反射率の推定および入射波と反射波の方向スペクトルの分離計算法の妥当性、適用性などの検討を行った。

(1) 数値シミュレーション法

数値シミュレーション法は6.3(1)で述べた方法と同じ方法により実施した。なお、7.1～7.2で述べた方法は、式(7.1)で示されるように、入射波の来襲する範囲 $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$ でのみ適用可能であるが、数値シミュレーションに際しては、あらかじめ $[0, \pi]$ の全範囲に微小のエネルギーを加えておき、入射波のエネルギーが厳密に0になる領域を無くすことにより、便宜的に適用範囲を $[0, \pi]$ として数値計算を実施した。実際の観測データに本方法を適用する場合、観測誤差やクロススペクトルの推定誤差などのため、入射波のエネルギーが厳密に0になる領域が存在することはほとんどないと思われるが、エネルギーが0になる領域が存在する場合には、上記のような工夫が必要である。

(2) 数値シミュレーションの諸条件の設定

波浪条件としては、図7.1に示す「星型配置+傾斜計」および図7.2に示す「Haubrich型配置」を用い、最短

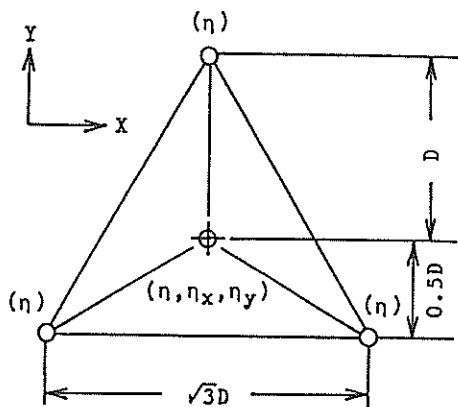


図-7.1 数値シミュレーションに用いたアレイ配置
「星型配置+傾斜計」

(○は観測機器の設置位置を示し、 η は水面変動を、 η_x および η_y はそれぞれ x 軸方向および y 軸方向の水面勾配を計測することを意味する)

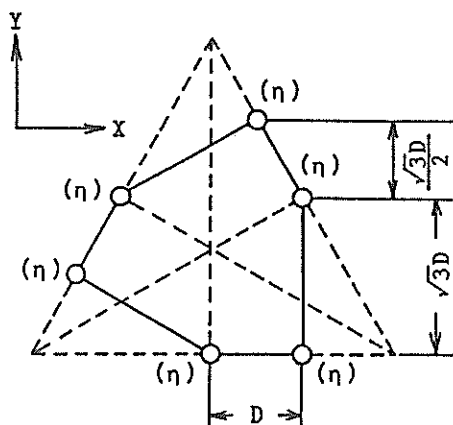


図-7.2 数値シミュレーションに用いたアレイ配置
「Haubrich 型配置」

(○は観測機器の設置位置を示し、 η は水面変動を計測することを意味する)

波高計間距離 D と波長 L の比を $D/L=0.2$ とし、反射面から観測アレイまでの最短距離を波長の0.2倍の位置に設定した場合を対象として数値シミュレーションを実施した。ここで「星型配置+傾斜計」または「Haubrich 型配置」⁴⁶⁾を用いたのは、7.1で述べた入・反射波の分離計算法では、反射率も未知数としているため、6.1で述べた入・反射波の分離計算法に比べて2倍の未知数を含んでおり、また、方向スペクトルの推定において6個の観測波動量から得られる情報量（クロススペクトル）は、4

個の観測波動量から得られる情報量に比べて約2倍の情報量を有しているためである。実際、図-6.1に示す「星型配置」を対象としてここで述べた方法を試算したが、この場合には式 (7.44) の繰り返し計算による収束解は得られなかった。

なお、ここでは、式 (7.44) の繰り返し計算の初期値 $x_0=(x_1, \dots, x_K)$, $y_0=(y_1, \dots, y_K)$ として、便宜的に MMLM により推定された方向スペクトル $\hat{S}_{\text{MMLM}}(\theta)$ および反射率 $\hat{r}_{\text{MMLM}}(\theta)$ の推定値を用いて、

$$x_k = \ln\{\hat{S}_{\text{MMLM}}(\theta_k)\} \quad (7.54)$$

$$y_k = \ln\left\{\frac{\hat{r}_{\text{MMLM}}(\theta_k)}{1 - \hat{r}_{\text{MMLM}}(\theta_k)}\right\} \quad (7.55)$$

として与えることとした。

また、式 (7.44) の繰り返し計算の収束基準としては、6.3と同様に、 n ステップ目の推定値 x_n, y_n と $n-1$ ステップ目の推定値 x_{n-1}, y_{n-1} の差を、 n ステップ目の推定値 x_n, y_n で正規化した値の標準偏差 $\sigma_{cxn}, \sigma_{cyn}$ が

$$|\sigma_{cxn}| \leq 10^{-3} \quad (7.56)$$

かつ

$$|\sigma_{cyn}| \leq 10^{-3} \quad (7.57)$$

となった場合に収束したと見なして推定値 $\bar{x}, \bar{y}$ を算出した。

超パラメータ u, v の設定に際しては、事前に種々の試算を実施し、式 (7.52) の a, b, m として、

$$a=0.0125, \quad b=0.5, \quad m=1 \sim 10 \quad (7.58)$$

を与えて格子探索法を実施した。また、式 (7.53) の c, d, n としては、反射率を方向角に対して一定とする場合には、

$$c=1000.0, \quad d=0.5, \quad n=1 \sim 10 \quad (7.59)$$

とし、反射率を方向角 θ の関数として sin 型(式(7.61))を与える場合には、

$$c=0.1, \quad d=0.5, \quad n=1 \sim 10 \quad (7.60)$$

として格子探索法を実施した。

なおここでは、式 (6.6) の方向スペクトルおよび式 (7.7) の反射率の方向分割数として、 $K=45$ として数値計算を実施した。

(3) 数値シミュレーション結果の検討

1) 反射率を方向角によらず一定値とした場合の数値シミュレーション例

図一7.3は真の反射率 r_{TRUE} を方向角 θ に関して一定とし、 $r_{\text{TRUE}}=0.7$ として、種々の波浪条件を用いて数値計算した結果を示したものである。図一7.3(1)~(6)は「星型配置+傾斜計」を観測条件とした場合の計算結果を示しており、図一7.3(7)、(8)はそれぞれ(5)、(6)と同じ波浪条件のもとに「Haubrich型配置」を観測条件とした場合の結果を示している。図一7.3中のTRUEは真の方向スペクトルおよび反射率を、MMLMは修正最尤法により推定された方向スペクトルおよび反射率を、EMBMは7.1~7.2で述べたベイズ型モデルにより推定された方向スペクトルおよび反射率を示している。なお、図一7.3では、それぞれの推定法により推定された入・反射波の方向スペクトルを真の入射波の方向スペクトルのエネルギー・ピーク値で正規化して描いている。

図一7.3に見られるように、EMBMはいずれの場合にも極めて高い推定精度で入・反射波の方向スペクトルおよび反射率を推定している。特に反射率はほぼ完全に真の反射率と一致しており、図一7.3からはその差をほとんど識別できない。一方、MMLMを見ると、「星型配置+傾斜計」を対象とした図一7.3(1)~(6)では、反射率は両端($\theta=0^\circ$ および 180° 近傍)を除いて、ほぼ妥当な推定値を示しているものの、方向スペクトルの推定値は真値とのズレが大きく、特に方向スペクトルが先鋭な形状の場合には真値に比べてかなり小さめの値を推定するようである。図一7.3(5)、(6)と同じ波浪条件のもとに「Haubrich型配置」を用いた図一7.3(7)、(8)では、MMLMの方向スペクトルの推定精度は(5)、(6)に比べて大差はないが、反射率の推定精度は(5)、(6)に比べてかなり低下している。EMBMでは図一7.3(5)、(6)と(7)、(8)との推定精度の相違はほとんど見られないことから、MMLMはEMBMに比べて計測器の配置の影響を強く受けるようである。

2) 反射率を方向角に関して変化させた場合の数値シミュレーション例

図一7.4(1)~(8)はそれぞれ図一7.3(1)~(8)と同じ観測条件、同じ波浪条件を用いて、反射率のみを方向角の関数として、

$$r_{\text{TRUE}}(\theta)=0.1+0.8\sin\theta \quad (7.61)$$

とした場合の数値シミュレーション例を示したものである。「星型配置+傾斜計」を用いた図一7.4(1)~(6)では

EMBMおよびMMLMのいずれも高い推定精度で反射率を推定している。しかしながら、図一7.3で見られたのと同様に、MMLMでは両端($\theta=0^\circ$ および 180° 近傍)で反射率の推定値と真値とのズレが大きいためである。また、EMBMの反射率もその両端($\theta=0^\circ$ および 180° 近傍)で、反射率の推定値と真値との差が認められるものの、その差はきわめて微小である。

EMBMの方向スペクトルの推定結果を見ると、例えば図一7.4(1)と図一6.6(2)は同じ波浪条件を用いているにもかかわらず、図一7.4(1)では図一6.6(2)で見られた端($\theta=0^\circ$ 近傍)での方向スペクトルの推定値と真値との明瞭な誤差は認められない。6.3ではこの誤差が生じる原因の一つとして、式(6.15)を導入した際の端条件に問題があると述べたが、図一7.4(1)に見られるように、観測波動量の増大により、この問題もある程度、回避し得るようである。すなわち、図一7.4では「星型配置+傾斜計」を用いることにより、反射面に沿う方向から来襲するエネルギーを、図一6.6(2)に比べてより的確に推定し得たために、端($\theta=0^\circ$ 近傍)での方向スペクトルの推定誤差が小さくなったものと思われる。

「Haubrich型配置」を用いた図一7.4(7)、(8)では、図一7.3(7)、(8)と同様に、MMLMは方向スペクトルおよび反射率のいずれもEMBMに比べて推定精度が劣っている。なお、図一7.3(7)、(8)と図一7.4(7)、(8)は反射率が異なっているにもかかわらず、MMLMで推定される反射率は両者が極めて類似している点が不思議である。

図一7.3および図一7.4中に示されたABICの値を見ると、いずれの場合にも極めて小さなABIC値を示しているが、例えば図一7.3(5)、(7)を見ると、同じ波浪条件であるにもかかわらず、図一7.3(5)の方が(7)に比べてより小さなABIC値を示している。これは、ここで用いた波浪条件をベイズ型モデルを用いた推定法で推定する場合に、「星型配置+傾斜計」の方が「Haubrich配置」に比べて、より優れていることを示しているものと思われる。なお、図一7.3および図一7.4中のABIC値に*が付してあるものは、ここに示した推定例以外にも、さらに推定精度の良い推定値が存在する可能性があることを示したものである。すなわち、式(7.58)~(7.60)の条件で超パラメータ u, v を種々に変えて7.2で述べた格子探索法を実施したが、計算の途中でABIC値がある基準値よりも小さくなった場合には、この場合でもかなり推定精度の良い推定値を与えるものとして、計算を打ち切り、*を付したものである。

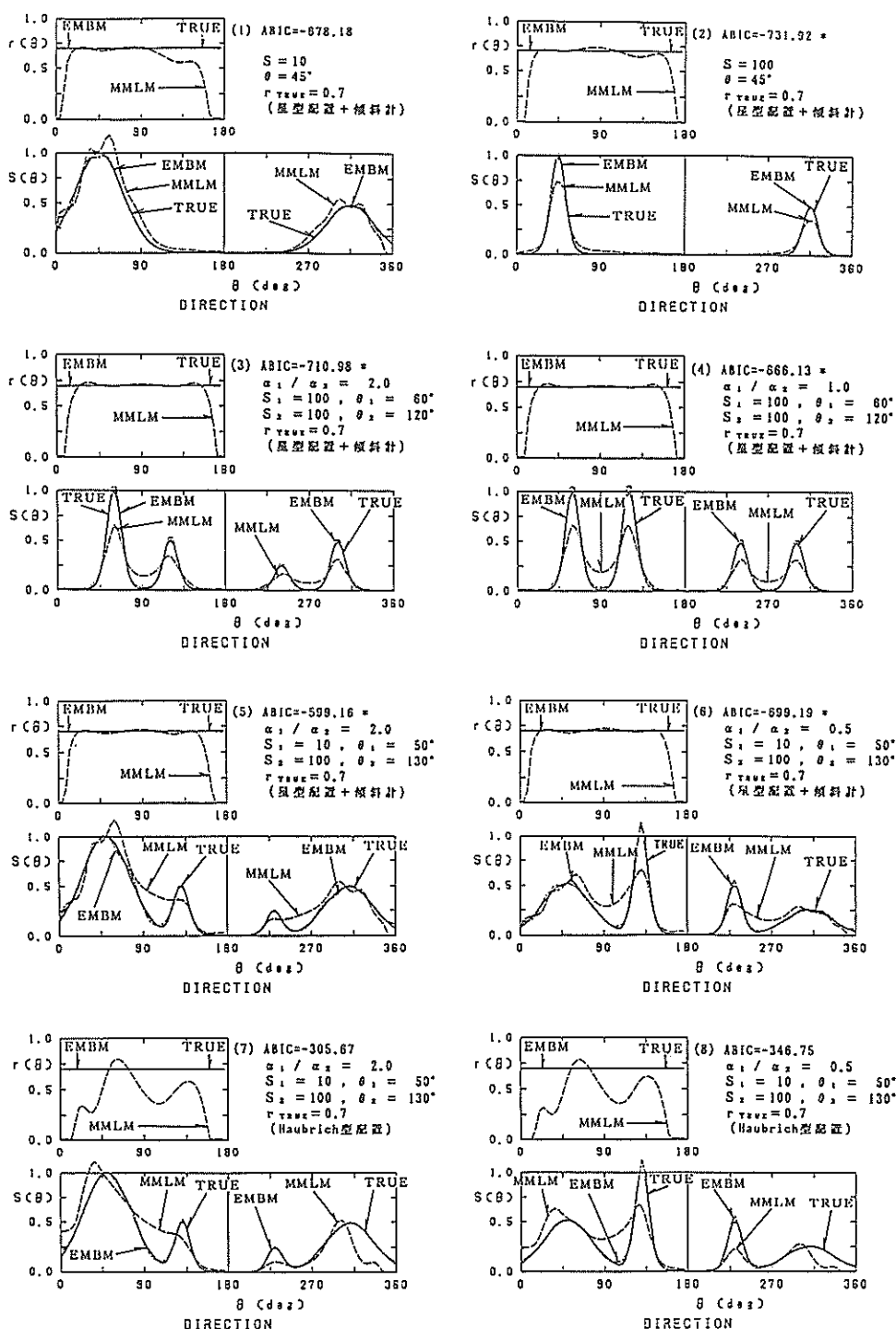


図-7.3 反射率を r_{true} 一定とした場合の EMBM と MMLM の推定精度の比較

((1)と(2)は単峯型の入射波の方向スペクトルを対象とした場合、(3)~(6)は双峯型の入射波の方向スペクトルを対象とした場合であり、「星型配置+傾斜計」を用いた場合の計算例を示している。(7)と(8)は(5)、(6)と同じ波浪条件のもとに「Haubrich型配置」を用いた場合の計算例を示している)

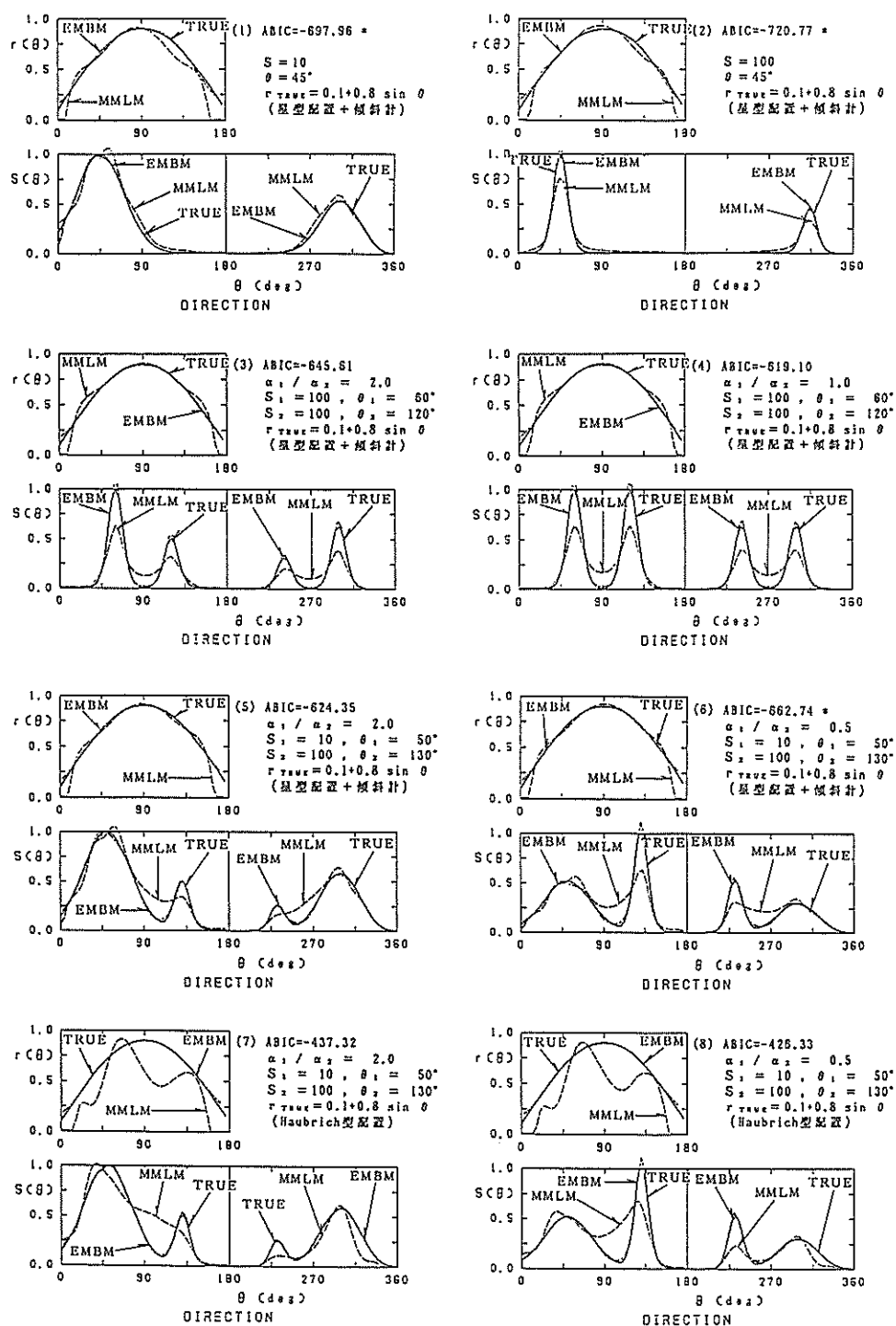


図-7.4 反射率を方向角の関数とし、 $r_{\text{TRUE}}=r(\theta)$ とした場合の EMBM と MMLM の推定精度の比較
 ((1)と(2)は単峰型の入射波の方向スペクトルを対象とした場合、(3)～(6)は双峰型の入射波の方向スペクトル
 を対象とした場合であり、「星型配置+傾斜計」を用いた場合の計算例を示している。(7)と(8)は(5)、(6)と同
 じ波浪条件のもとに「Haubrich 型配置」を用いた場合の計算例を示している)

7.4 結論と議論

本章では、第6章で述べたMBMよりもさらに便利な方法として、反射率および入射波の方向スペクトルの両方を未知数として定式化し、入・反射波の方向スペクトルの分離計算と同時に、反射率も推定し得る方法(EMBM)について示し、その妥当性について検討した。

数値シミュレーション結果によれば、EMBMは反射率が方向角によらず一定の場合や方向角の関数として変化する場合、あるいは入射波の方向スペクトルが単峯型や双峯型の場合など、いかなる場合にも適用可能である。この場合、EMBMは入・反射波の方向スペクトルのみならず、反射率も周波数および方向角の関数として極めて高い精度で推定可能である。また、6.4でも述べたが、EMBMはBDMやMBMと同様に、ベイズ型モデルを

用いた統計的推定法であり、その高い推定精度のみならず、観測波動量の観測誤差やクロススペクトルの推定誤差の影響を受けにくく、安定した推定法であるという利点も有している。しかしながら、EMBMでは反射率も未知数として定式化したために、第6章で述べたMBMに比べて2倍の未知数を有する。このため、EMBMを適用する際にはMBMを用いる場合よりも2倍の情報量が必要とし、大規模な現地観測を実施する必要がある。

EMBMを適用できる大規模な入・反射波共存場での方向スペクトル観測は我国ではまだ実施されていない。しかしながら近い将来、海洋・海岸構造物の消波効果を検討し、静穏な水域を確保するための現地調査が実施される場合には、EMBMは有力な方向スペクトル推定法として適用し得るものと期待している。

第8章 ベイズ型モデルを用いた方向スペクトル推定法の 現地波浪データ解析への適用

近年の方向スペクトルの推定理論ならびに観測技術の発展にともない、方向スペクトルの現地観測も精力的に行われつつある。運輸省第二港湾建設局小名浜港工事事務所においても、1986年10月より方向スペクトルの大規模な定常観測が実施されており、貴重な方向スペクトルの観測データが蓄積されつつある。

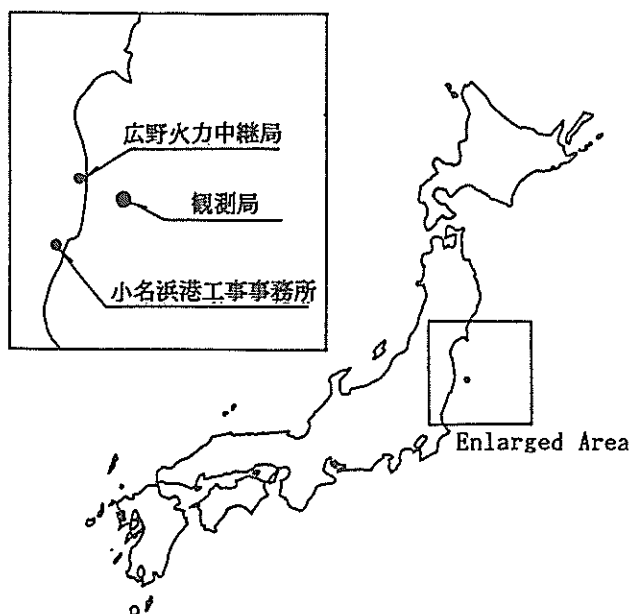
本章では、上記の小名浜港の方向スペクトル観測データを用い、第4章、第5章で述べた方向スペクトル推定法(MEP, BDM)を用いて方向スペクトル解析し、それらの適用性を検討した結果および観測して得られた海洋波の方向スペクトル特性⁴⁾について述べる。

8.1 方向スペクトル観測システムの概要

ここで紹介する方向スペクトル観測システムは「いわき沖波浪観測システム」と呼ばれている。いわき沖波浪観測システムは近年の港湾開発の大規模化、大水深化に対応して、その計画、設計、施工のいずれの分野においても不可欠な波浪に関する正確で総合的な情報をとらえることを目的として、運輸省第二港湾建設局小名浜港工事事務所が1986年10月に完成した波浪観測システムである。波浪観測システムの観測局、中継局、監視局は図一

8.1に示す位置にあり、観測局は塩屋崎燈台北東約54km(北緯37°17'49", 東経141°27'47")の位置にある。観測局では天然ガス開発用のプラットフォーム(岩城沖石油開発機所有)の脚を利用した新しい方式により、従来困難とされてきた沖波の波浪観測を実施している。観測局の外観は図一8.2および写真一8.1に示すとおりである。観測局では波浪観測機器として、4台のステップ式波高計および水圧式波高計の装備された超音波式流速計が設置されている。観測機器の取り付け位置は図一8.2、図一8.3および表一8.1に示すとおりである。また、写真一8.2はステップ式波高計の取り付け状況を示したものである。

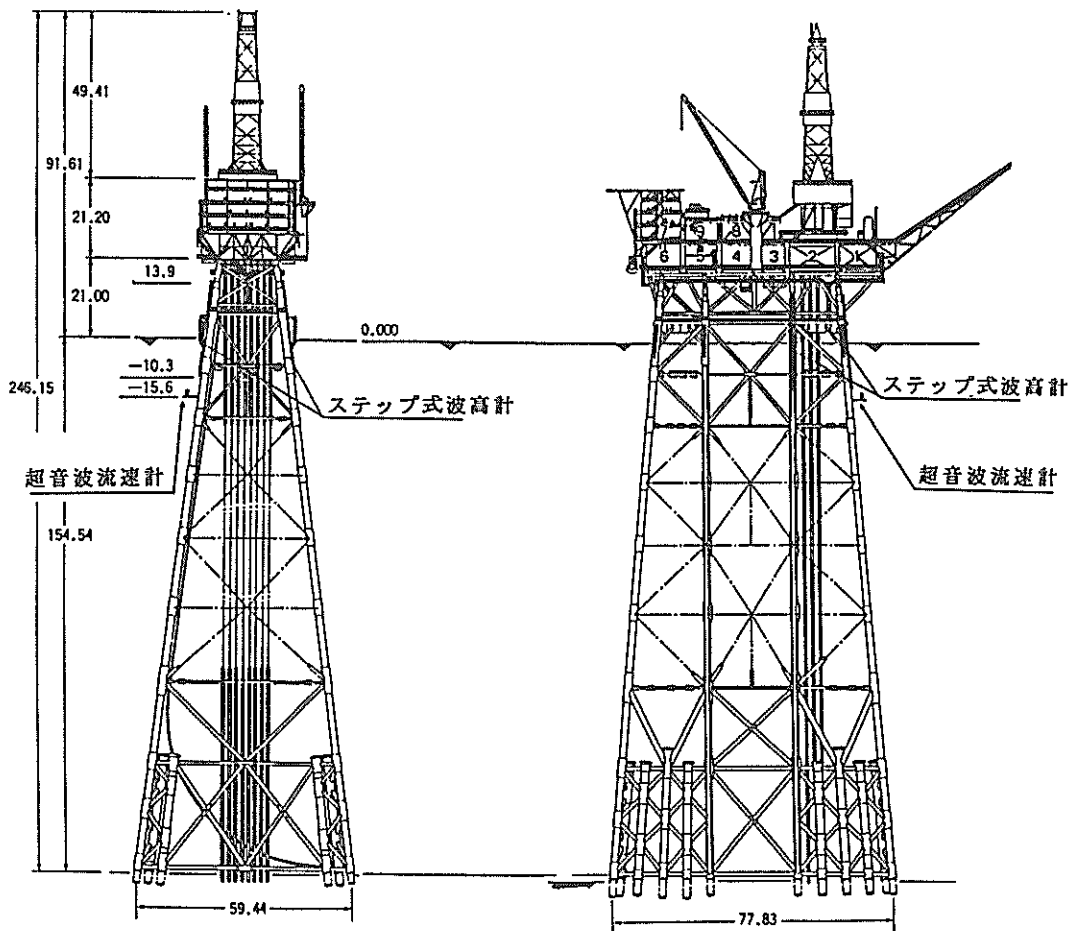
観測局で取得された観測データは、観測局から42km離れた広野火力中継局に無線テレメータにより送信される。さらに、広野火力中継局からは有線テレメータを経由して小名浜港工事事務所の監視局へ送られる。小名浜港工事事務所の監視局では、ミニ・コンピュータを利用して種々のデータ処理が実施され、風や波浪に関する情報がリアル・タイムで自動出力されている。また、拡張最尤法(EMLM)を用いた方向スペクトル解析も実施されており、高度な方向スペクトル情報がリアル・タイムで自動出力されている。



図一8.1 いわき沖波浪観測システムの位置図

表—8.1 波浪観測機器の取り付け位置 (相対座標)

Channel 番 号	観測波動量	観 測 機 器	設 置 位 置		設置水深(m)
			x 座標(m)	y 座標(m)	
ch. 1	η	ステップ式波高計	-25.137	2.701	—
ch. 2	"	"	- 3.255	12.055	—
ch. 3	"	"	-17.509	- 8.870	—
ch. 4	"	"	2.029	- 0.853	—
ch. 5	u	超音波式流速計	7.826	- 1.578	-14.530
ch. 6	v	"	"	"	"
ch. 7	p	水圧式波高計	"	"	-14.830



図—8.2 観測局の外観と観測機器の取り付け位置

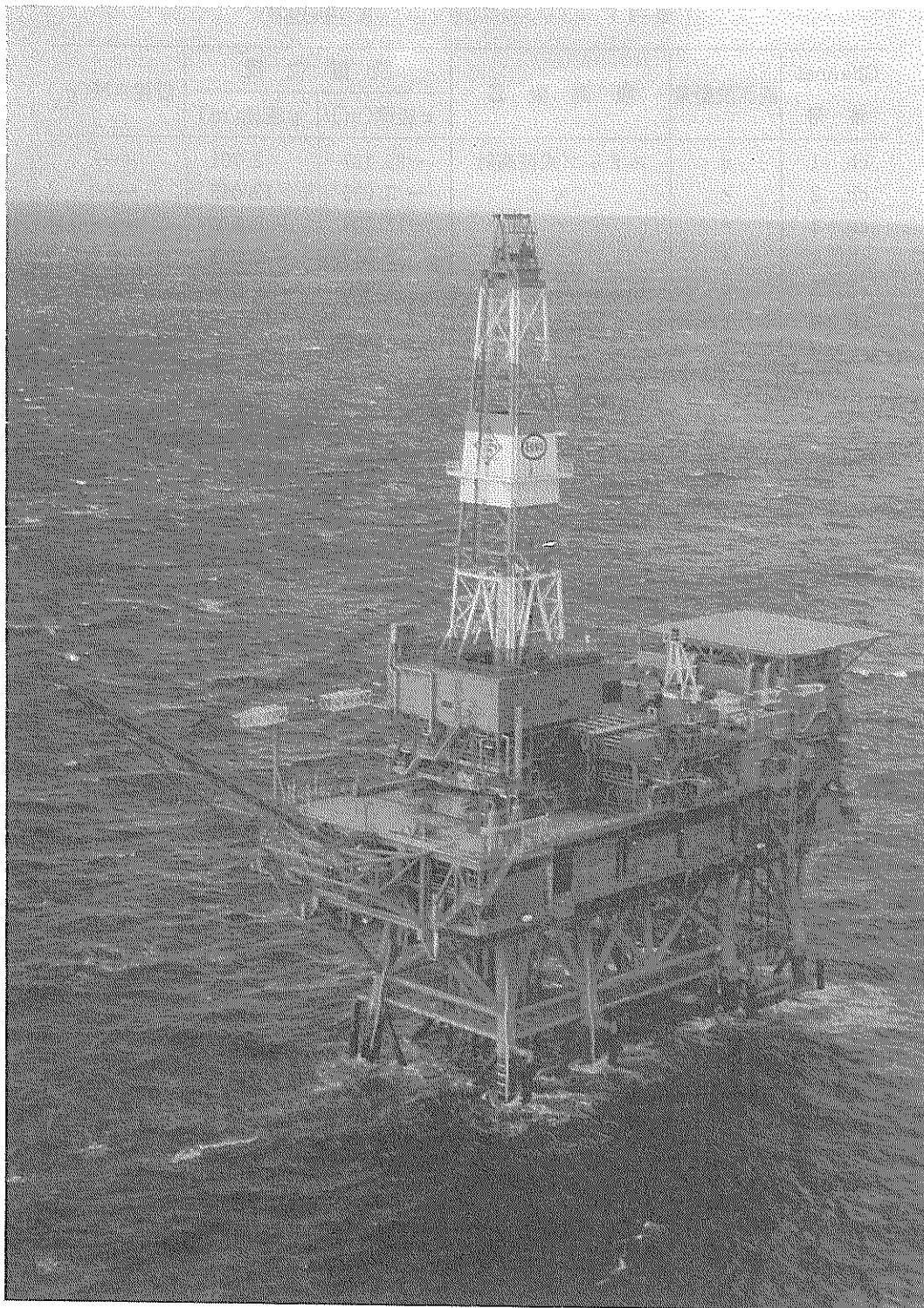


写真-8.1 いわき沖波浪観測システムの観測局

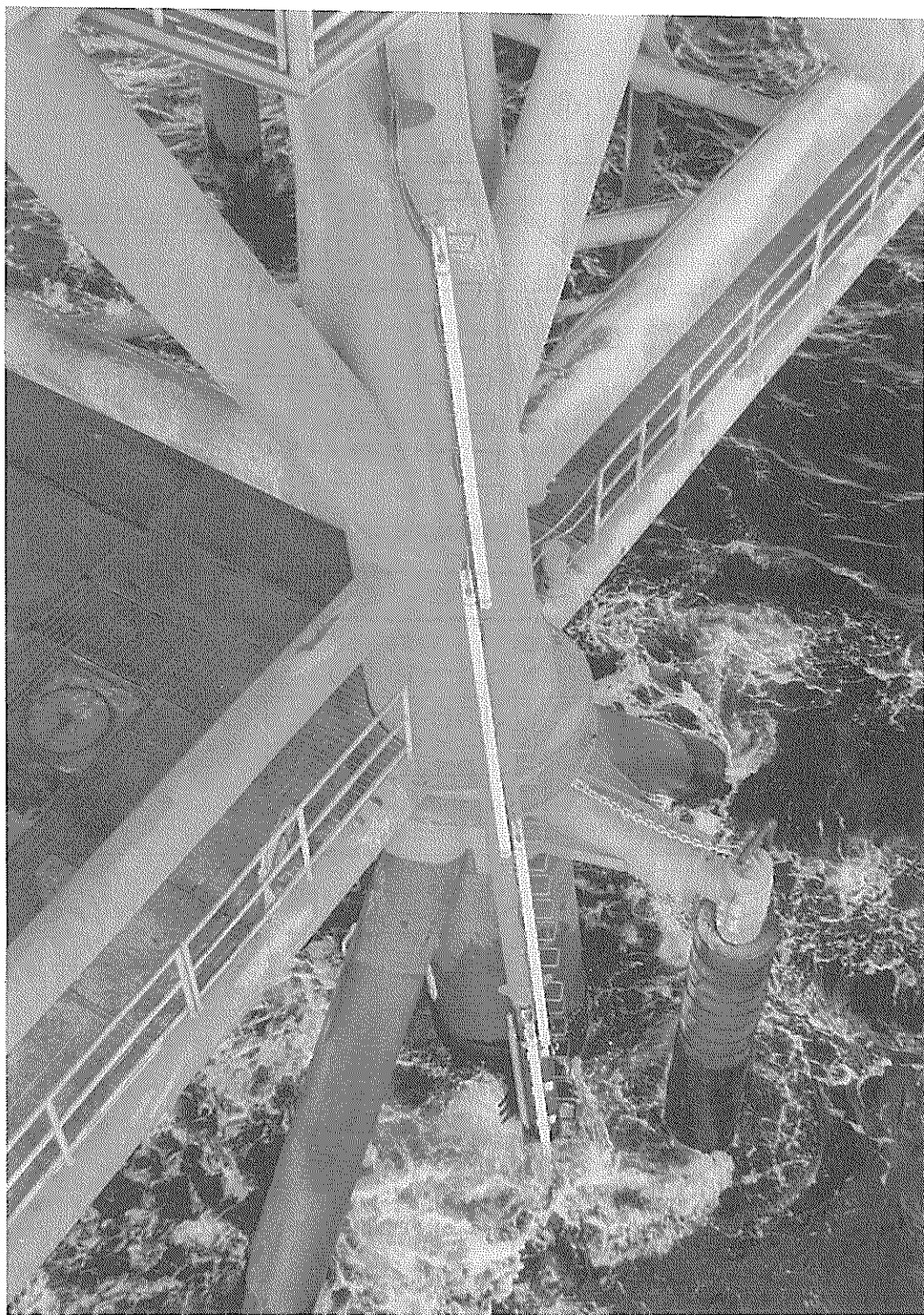
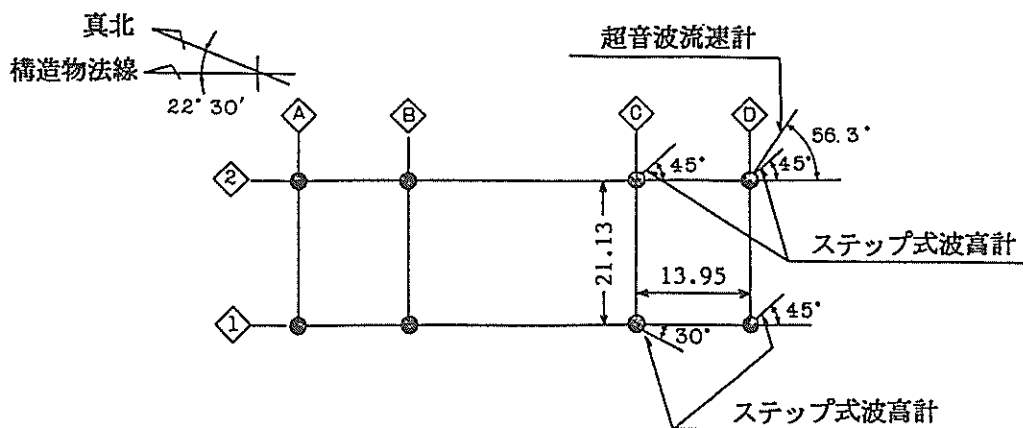


写真-8.2 ステップ式波高計の取り付け状況



図—8.3 観測機器の取り付け平面図
(図中の●は観測局プラットフォームの橋脚を表す)

表—8.2 波浪観測機器の仕様

	波 高 計	流 速 計	風 向 風 速 計
機 種	ステップ式波高計 (SR-V)	超音波流速計 (TP-21A)	プロベラ型 風向風速計
測 定 範 囲	−10.3～+13.9m (波高桿長 約24.5m) (センサー点数 252点)	成分流速 0～±3 m/s 水圧変動 0～±0.5kgf/cm ²	風 速 2～60m/s
測 定 精 度	10cm ± 5 cm	流 速 ±4 % 流 向 ±5°	風 速 10m/s以下±0.5m/s 10m/s以上±5 % 風 向 ±5°

8.2 観測機器の仕様

いわき沖波浪観測システムの観測項目は、波高、周期、波向、流向、流速、風向、風速であり、これらは毎偶数時に観測されている。波浪観測は偶数正時前後の10分間の計20分間、流速は正時前後の1分間の計2分間、風速および風向は正時前の10分間の観測が実施されている。これらは観測局に設置されたステップ式波高計、水圧センサーの装備された超音波式流速計および風向風速計により観測されている。観測局に設置された観測機器の仕様は表—8.2に示すとおりである。

8.3 いわき沖波浪観測システムを対象とした数値シミュレーションによる方向スペクトルの推定精度の検討

現地観測データを方向スペクトル解析し、その結果を解釈するに際しては、事前に当該波浪観測システムを対象として、用いる方向スペクトル推定法の特性や観測波動量の組み合わせの相違による方向スペクトル推定値の特性を数値シミュレーションで調査し、把握しておくことが望ましい。そこでここでは、いわき沖波浪観測システムを対象として5.6に述べた方法により数値シミュレーションを実施することとした。

図—8.4はいわき沖波浪観測システムを対象として、種々の観測波動量の組み合わせを用いた場合の方向スペクトル推定値の相違を示したものである。波浪条件としては周波数を $f=0.1(\text{Hz})$ として、 $\theta_1=0^\circ$ の方向から $S_1=10$ の風波が、 $\theta_2=-100^\circ$ の方向から $S_2=100$ のうねりが来襲する状況を示したものであり、二つの波群のエネルギー・ピーク値の比が $\alpha_1/\alpha_2=0.5$ のものである。図—8.4中に記載した「使用 Channel: Ch.1, 2…」は、表—8.3中に示した観測波動量の Channel 番号に対応している。また、図—8.4中の TRUE は数値シミュレーションで与えた真の方向スペクトルを示しており、BDM はベイズ型モデルを用いた方向スペクトル推定値を、EMLM は拡張最尤法により推定された方向スペクトルを示している。なお、図—8.4の縦軸は真の方向スペクトル(TRUE) のピーク値で正規化して描いている。図—8.4中の () 内に示す番号は表—8.3中のケース番号に対応しており、それぞれ表—8.3に示す観測波動量を用いて方向スペクトル解析したことを示している。

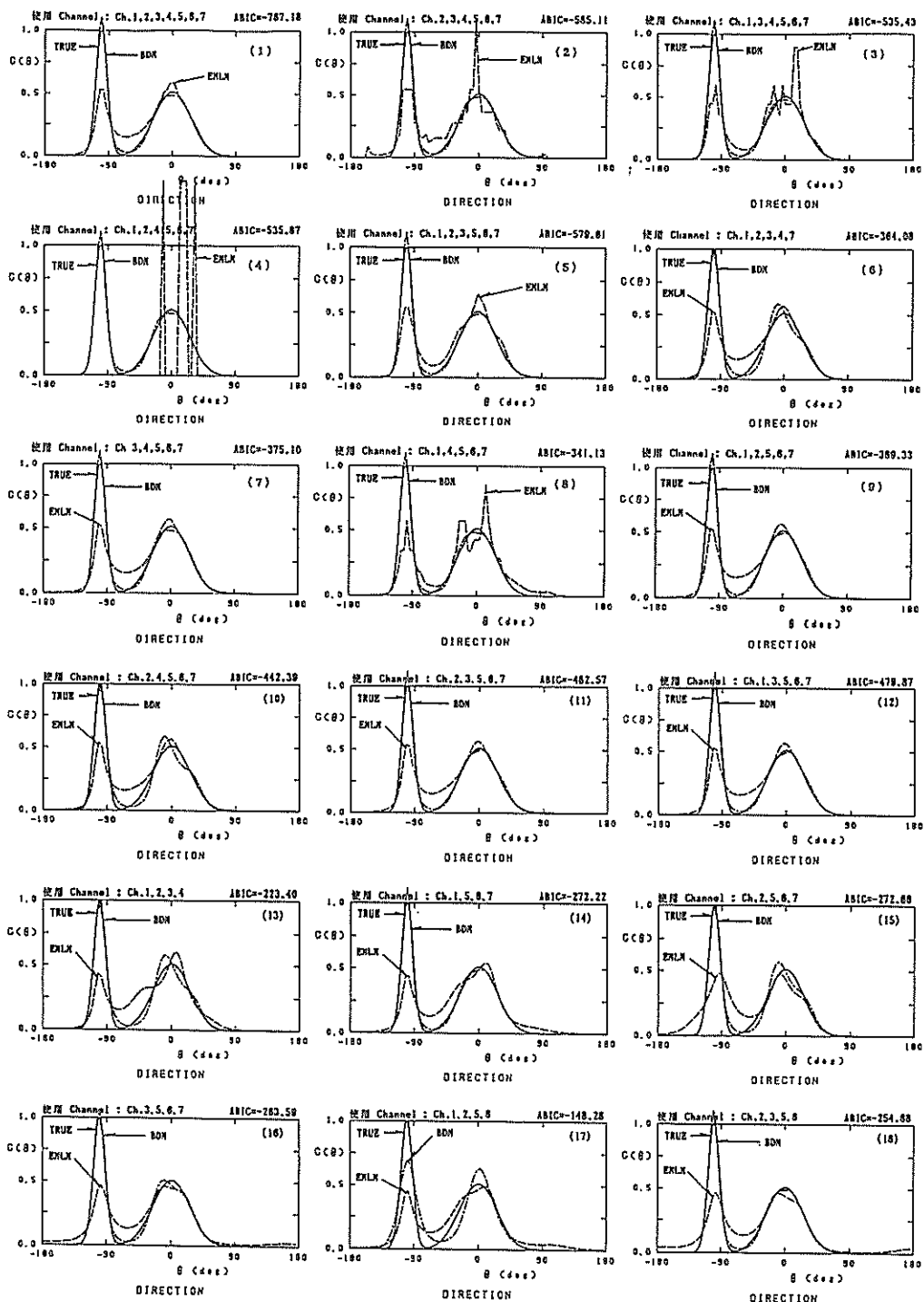
図—8.4に見られるように、BDM で推定された方向ス

ペクトルは、いずれの観測波動量の組み合わせに対しても極めて推定精度の良い推定値を推定し得る。風波あるいはうねりのエネルギー・ピーク近傍でやや大きめの値を推定している例もあるが TRUE との差は極めて微小である。図—8.4の右肩に示した ABIC の値を見ると、一般に多くの観測波動量を用いた方がより小さな ABIC 値を示す傾向がある。これは多くの観測波動量を用いた方が、より推定精度の良い方向スペクトルを推定し得ることを示している。ただし、実際の観測波動量を用いて解析する場合には入力となるクロススペクトルに誤差が含まれていることが一般であり、必ずしも多くの波動量を用いる方が良いとは言えない。これについては、それぞれの観測系で別途検討する必要がある。

図—8.4に示す EMLM の推定結果を見ると、(2), (3), (4), (8) で異常な方向スペクトルが推定されている。特に(4)では推定値は発散しており、方向スペクトルのエネルギー分布の傾向すら把握できない。図—8.4の例に見られるように EMLM で推定される方向スペクトルは、一般に観測波動量が増大しても必ずしも推定精度が向上する

表—8.3 方向スペクトル解析に用いた観測波動量の組み合わせ
(例えば、ケース番号(2)は7つの波動量の内、Ch.1を除く Ch.2~Ch.7の6つの波動量を用いて方向スペクトル解析することを意味する)

ケース番号	使用 channel 数	使用 channel
(1)	7	ch. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
(2)	6	ch. 2, 3, 4, 5, 6, 7
(3)	"	ch. 1, 3, 4, 5, 6, 7
(4)	"	ch. 1, 2, 4, 5, 6, 7
(5)	"	ch. 1, 2, 3, 5, 6, 7
(6)	5	ch. 1, 2, 3, 4, 7
(7)	"	ch. 3, 4, 5, 6, 7
(8)	"	ch. 1, 4, 5, 6, 7
(9)	"	ch. 1, 2, 5, 6, 7
(10)	"	ch. 2, 4, 5, 6, 7
(11)	"	ch. 2, 3, 5, 6, 7
(12)	"	ch. 1, 3, 5, 6, 7
(13)	4	ch. 1, 2, 3, 4
(14)	"	ch. 1, 5, 6, 7
(15)	"	ch. 2, 5, 6, 7
(16)	"	ch. 3, 5, 6, 7
(17)	"	ch. 1, 2, 5, 6
(18)	"	ch. 2, 3, 5, 6



図—8.4 数値シミュレーションによる観測波動量の組み合わせの相違による

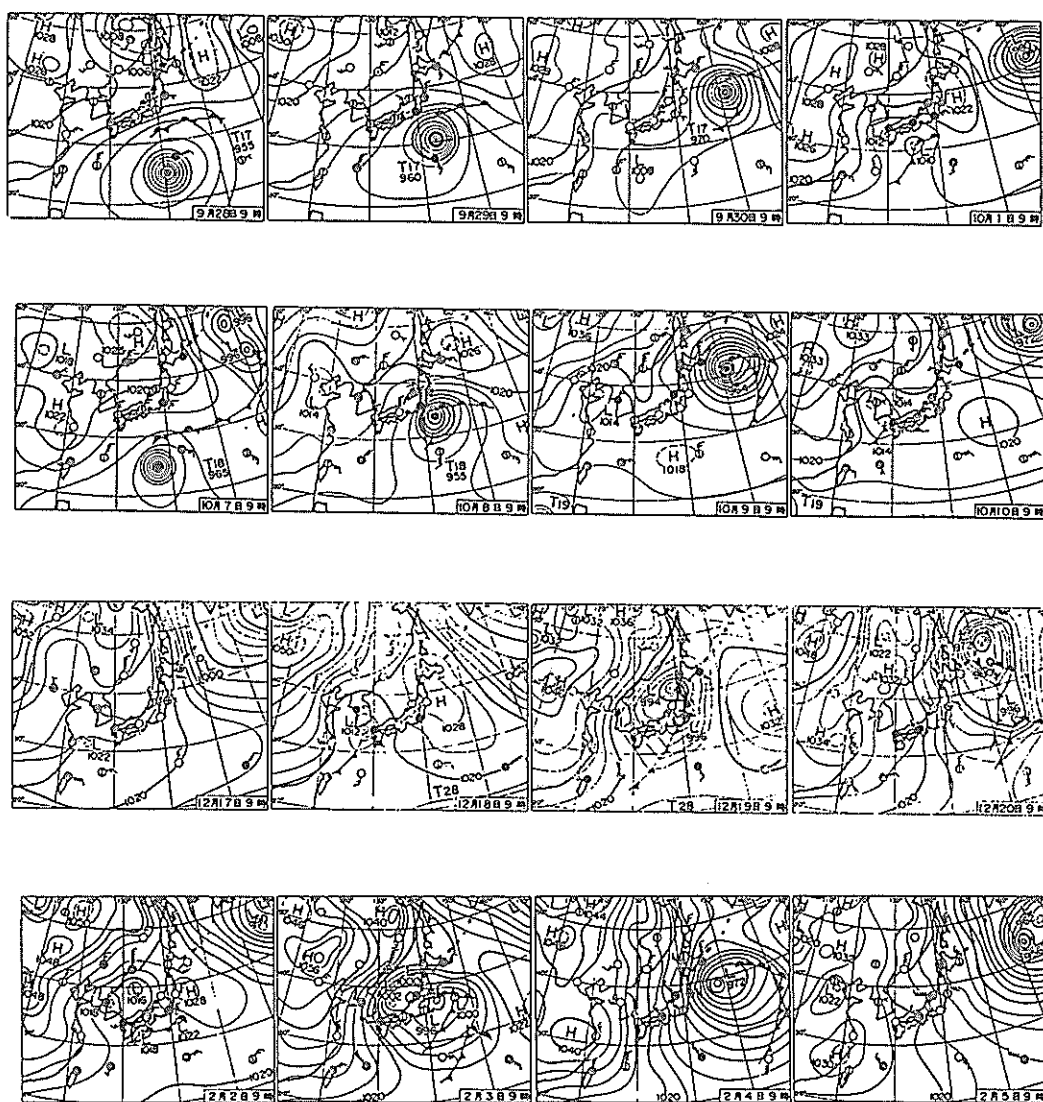
BDM と EMLM の方向スペクトルの推定値の特性

(図中の () 内の番号は表—8.3 のケース番号に対応しており、表—8.3 に示す波動量の組み合わせで解析したことを示している)

とは限らない。むしろ観測波動量が少ない方がより安定した推定値を推定し得るという点で都合がよい。ここに示した数値シミュレーション例では、EMLMの適用限界はせいぜい4成分の観測波動量までであり、それ以上の波動量を用いても推定精度はほとんど向上せず、むしろ異常な方向スペクトルが推定される可能性が高くなるようである。ただし、これはここに示した「いわき沖波浪観測システム」を対象とした場合の数値シミュレーション結果であり、他の観測系に対しては別途検討する必要がある。

8.4 解析対象期間の海象特性

種々の方向スペクトル推定法の現地観測データへの適用性、海洋波の方向スペクトル特性等を検討するために、特に図—8.5に示す4ケースの気象擾乱を対象として方向スペクトル解析を実施した。図—8.5(a), (b)は台風の例であり、(c), (d)は低気圧の例である。図—8.5(a)~(d)はそれぞれの気象擾乱時の波浪諸元の経時変化を示したものである。 $H_{1/3}$, $T_{1/3}$ はそれぞれ有義波高、有義波周期であり、 $\bar{\theta}$, θ_p はそれぞれ共分散法を用いて定義される平均波向、主波向であり、超音波式流速計および水圧式波高



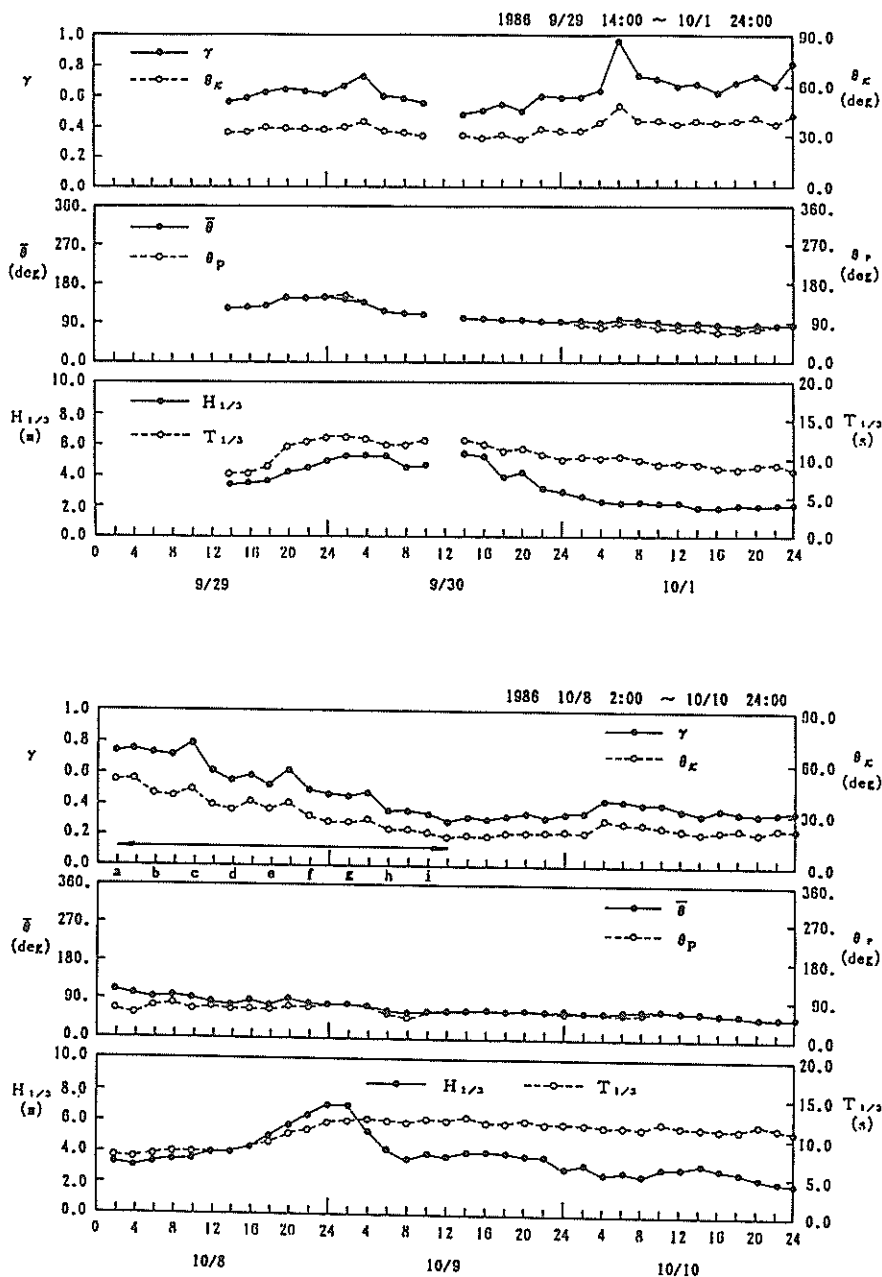
図—8.5 方向スペクトルの解析対象期間の天気図
((a)と(b)は台風の例であり、(c)と(d)は低気圧の例である)

計から得られた3成分の観測波動量を用いて次式により計算される。

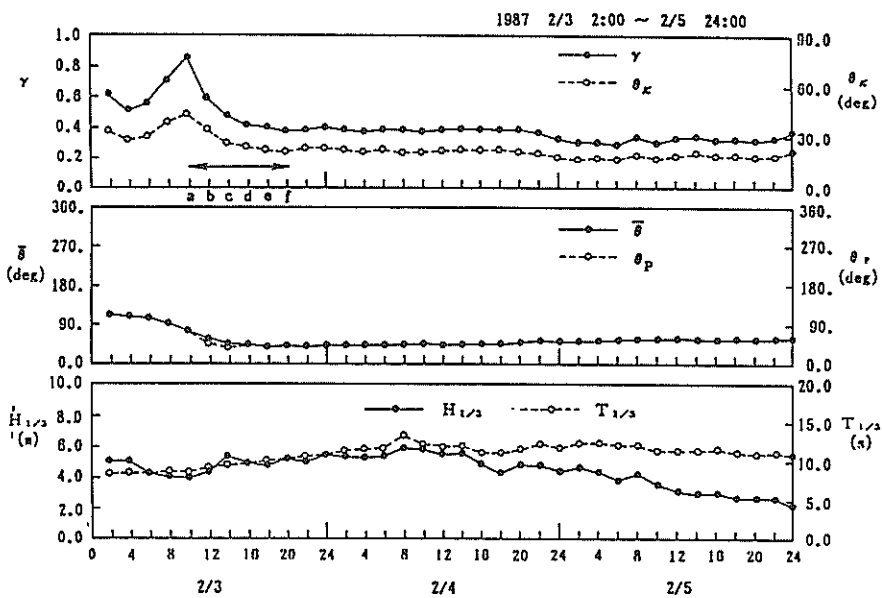
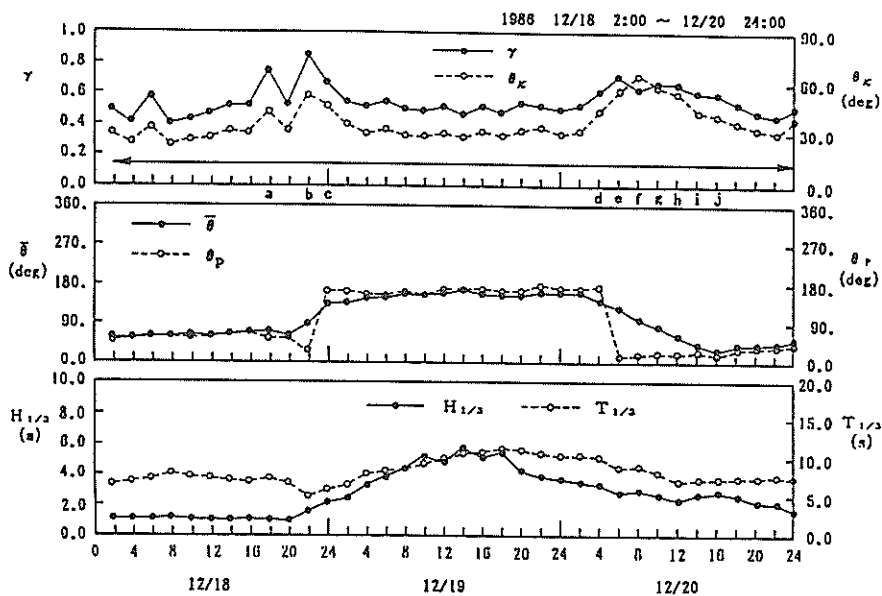
$$\bar{\theta} = \tan^{-1} \left(\frac{-\overline{pv}}{-\overline{pu}} \right) \quad (8.1)$$

$$\theta_p = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\overline{uv}}{u^2 - v^2} \right) \quad (8.2)$$

ここに、 p , u , v はそれぞれ水圧変動, x 軸方向の水粒子速度, y 軸方向の水粒子速度である。また、 γ , θ_k は同様に共分散法を用いて定義される量であり、 γ は Lon-



図—8.6 方向スペクトル解析対象期間の波浪諸元の経時変化図 (その1)
($H_{1/3}$: 有義波高, $T_{1/3}$: 有義波周期, $\bar{\theta}$: 平均波向, θ_p : 主波向,
 γ : 波長パラメータ, θ_k : 平均分散角)



図—8.6 方向スペクトル解析対象期間の波浪諸元の経時変化図 (その2)
 ($H_{1/3}$: 有義波高, $T_{1/3}$: 有義波周期, $\bar{\theta}$: 平均波向, θ_p : 主波向,
 γ : 波峰長パラメータ, θ_k : 平均分散角)

guet-Higgins¹³⁾の提案した long-crestedness parameter (波峯長パラメータ), θ_k は合田¹⁴⁾の提案した平均分散角であり, それぞれ次式で定義される。

$$\gamma = \sqrt{\frac{u^2 + v^2 - \sqrt{(u^2 - v^2)^2 + 4uv^2}}{u^2 + v^2 + \sqrt{(u^2 - v^2)^2 + 4uv^2}}} \quad (8.3)$$

$$\theta_k =$$

$$\tan^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{p^2 \cdot pu^2 - 2pu \cdot pv \cdot uv + pu^2 \cdot v^2}}{pu^2 + pv^2} \right\} \quad (8.4)$$

共分散値を用いて定義されるこれら諸量の特性については2.3で述べたとおりである。

図—8.6の例に見られるように, 平均波向 $\bar{\theta}$ および主波向 θ_p はいずれの場合にも, ほぼ一致した方向を示しているが, 例えば図—8.6(c)に見られるように大きくずれる場合もある。これは2.3で解説したように主波向が $\pm\pi$ の方向の差, すなわち波の進行・逆行の判別が不能である不備による場合, あるいは二方向波浪が90°以上の交差角で来襲する場合に生じるが, 方向スペクトル解析の結果からは, これらは二方向波浪の影響によるものと推察される。

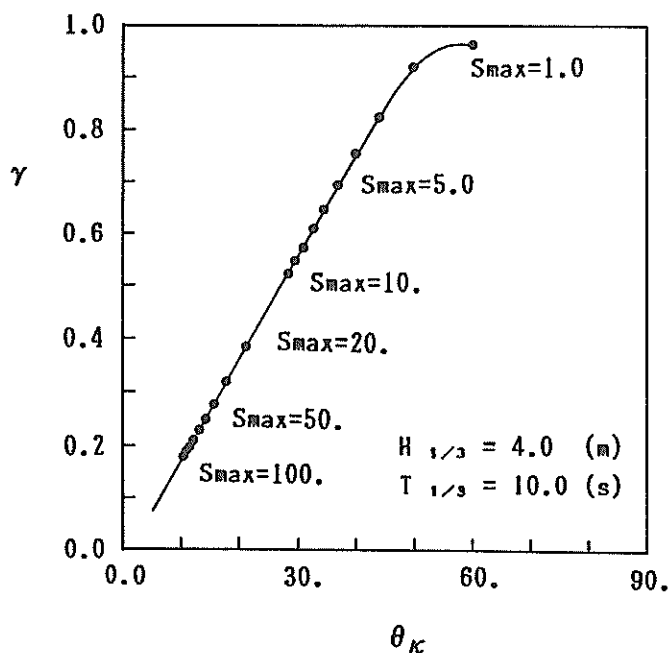
図—8.6の波峯長パラメータ γ および平均分散角 θ_k の経時変化を見ると, 一般に波高が増大するにつれて γ および θ_k は減少する傾向が見られる。しかしながら, 波

高の減衰時には, γ および θ_k は増大する場合もあれば, そのまま減少し続ける場合もある。これは台風や低気圧の気象擾乱の進行コースの相違によって, 波高減衰時にうねり性の波が長く残る場合や, 多方向の波浪が混在する場合など様々であり, それらの気象・海象特性の相違が波峯長パラメータ γ および平均分散角 θ_k の経時変化の相違として現われたためである。

図—8.7はいわき沖波浪観測システムに設置された水圧式波高計および超音波式流速計で計測される水圧および水粒子速度の時系列データの共分散値から得られる波峯長パラメータ γ および平均分散角 θ_k の, 特定の方向スペクトルの条件下での理論的關係を示したものである。用いた方向スペクトルの条件としては, 周波数スペクトル $S(f)$ として式 (2.31) ~ 式 (2.32) で表わされる JONSWAP 型の周波数スペクトル¹⁷⁾を, 方向分布関数 $G(\theta|f)$ としては式 (2.34) ~ 式 (2.37) で表わされる光易型方向関数¹⁸⁾を用いており, 次式で表わされる積分,

$$\begin{aligned} \overline{\xi_n \xi_n} &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} H_m(f, \theta) H_n(f, \theta) \\ &\quad \times [\cos(k(x_{mn} \cos \theta + y_{mn} \sin \theta))] \\ &\quad - i \sin\{k(x_{mn} \cos \theta + y_{mn} \sin \theta)\}] \\ &\quad \times S(f) G(\theta|f) d\theta df \end{aligned} \quad (8.5)$$

により共分散の理論値を求め, 式 (8.3) および式 (8.4)



図—8.7 波峯長パラメータ γ と平均分散角 θ_k の理論的關係

(周波数スペクトルとして JONSWAP 型スペクトル, 方向分布関数として光易型方向関数を想定した場合の波峯長パラメータ γ と平均分散角 θ_k の理論的關係を $S_{\max}$ をパラメータとして表示)

により γ と θ_k を計算して示したものである。なお、図—8.7では有義波高 $H_{1/3}$ および有義波周期 $T_{1/3}$ をそれぞれ 4m, 10秒と設定し、 S_{max} の関数として両者の関係を表示している。これは二方向波浪の判定の精度を高めることを目的として使用するのに便利である^{47), 48)}。すなわち、観測された γ および θ_k の共分散値が図—8.7に示す曲線に近い位置に分布すれば、方向スペクトルの詳細な形状の相違は別にして、観測された γ , θ_k は式 (2.31) と (2.34) で与えられる単峯型方向スペクトルの積分特性値に近い性質を持ち、観測値が $\gamma-\theta_k$ の理論曲線から大きく外れて分布する場合には二方向波浪である可能性が高い。

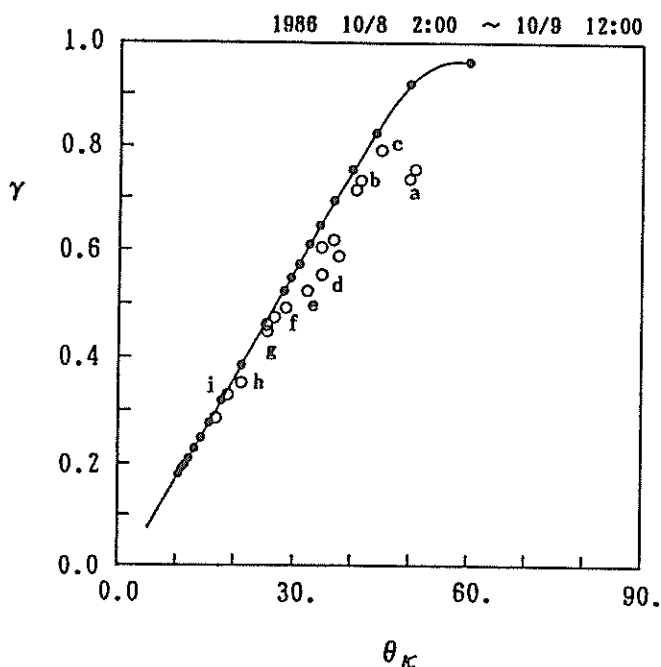
図—8.8(a)~(c)は図—8.6中の矢印で示す期間の波長パラメータ γ および平均分散角 θ_k を、図—8.7上にプロットしたものである。図—8.8(a)は図—8.6(b)の波高の増大・減衰期間の γ と θ_k を示したものであり、図—8.8(a)および図—8.6(b)に a, b, c, …… , i で示す順に変化している。図—8.8(a)に見られるように、波高の増大とともに S_{max} は増大し、最大有義波高の生じた10月8日24時前後(図—8.8(a)中、f, g)では S_{max} は約15程度の値となっている。その後、波高の減少とともに S_{max} はさらに増大し、うねり性の波に推移している。

図—8.8(b)は1986年12月18日~20日までの全期間の γ

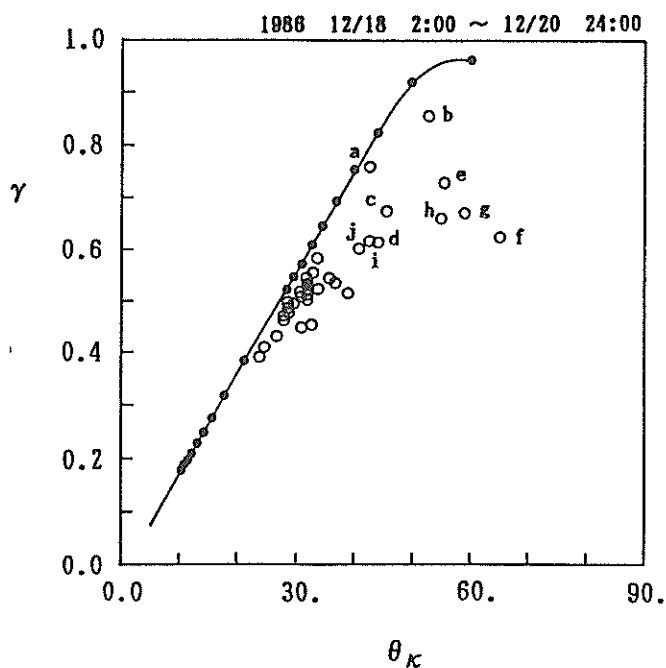
と θ_k を示したものである。図—8.6(c)で平均波向 $\bar{\theta}$ と主波向 θ_p の大きく異なる期間 (図—8.6(c)および図—8.8(b)中で a, b, c, …… , j と表示) では観測された γ と θ_k は図中の $\gamma-\theta_k$ の曲線と大きくずれて分布しているが、それ以外はほぼ $\gamma-\theta_k$ の曲線に近く、特に高波高時には S_{max} は10程度となっていることが分かる。なお、図—8.8(b)中で、観測された a, …… , j の γ , θ_k が $\gamma-\theta_k$ の曲線と大きくずれた位置に分布しているのは、前述のように二方向波浪の影響によるものである。

図—8.8(c)は図—8.6(d)の γ および θ_k が急激に減少した期間 (図—8.6(d)中で a, b, …… , f と表示) を示したものである。図—8.8(c)に見られるように $S_{max}=3$ 程度から $S_{max}=20$ までほぼ $\gamma-\theta_k$ の曲線に沿って S_{max} が増大している。この間に、波向は80°(ほぼ E 方向)から44°(NE 方向)に変化し、有義波高も3.88m から5.35m に増大していることから、風波の発達に伴う γ , θ_k の推移を示しているものと思われる。

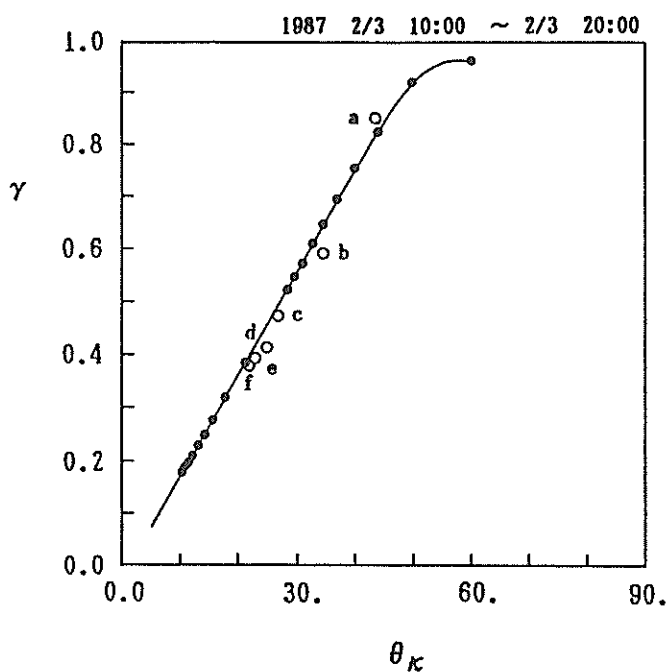
以上の3つの例に見られるように、海洋波が発達し、減衰する過程において、比較的発達した単峯型方向スペクトルの平均分散角 θ_k や波長パラメータ γ などの方向スペクトルの積分特性量は、実際の詳細な方向スペクトル形状の相違は別にしても、周波数スペクトルとして JONSWAP 型、方向分布関数として光易型方向関数



図—8.8(a) 現地観測データから算定した波長パラメータと平均分散角 θ_k の関係
(現地観測データから算定された γ と θ_k を図—8.7上にプロットしたものである。
図中の a, b, …… , i は図—8.6(b)の a, b, …… , i に対応している)



図—8.8(b) 現地観測データから算定した波長パラメータと平均分散角の関係
(現地観測データから算定された γ と θ_K を図—8.7上にプロットしたものである。
図中の a, b, ..., j は図—8.6(c)の a, b, ..., j に対応している)



図—8.8(c) 現地観測データから算定した波長パラメータと平均分散角 θ_K の関係
(現地観測データから算定された γ と θ_K を図—8.7上にプロットしたものである。
図中の a, b, ..., f は図—8.6(d)の a, b, ..., f に対応している)

を想定した場合の方向スペクトルの積分特性量に近い性質を示す場合が多いようである。

8.5 方向スペクトル推定法と観測波動量の相違による方向スペクトル推定値の特性

8.3では数値シミュレーション法を利用してBDMとEMLMの観測波動量の相違による各々の手法の推定精度の検討を行ったが、ここでは現地観測データをもとにBDM, EMLM, MEPを用いて同様の検討を行うこととする。

(1) 一方向波浪の方向スペクトルの推定精度

図—8.9は一方向波浪を対象として、観測波動量の相違によるBDMとEMLMの推定精度を比較したものである。図—8.9の左側にBDMの推定値を、右側に左側のBDMと同じ観測波動量を用いてEMLMにより推定した方向スペクトルを示している。また、図—8.9中の()内の番号は表—8.3あるいは図—8.4の番号と一致しており、表—8.3に示す観測波動量を用いたことを示している。図—8.9に見られるようにBDMで推定された方向スペクトルは観測波動量の相違によらずほとんど一定の方向スペクトル形状を示している。このように観測波動量の相違によらずほぼ一定の方向スペクトルが推定されることは、BDMで推定された図—8.9の方向スペクトルは真の方向スペクトルに近い推定値を示しているものと思われる。

一方、EMLMで推定された方向スペクトルは、一般にはBDMに比べて低めのエネルギーを示しているものの、例えば図—8.9(8)に見られるようにBDMよりも大きなエネルギー・ピーク値を示す場合もある。また、図—8.9(5)に見られるように、エネルギー・ピークが二つに分かれている例もあり、EMLMでは観測波動量の種類や配置などによってそれぞれ異なる形状の方向スペクトルが推定される場合がある。

図—8.10は図—8.9と同じ観測データを対象とし、方向分布関数の計算には水圧式波高計および超音波式流速計の3成分観測データ(u , v)を用い、パワースペクトルには図—8.9と同じスペクトルを用いて、MEPおよびEMLMにより方向スペクトル解析した例である。図—8.10に見られるように、MEPおよびEMLMはいずれも図—8.9のBDMに比べて推定精度が劣っている。しかしながら、図—8.10の例では、MEPのエネルギー・ピーク値はEMLMのエネルギー・ピーク値の約1.4倍の値を示しており、よりBDMに近い方向スペクトル形状を推定し得る。したがって、3成分観測データを対象とする場

合にはMEPはEMLMよりも優れた方向スペクトル推定法であると言える。

(2) 二方向波浪の方向スペクトルの推定精度

図—8.11はうねりと風波が同時に来襲する二方向波浪を対象として、図—8.9と同様の検討を行ったものである。図—8.11に見られるように、BDMはいずれの波動量と組み合わせた場合にも、方向スペクトルの推定値はあまり変化していない。一方、EMLMは少ない観測波動量を用いる場合に、よりシャープな方向スペクトル形状を推定する傾向が見られるものの、エネルギー・ピーク値はいずれの場合にもBDMに比べてかなり小さ目である。

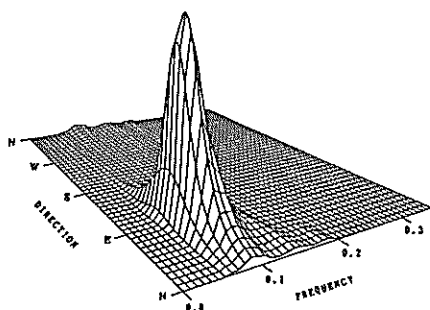
図—8.12は3成分観測データを用いて、MEPとEMLMの推定精度の比較を行ったものである。図—8.10の場合と同様に、この場合もMEPの推定値はEMLMの推定値よりもBDMに近い推定値を示しており、MEPの方がEMLMに比べて推定精度が良いことが分かる。

以上、図—8.9—図—8.12より、3成分観測データを対象とする場合にはMEPが、4成分以上の観測データを対象とする場合にはBDMが、EMLMに比べて推定精度の良い方向スペクトル推定法であると言える。

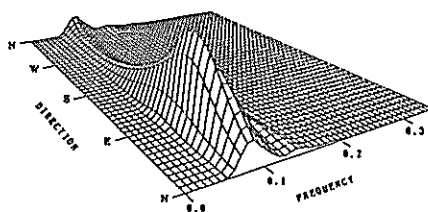
(3) 方向スペクトルの経時変化

図—8.13は7つの観測波動量の全てを用いてBDMにより方向スペクトル解析した結果を、時系列順に並べたものである。図—8.13の左側に方向スペクトルの立体図を、右側にその等値線図²⁰⁾を示している。等高値は低い方から順に 10^0 , 10^2 , 10^4 , 10^6 , …… ($m^2 \text{sec./rad.}$)として描いている。解析の対象期間は1986年9月29日16時～9月30日22時までの、台風17号が太平洋北東岸を北東進した期間である。台風の接近とともに、まず周期の長いうねりが来襲し、その後、風速が強まるとともに風波が発達して、うねりと風波の二方向波浪に推移している。さらに風速が強まって風波の卓越した一方向波浪に推移し、台風が遠ざかるにつれて、うねり性の一方向波浪となり、次第に減衰している。

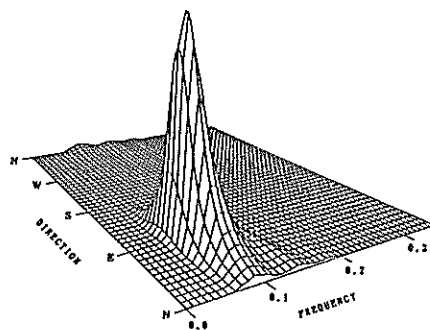
ここで示した例のような沖波の方向スペクトルを、この様に高精度で定常的に観測している例は世界的に見てもあまり例がない。海洋波の方向スペクトルは、気象擾乱の種類、規模、コース等に依存して様々な出現特性を示すと考えられるが、その特性はよく分かっているとは言えない。この意味でも、この様な高精度かつ定常的な方向スペクトル観測を実施し、多様な方向スペクトルの出現特性を把握しておくことは重要であり、今後、いわ



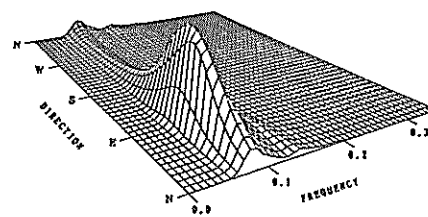
(1) 使用 Channel : Ch.1,2,3,4,5,6,7 (BDM)



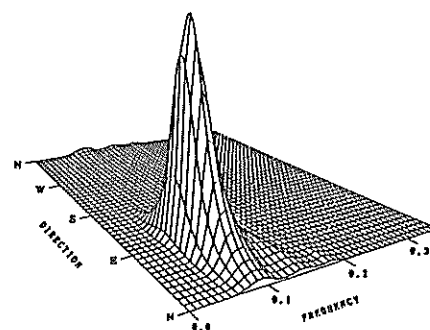
(1) 使用 Channel : Ch.1,2,3,4,5,6,7 (EMLM)



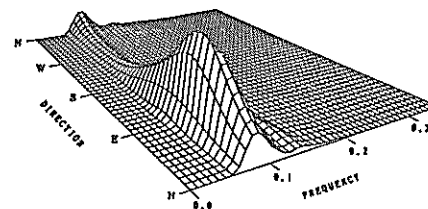
(3) 使用 Channel : Ch.1,3,4,5,6,7 (BDM)



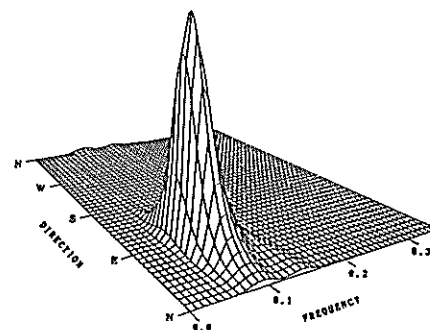
(3) 使用 Channel : Ch.1,3,4,5,6,7 (EMLM)



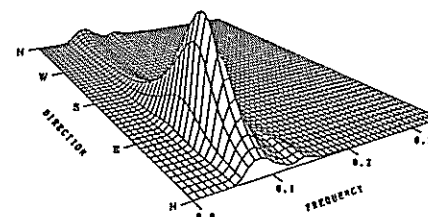
(4) 使用 Channel : Ch.1,2,4,5,6,7 (BDM)



(4) 使用 Channel : Ch.1,2,4,5,6,7 (EMLM)



(7) 使用 Channel : Ch.3,4,5,6,7 (BDM)

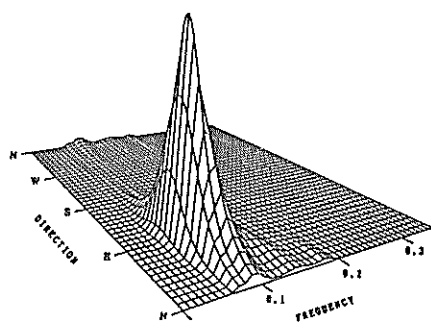


(7) 使用 Channel : Ch.3,4,5,6,7 (EMLM)

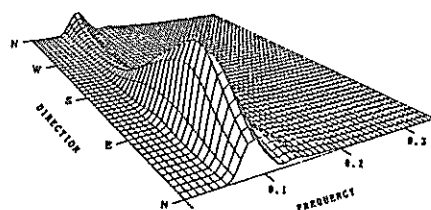
図—8.9 現地観測データを用いた場合の観測波動量の組み合わせの相違による

BDM と EMLM の方向スペクトルの推定値の特性 (その1)

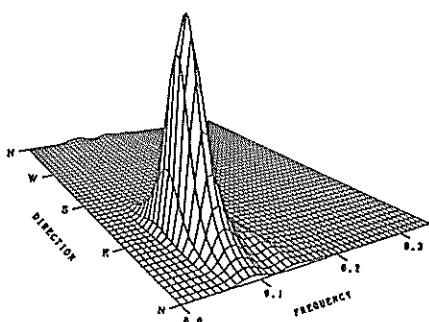
(一方向波浪の解析例, 左図は BDM による推定値, 右図は EMLM による推定値である。また, 図中の () 内の番号は表—8.3のケース番号に対応しており, 表—8.3に示す波動量の組み合わせで解析したことを示している。)



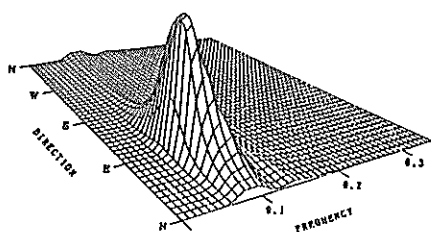
(9) 使用 Channel : Ch.1,2,5,6,7 (BDM)



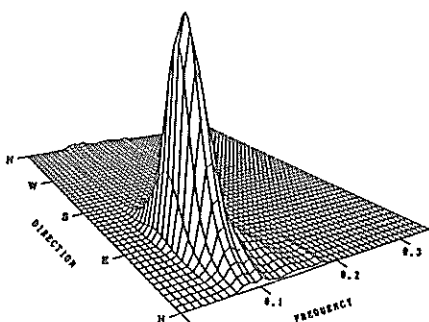
(9) 使用 Channel : Ch.1,2,5,6,7 (EMLM)



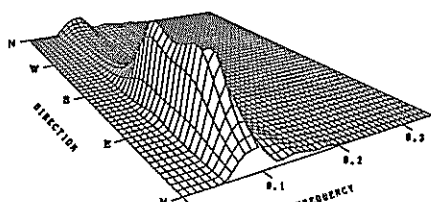
(14) 使用 Channel : Ch.1,5,6,7 (BDM)



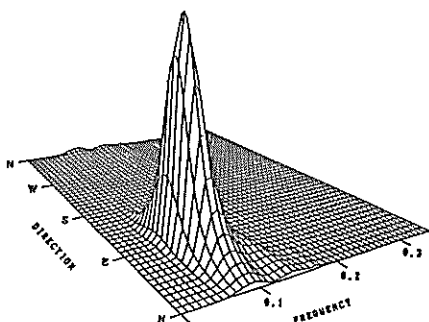
(14) 使用 Channel : Ch.1,5,6,7 (EMLM)



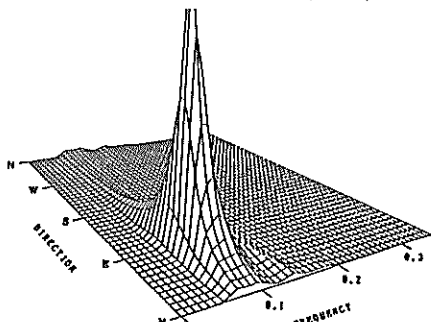
(15) 使用 Channel : Ch.2,5,6,7 (BDM)



(15) 使用 Channel : Ch.2,5,6,7 (EMLM)



(18) 使用 Channel : Ch.2,3,5,6 (BDM)

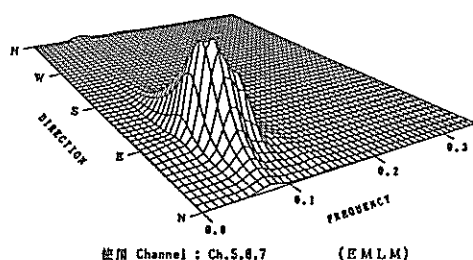
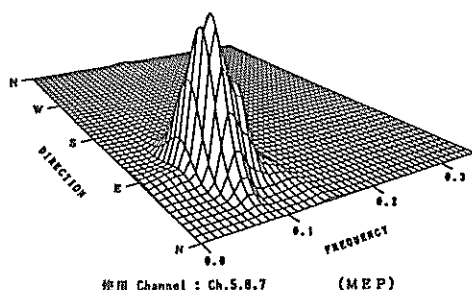


(18) 使用 Channel : Ch.2,3,5,6 (EMLM)

図—8.9 現地観測データを用いた場合の観測波動量の組み合わせの相違による

BDM と EMLM の方向スペクトルの推定値の特性 (その2)

(一方向波浪の解析例, 左図は BDM による推定値, 右図は EMLM による推定値である。また, 図中の () 内の番号は表—8.3 のケース番号に対応しており, 表—8.3 に示す波動量の組み合わせで解析したことを示している。)



図—8.10 3成分観測データを用いた場合の MEP と EMLM の方向スペクトルの推定値の特性
(図—8.9 と同じデータを用いた解析例であり、左図は MEP による推定値、
右図は EMLM による推定値である)

き沖波浪観測システムで観測され、蓄積される方向スペクトルの観測データは、港湾建設にともなう設計、施工、維持、管理に関連する有効な波浪情報として、あるいは海洋波の方向スペクトル特性の解明、波浪推算法、波浪予測手法の開発研究等、様々な目的に対して、種々の形で有効活用が図られて行くものと期待される。

8.6 海洋波の方向スペクトル特性に関する 2, 3 の検討

前述したように海洋波の方向スペクトルは、気象擾乱の種類、規模、コース等の様々な要因により、多様な特性を示すが、ここではいわき沖波浪観測システムで1986年10月～1982年2月に観測された方向スペクトルの内、特に高波をもたらした気象擾乱4ケースを対象として事例解析的に2, 3検討することとする。

図—8.14～図—8.17は BDM により推定された方向スペクトルの特性を種々のパラメータにより示したものである。ただし、図—8.14～図—8.17では BDM の計算において超パラメータ u が125.0より小さい値を示す周波数領域でのみパラメータ値を表示している。これは超パラメータ u が125.0より大きい値を示す場合、方向スペクトルは平坦になり、一様分布に近い形状を示すことから、方向スペクトルに関する情報とノイズの混入の度合いのバランスから、BDM では方向スペクトルの情報を明確に抽出し得なかった可能性があるとして、この周波数領域のパラメータ表示を行わなかったためである。

図—8.14～図—8.17の上段左側(a)は周波数スペクトルを、(b)は各周波数ごとに方向スペクトルのエネルギー・ピークを北(N)を0°として時計回りの方向に角度で示している。また、(c)は光易型方向関数で用いられている方向集中度パラメータ S を示している。なお、方向集中度パラメータ S の計算に際しては、推定された方向分布関数に式(2.34)の光易型方向関数を当てはめて S

を算出するのではなく、BDMにより推定された方向スペクトルをもとに式(3.5)の関係を利用して、水面の上下速度 η_t および x, y 方向の水面傾斜 η_x, η_y の相互間のクロススペクトルを算出し、以下の式により S を計算した。

$$S = (S_1 + S_2) / 2 \quad (8.6)$$

ここに、

$$S_1 = \frac{C_1(\omega)}{1 - C_1(\omega)} \quad (8.7)$$

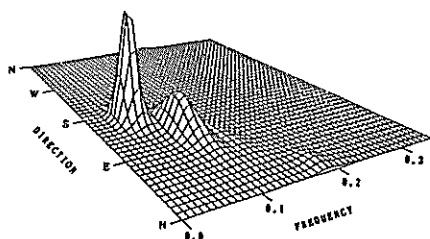
$$S_2 = \frac{1 + 3C_2(\omega) + \sqrt{\{1 + 3C_2(\omega)\}^2 + 8C_2(\omega)\{1 - C_2(\omega)\}}}{2\{1 - C_2(\omega)\}} \quad (8.8)$$

$$C_1(\omega) = \frac{\omega}{k} \cdot \frac{\sqrt{\{C_{12}(\omega)\}^2 + \{C_{13}(\omega)\}^2}}{C_{11}(\omega)} \quad (8.9)$$

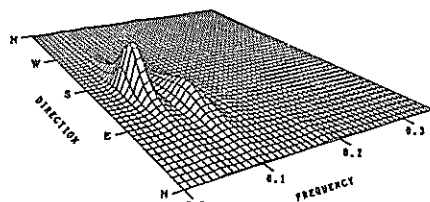
$$C_2(\omega) = \frac{\sqrt{\{C_{22}(\omega) - C_{33}(\omega)\}^2 + 4\{C_{23}(\omega)\}^2}}{C_{22}(\omega) + C_{33}(\omega)} \quad (8.10)$$

であり、 $C_{mn}(\omega)$ は $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\eta_t, \eta_x, \eta_y)$ とした場合のクロススペクトル $\Phi_{mn}(\omega)$ のコ・スペクトルである。

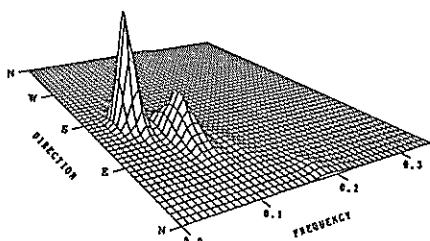
光易¹⁸⁾によると、クローバ型パイによる観測結果では式(8.7)の S_1 と式(8.8)の S_2 とがほぼ同一の値を示したとのことであり、方向集中度パラメータの標準化のための解析では式(8.6)のように、 S_1 と S_2 の平均値によって整理している。方向分布関数が、一様風域で発達した風波の標準形である光易型方向関数のように、 $\cos \theta$ のべき乗で表わされる場合には、 S_1 と S_2 は同一の値となるが、ここで対象としている激しい気象擾乱の場合には、必ずしも S_1 と S_2 は近い値にはならない。これは



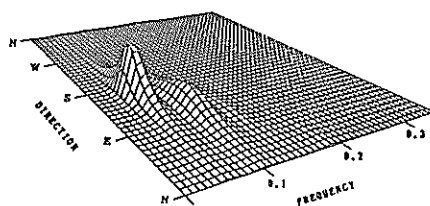
(1) 使用 Channel : Ch.1,2,3,4,5,6,7 (BDM)



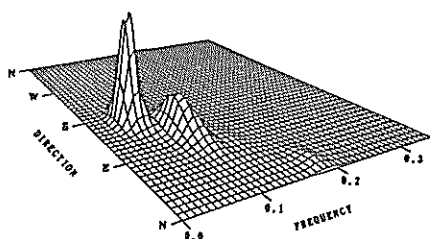
(1) 使用 Channel : Ch.1,2,3,4,5,6,7 (EMLM)



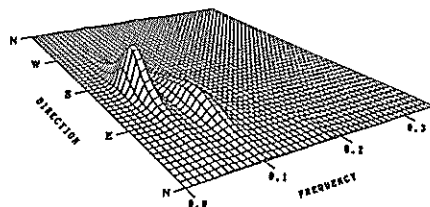
(3) 使用 Channel : Ch.1,3,4,5,6,7 (BDM)



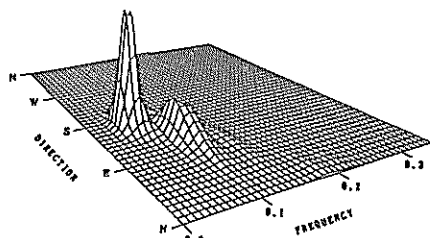
(3) 使用 Channel : Ch.1,3,4,5,6,7 (EMLM)



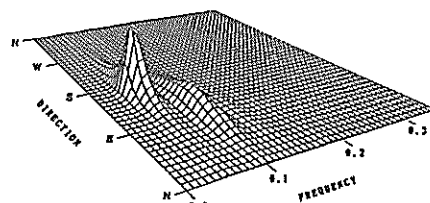
(4) 使用 Channel : Ch.1,2,4,5,6,7 (BDM)



(4) 使用 Channel : Ch.1,2,4,5,6,7 (EMLM)



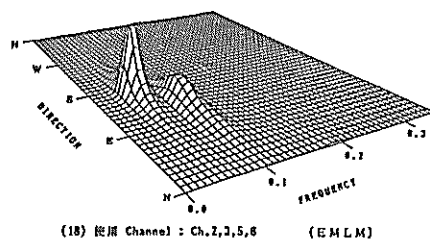
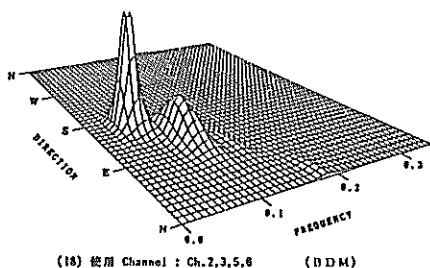
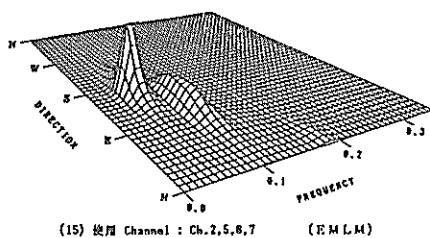
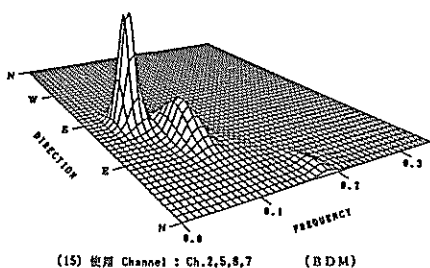
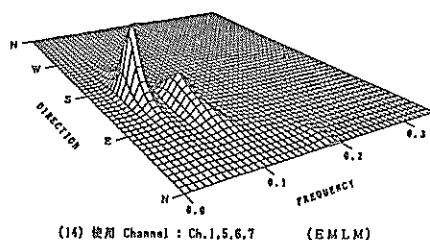
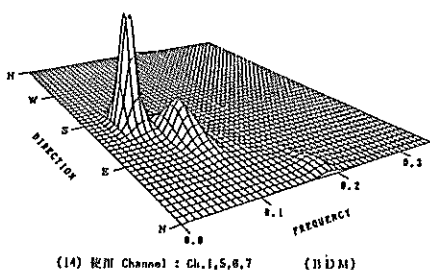
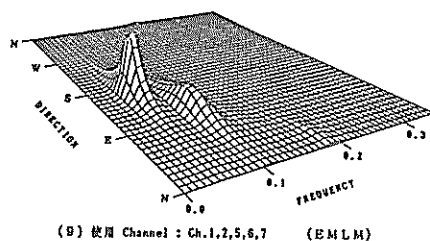
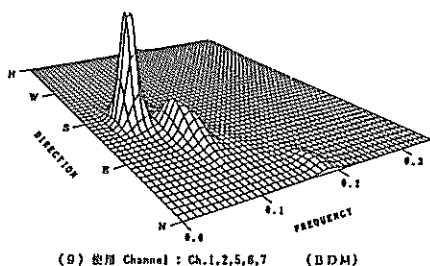
(7) 使用 Channel : Ch.3,4,5,6,7 (BDM)



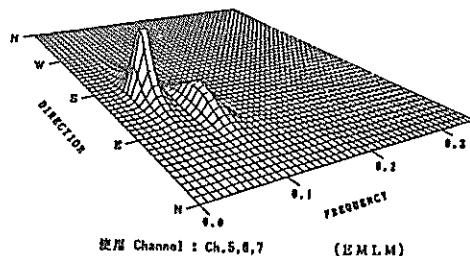
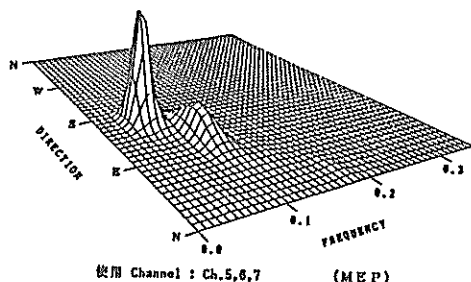
(7) 使用 Channel : Ch.3,4,5,6,7 (EMLM)

図—8.11 現地観測データを用いた場合の観測波動量の組み合わせの相違による
BDM と EMLM の方向スペクトルの推定値の特性 (その1)

(二方向波浪の解析例、左図は BDM による推定値、右図は EMLM による推定値である。また、図中の () 内の番号は表—8.3 のケース番号に対応しており、表—8.3 に示す波動量の組み合わせで解析したことを示している。)



図—8.11 現地観測データを用いた場合の観測波動量の組み合わせの相違による
BDM と EMLM の方向スペクトルの推定値の特性 (その2)
(二方向波浪の解析例, 左図は BDM による推定値, 右図は EMLM による推定値である。また, 図中の () 内の番号は表—8.3のケース番号に対応しており, 表—8.3に示す波動量の組み合わせで解析したことを示している。)



図—8.12 3成分観測データを用いた場合の MEP と EMLM の方向スペクトルの推定値の特性
(図—8.9 と同じデータを用いた解析例であり、左図は MEP による推定値、右図は EMLM による推定値である)

観測された方向分布関数が $\cos \theta$ のべき乗とは異なる形状をしているためである。しかしながら、ここでは便宜的に光易ら¹⁶⁾と同様に、式 (8.6) により S を計算して表示し、その特性を検討することとした。

図—8.14～図—8.17の下段左側(d)は BDM で方向スペクトルを推定する際に算出された式 (5.64) の ABIC (赤池のベイズ型情報量基準) 値であり、この値が小さいほど推定された方向スペクトルは確からしい推定値であろうと解釈される。(e)は BDM で方向スペクトルを推定する際に算出された式 (5.63) の誤差の標準偏差 σ である。(f)は(e)の誤差の標準偏差 σ を、BDM で方向スペクトルを推定する際に用いた超パラメータ u で除した値 σ/u であり、式 (5.31) で表わされる x_k の2回差分値の標準偏差である。この値が小さいほど方向分布関数は滑らかな形状を示すものと解釈される。

(1) 一方向波浪の方向スペクトル特性

図—8.14～図—8.15は一方向波浪の方向スペクトルと見なされる場合を対象として、種々のパラメータを示したものである。図—8.14と図—8.15の(b)に見られるように、周波数スペクトルのエネルギーの卓越した周波数領域では、各周波数ごとのエネルギー・ピークは、ほぼ同一方向にそろっており、一方向波浪であることが分かる。この場合、(c)に見られるように周波数スペクトルのピーク周波数よりも高周波数側では、光易型方向関数と同様に、方向集中度パラメータ S は平均的に周波数 f の $-5/2$ 乗で減少するようである。また、(d)、(e)に見られるように、エネルギー・ピーク周波数の近傍では ABIC 値や誤差の標準偏差 σ は小さな値を示しており、それよりも低周波数側および高周波数側でそれらの値が増大している。これは、方向スペクトルのエネルギー・ピーク周波数の近傍では、誤差は小さく、推定される方向スペクトルも、より確からしい推定値であることを示している。

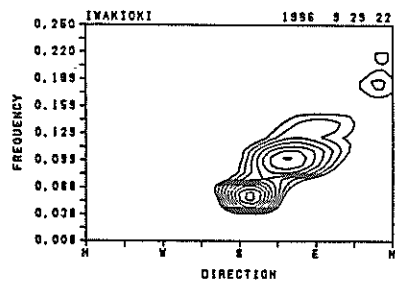
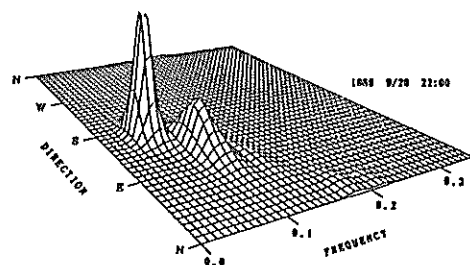
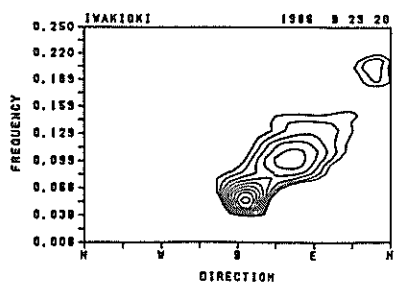
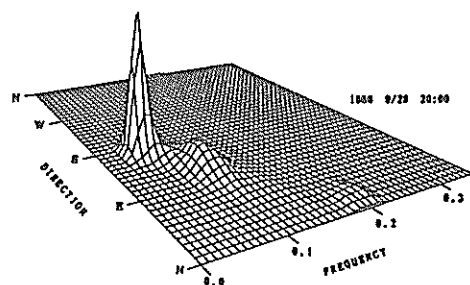
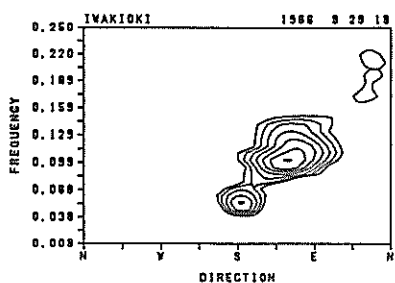
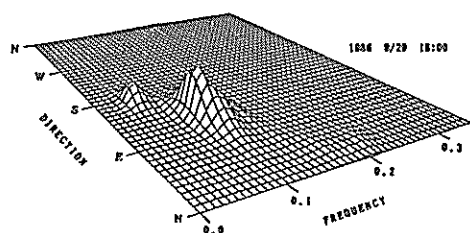
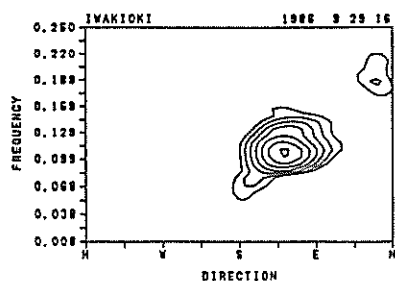
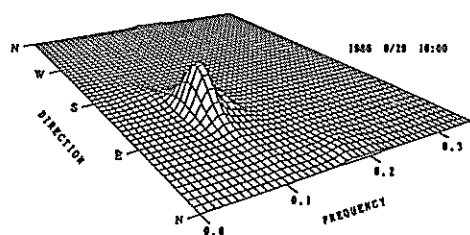
また、(f)に示す σ/u はそれぞれの図の(c)に示す S に似た傾向を示している。

上記の2例に見られるように、各周波数ごとに平均的にほぼ同一方向に進行する風波の方向スペクトルの特性は、光易型方向関数で示されている特性 (周波数スペクトルのピーク周波数よりも高周波数側で、方向集中度パラメータ S は $-5/2$ 乗で減少する) と一致する。しかしながら、BDM で方向スペクトルを推定する際に算出された ABIC、 σ 、 σ/u 等のパラメータについては、各観測ケースごとに周波数 f に関して変動が大きく、一般的な関係は見い出せていない。これらについては、今後のデータの蓄積を待って、さらに検討する必要がある。

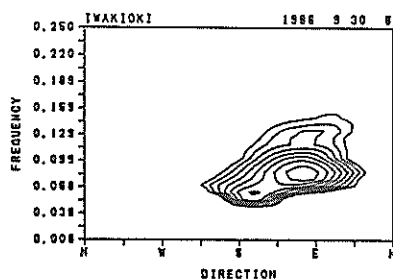
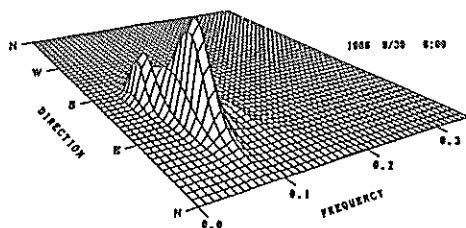
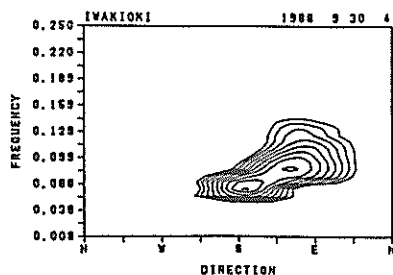
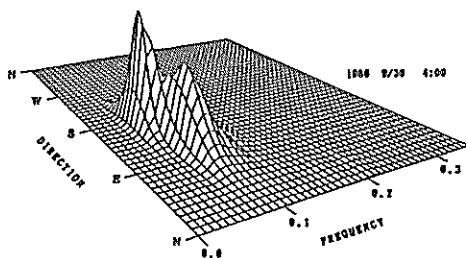
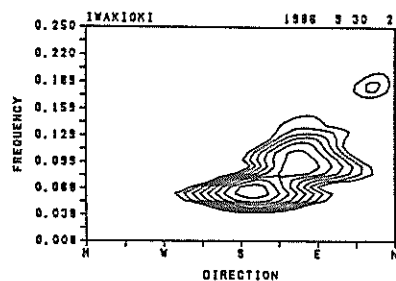
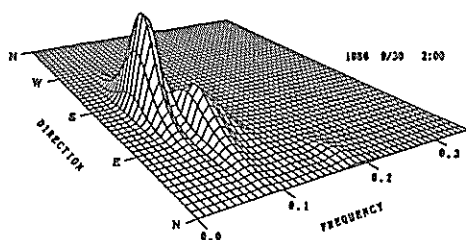
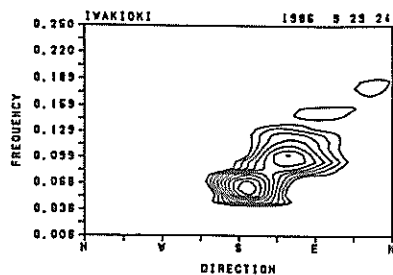
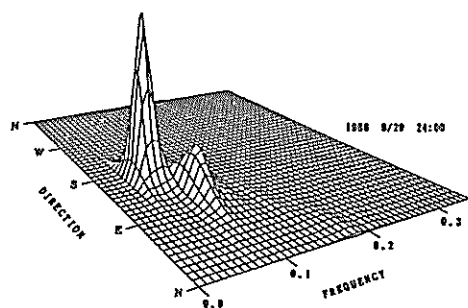
(2) 二方向波浪の方向スペクトル特性

図—8.16および図—8.17は各周波数ごとに波向が異なる多方向波浪の方向スペクトルを対象として、その特性を示したものである。

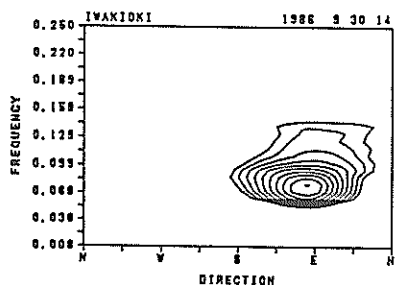
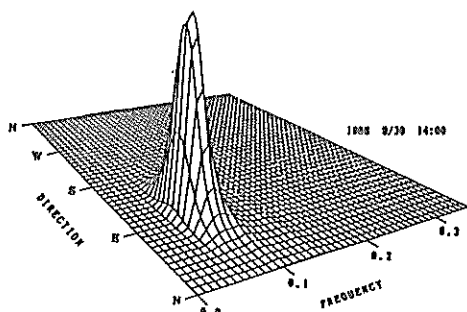
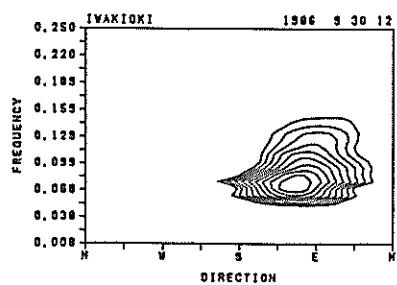
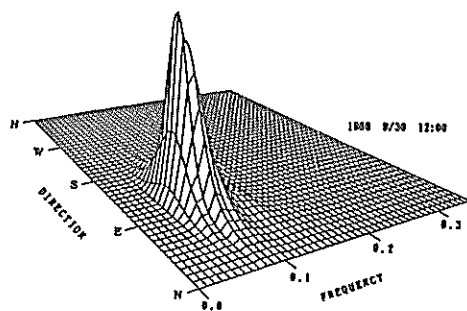
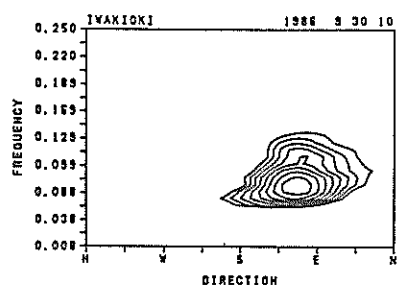
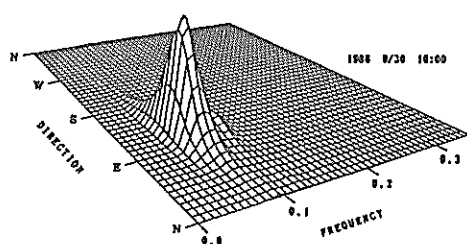
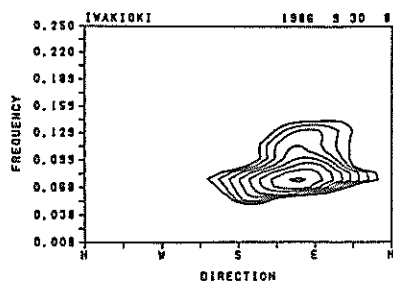
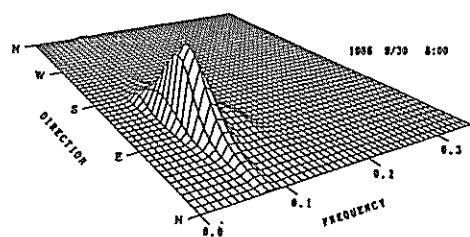
図—8.16(a)では周波数スペクトルに明確な2つのピークが見られ、これに対応して(b)に示す周波数ごとの波向も異なっている。また、(c)の方向集中度パラメータ S は(b)の波向に対応して明確に3つのピークがみられ、そのピーク値は10前後と、いずれもほぼ同程度の値となっている。図—8.14～図—8.15のように単一ピークの周波数スペクトルの場合には方向集中度パラメータ S は光易型方向関数に近い特性を示したが、図—8.16のように周波数スペクトルに複数のピークが見られる場合には、方向集中度パラメータ S は周波数 f に対して変化が大きく、必ずしも平均的に $-5/2$ 乗で減少しない。図—8.16(d)、(e)に示す ABIC および σ は、前例と同様に周波数スペクトルのピーク周波数近傍で最小値を示している。また、(f)の σ/u は(c)の方向集中度パラメータ S と似た傾向が見られるが、その対応関係も前例と同様にあまり明確ではない。



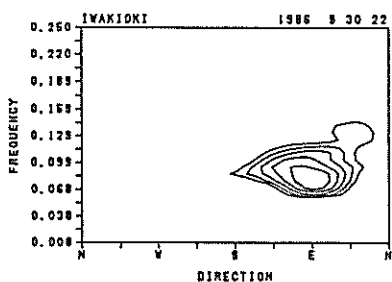
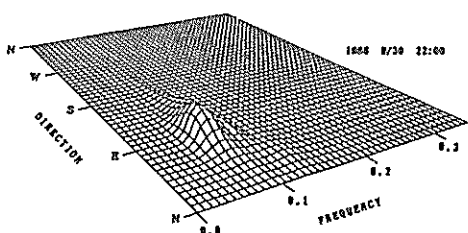
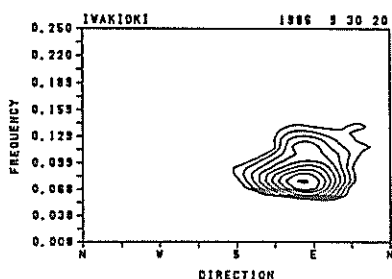
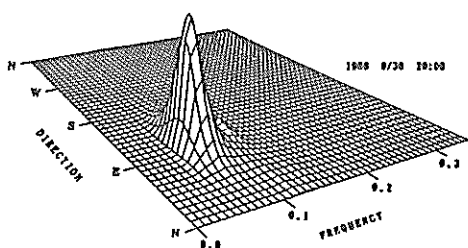
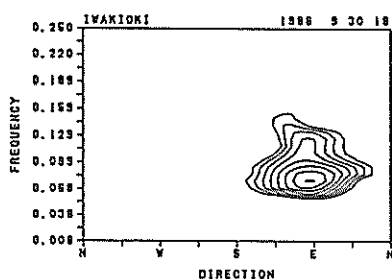
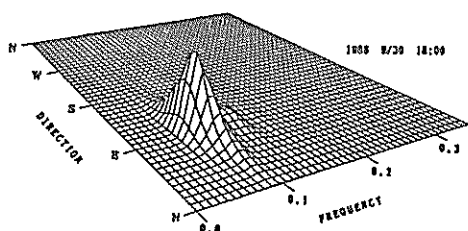
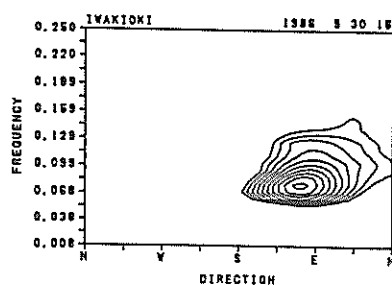
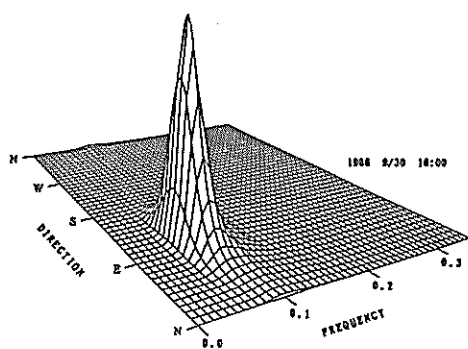
図—0.13 BDMにより推定された方向スペクトルの経時変化図（その1）
（1986年9月29日16時～9月29日22時までの解析例を2時間ごとに図示）



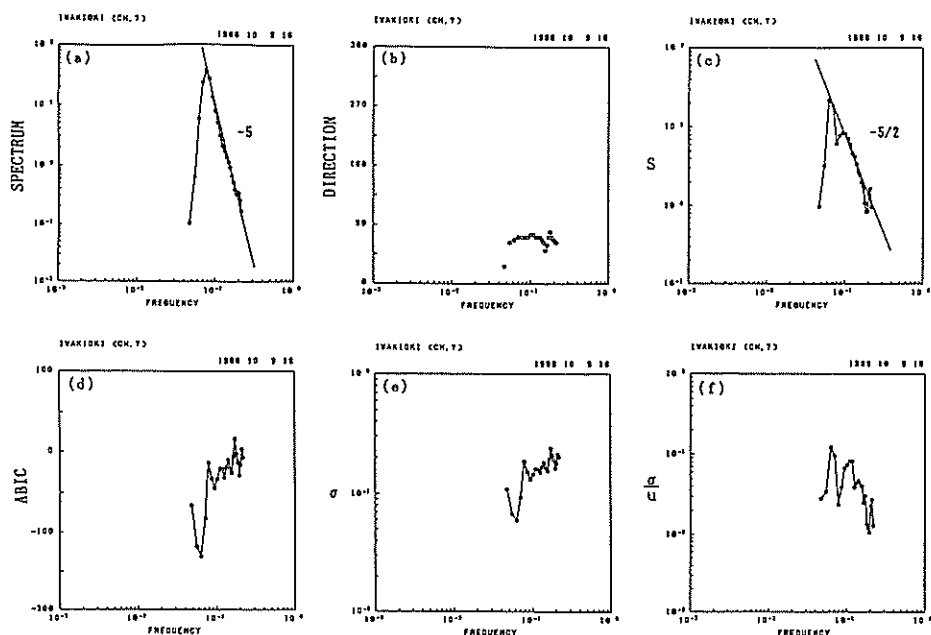
図—8.13 BDMにより推定された方向スペクトルの経時変化図（その2）
（1986年9月29日24時～9月30日6時までの解析例を2時間ごとに図示）



図—8.13 BDMにより推定された方向スペクトルの経時変化図（その3）
（1986年9月30日8時～9月30日14時までの解析例を2時間ごとに図示）

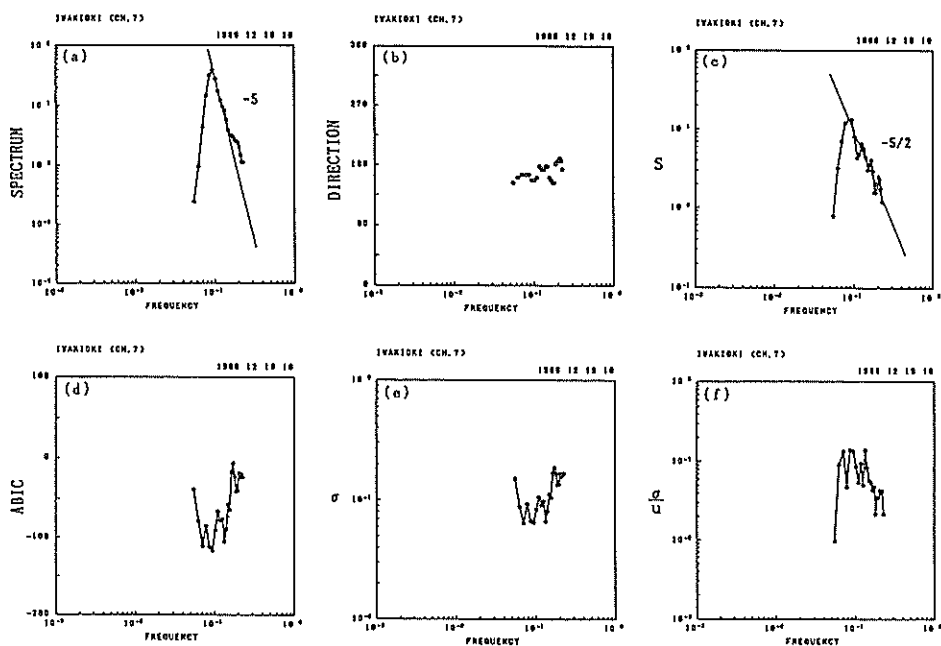


図—B.13 BDMにより推定された方向スペクトルの経時変化図（その4）
（1986年9月30日16時～9月30日22時までの解析例を2時間ごとに図示）



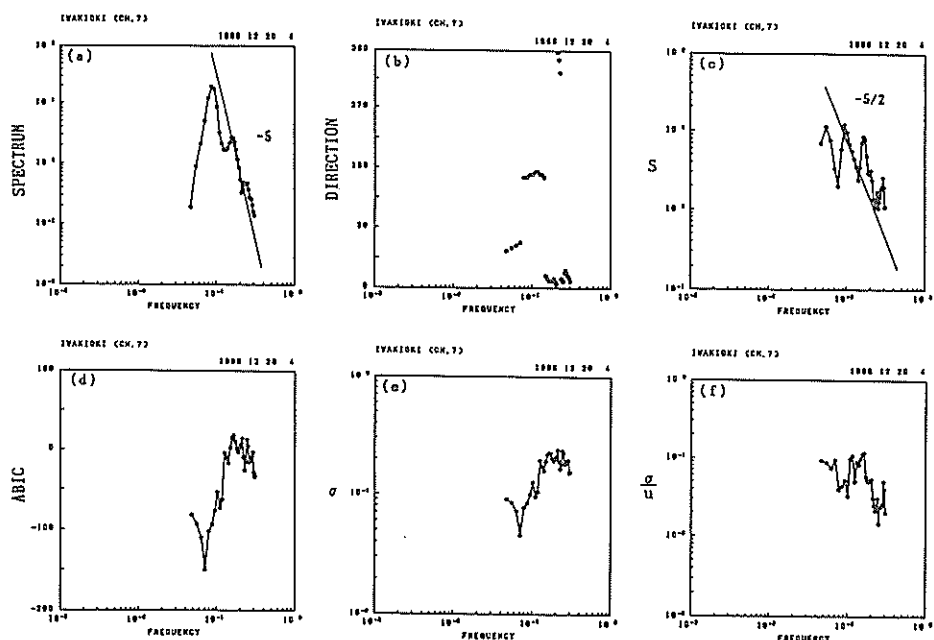
図—8.14 一方向波浪の方向スペクトルの種々のパラメータの周波数特性
(1986年10月9日16時)

((a)は周波数スペクトル, (b)は各周波数ごとの波のエネルギーの伝播方向, (c)は方向集中度パラメータ S , (d)は ABIC, (e)は式 (5.63) の σ , (f)は(e)の値を超パラメータで除した値 σ/u)



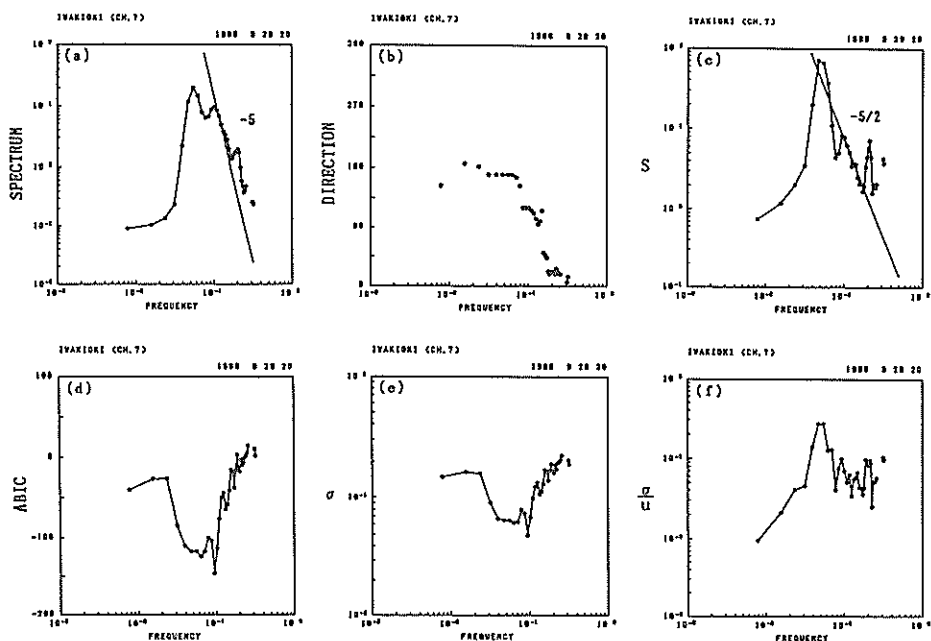
図—8.15 一方向波浪の方向スペクトルの種々のパラメータの周波数特性
(1986年12月19日10時)

((a)は周波数スペクトル, (b)は各周波数ごとの波のエネルギーの伝播方向, (c)は方向集中度パラメータ S , (d)は ABIC, (e)は式 (5.63) の σ , (f)は(e)の値を超パラメータ u で除した値 σ/u)



図—8.16 多方向波浪の方向スペクトルの種々のパラメータの周波数特性
(1986年12月20日4時)

((a)は周波数スペクトル, (b)は各周波数ごとの波のエネルギーの伝播方向, (c)は方向集中度パラメータ S , (d)は ABIC, (e)は式 (5.63) の σ , (f)は(e)の値を超パラメータ u で除した値 σ/u)



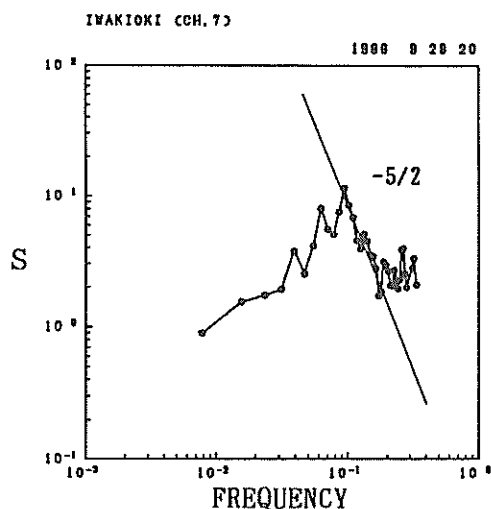
図—8.17 多方向波浪の方向スペクトルの種々のパラメータの周波数特性
(1986年9月29日20時)

((a)は周波数スペクトル, (b)は各周波数ごとの波のエネルギーの伝播方向, (c)は方向集中度パラメータ S , (d)は ABIC, (e)は式 (5.63) の σ , (f)は(e)の値を超パラメータ u で除した値 σ/u)

図—8.17はうねりと風波が共存する波浪場の方向スペクトルを対象として、その特性を示したものである。(b)に見られるように、うねりは南(180°)方向から来襲し、風波は主として東(90°)方向から来襲している。(c)に見られるように、風波の周波数領域の方向集中度パラメータ S は、そのピーク周波数よりも高周波数側で光易型方向関数と同じ特性を示すが、それよりも低周波数側のうねりの周波数領域では、 $S=70$ 程度の大きなピークを持ち、かなり急峻な形状となっている。(d)、(e)に示す ABIC および σ は、ともに類似した形状を示しており、それらの最小値は周波数スペクトルのピーク周波数ではなく、風波のエネルギー・ピーク周波数の近傍で生じている。(f)に示す σ/u は(c)に示す方向集中度パラメータ S に類似した形状となっているが、 S との対応関係は前例と同様にあまり明確ではない。

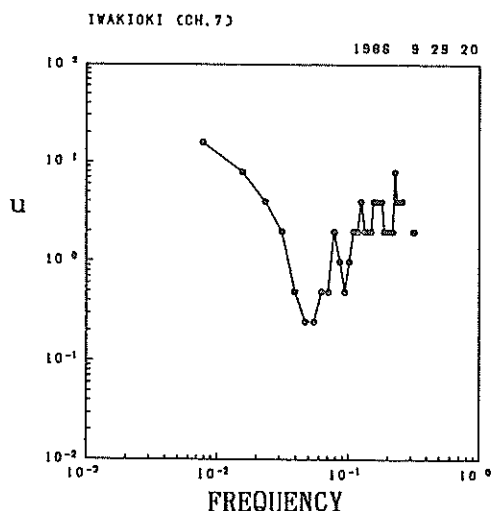
(3) クロススペクトルの推定誤差の方向スペクトル推定値に及ぼす影響

図—8.18は図—8.17と同じ観測データを用いて、式(5.19)～式(5.20)のクロススペクトルの正規化変数として、 $D_{mn}(f)=1$ 、すなわちクロススペクトルの誤差を正規化しない場合の方向スペクトルの解析結果の内、方向集中度パラメータ S と周波数 f の関係を示したものである。図—8.17(c)と対比して、うねりの周波数領域の S の値が大きく異なっており、方向集中度が大きいはずのうねりが図—8.18の場合にはほとんど検知されていない。しかしながら、風波の周波数領域ではほぼ $-5/2$ 乗則が成立しており、方向スペクトルの推定精度は周波数に依存してかなり異なるようである。これは、3.3(2)で述べたことから推察されるように、クロススペクトルの推定誤差を $D_{mn}(f)$ によって正規化しない場合には、クロススペクトルは観測波動量に応じてそれぞれ異なる次元を持つほか、周波数や観測波動量の組み合わせに依存してさまざまな統計的誤差を有するためである。種々の次元を持つクロススペクトルを無次元化するためには伝達関数を用いることも可能であるが、この場合にはクロススペクトルの推定誤差は正規化されず、それぞれのクロススペクトルの推定誤差のばらつきにより、方向スペクトル推定値はバイアスを有する推定値となる可能性がある。もちろんこの様な考えは、観測して得られたクロススペクトルがある母集団からのサンプルであると見なす場合の議論である。観測して得られたクロススペクトルを真値と見なして方向スペクトル解析し、そのようにして得られた方向スペクトルをある母集団からのサンプルと見なせば、クロススペクトルの推定誤差を正規化する必要は



図—8.18 クロススペクトルの推定誤差を正規化せずにBDMを適用した場合の方向集中度パラメータ S と周波数 f の関係

(図—8.18は、クロススペクトルの推定誤差のBDMの推定値に及ぼす影響を検討するため、図—8.17(c)に用いたものと同じ観測データを用いてクロススペクトルの推定誤差を正規化せずにBDMを適用した例である。)



図—8.19 超パラメータ u の周波数 f に関する連続性

ない。要は解析者がそのデータをどの様に考えるかの問題であり、どちらが正しいのかは解析者の考え次第である。

(4) 超パラメータ u の周波数 f に関する連続性

図—8.19はBDMで方向スペクトルを推定する際に設定した超パラメータ u と周波数 f との関係を示したものである。図—8.19はうねりと風波が重なり合った二方向波浪の例である。超パラメータ u は、式 (5.37) から明らかなように、方向スペクトルを推定するために必要な基礎式を満たす度合いと、方向スペクトル推定値の滑らかさのバランスをとるためのパラメータであり、クロススペクトルに含まれる誤差や方向スペクトルの形状あるいは観測装置の配置等に依存するパラメータである。このため、観測系の相違や波浪状況の相違によって種々の異なる値をとる可能性があり、事前に最適な u の存在範囲を決めることはできない。しかしながら、図—8.19に見られるように、超パラメータ u は周波数 f に対してほぼ連続的に変化する傾向が認められる。したがって、実際のBDMの数値計算に際しては、式 (5.67) による格子探索法を用いて形式的な順に最適な u を探索するのではなく、適当な判定のもとに最適な u の範囲をある程度絞り込んで探索し、計算時間の大幅な短縮を図っている。

8.7 結論と議論

いわき沖波浪観測システムで観測された波浪観測データをもとに、本論文で提案した新しい方向スペクトル推定法の現地観測データへの適用性や有効性を検討した結果および海洋波の方向スペクトル特性に関して検討した結果を述べた。

本章の主要な結論として、以下のようにとりまとめられる。

- 1) BDMでは一般に、観測波動量の増大とともに方向スペクトルの推定精度は向上するが、EMLMでは必ずしも推定精度は向上しない。
- 2) EMLMは3～4成分の観測波動量では比較的安定した方向スペクトルを推定するけれども、5成分以上の観測波動量を用いる場合には、推定値が不安定になる場合があり、推定値が激しく振動する場合や無限大に発散する場合がある。
- 3) いわき沖波浪観測システムで観測されたデータをもとに方向スペクトル解析を実施する場合、EMLM

で得られた方向スペクトルのエネルギー・ピーク値はBDMで得られた方向スペクトルのエネルギー・ピーク値の5～7割程度を示すことが多い。また、BDMで推定される方向スペクトルは、種々の観測波動量の組み合わせに対して、ほぼ不変的に同一の方向スペクトルを推定するが、EMLMでは観測波動量の組み合わせによって種々の異なる方向スペクトルが推定される。

- 4) 3成分観測データをもとに方向スペクトル解析を実施する場合、EMLMで得られた方向スペクトルのエネルギー・ピーク値はMEPで得られた方向スペクトルのエネルギー・ピーク値の5～7割程度を示すことが多い。また、EMLMで推定される方向スペクトルよりも、MEPで推定される方向スペクトルの方がBDMで推定される方向スペクトルに近い形状を示す。
- 5) 離散有限Fourier変換を用いたクロススペクトルの変異係数はクロススペクトルのコヒーレンスに逆比例し、周波数ごとに異なる特性を有する。このため、BDMを用いて方向スペクトル解析する際には、方向スペクトルとクロススペクトルの関係を表わす基礎式を、対応するクロススペクトルの誤差の標準偏差で正規化して取り扱う方が良い推定値が得られる。
- 6) 海洋波が発達し、減衰する過程において、比較的発達した単峯型の方向スペクトルの平均分散角や波峯長パラメータなどの積分特性量は、周波数スペクトルとしてJONSWAP型、方向分布関数として光易型方向関数を想定した場合の方向スペクトルの積分特性量に近い特性を示す場合が多い。
- 7) 各周波数ごとのエネルギーの平均的な伝播方向がほぼ同一の風波の方向スペクトルの方向分布関数は光易型方向関数によく一致した特性を示す。
- 8) うねりの方向分布関数の方向集中度パラメータ S は周波数 f に対してかなり大きく変化し、その最大値はうねりのエネルギー・ピーク周波数近傍で生じる。
- 9) BDMで方向スペクトルを推定する際に設定される超パラメータ u は周波数 f に関して、ほぼ連続的に変化する傾向が見られる。

第9章 結論

海洋波の方向スペクトル推定法として、最大エントロピー原理を用いた方法(MEP)、ベイズ型モデルを用いた方法(BDM)、およびベイズ法を入・反射波共存場に適用可能な形に修正(MBM)あるいは拡張した方法(EMBM)について、その理論的背景、理論式の定式化、数値計算法、および数値シミュレーションや現地観測データを用いてこれらの方法の推定精度や有効性、適用性について検討した結果を述べた。

最大エントロピー原理法(MEP)により推定される方向スペクトルは、与えられた制約条件下でとり得る最も単純な構造を持つエネルギー分布を推定しているものと解釈できる。情報量論的に解釈すれば、この単純さのために与えられた情報以外の情報が混入することを防ぐことができるものと解釈される。したがって、3成分観測データのように方向スペクトルを推定するための必要最小限の観測データを対象とする場合には、MEPは与えられた情報を最大限有効利用するという意味で妥当な方法であろう。

一方、ベイズ型モデルを用いた方法(BDM, MBM, EMBM)は、クロススペクトルの推定誤差の影響を考慮した方法であり、任意の3成分以上の観測データが与えられた場合に適用可能な方法である。これらの方法の推定理論の定式化においては、モデル分布として波浪の線形性を考慮して、自由度の大きい、波のエネルギーの離散分布的な構造を想定した。さらにそれらの離散的なエネルギー分布が方向角に対しては滑らかな連続関数であるという期待を事前分布として想定し、推定理論の定式化を行った。モデル分布は極めて多くの未知パラメータから構成されるが、事前分布によりそれらのパラメータは少数の超パラメータにより支配される。このようなアプローチは、一見複雑に見える物理現象も、実際には単純な法則により支配されているという物理現象に対する一般的な認識に合致しており、対象としている物理現象が実際にそのようなものであれば、ベイズ型モデルを用いた方向スペクトル推定法は物理的には自然な形の推定法であるといえよう。

これらの一連の研究の主要な結論として、以下のようにとりまとめられる。

- 1) MEPは3成分観測データを対象とする場合に適用可能である。この場合、MEPは既往の推定法に比べて最も高い分解能を有しており、単峯型の方向スペ

クトルのみならず、双峯型の方向スペクトルの識別が可能である。特に方向スペクトルのエネルギー・ピークの角度差が大きいほど、その推定精度は良い。

- 2) MEPを用いて方向スペクトルを推定する場合、初期値によっては解が収束しにくい場合がある。一般に、エネルギーの方向集中度が高いほど、解が収束しにくい傾向が見られる。
- 3) BDMは任意の観測波動量に適用可能である。しかしながら、二方向波浪の方向スペクトルに対しては4成分以上の観測波動量が必要である。この場合、BDMは既往の推定法に比べて最も高い推定精度を有しており、またクロススペクトルの推定誤差の影響を受けにくく安定した推定値が得られる。
- 4) BDMでは一般に、観測波動量の増大とともに方向スペクトルの推定精度は向上するが、EMLMでは必ずしも推定精度は向上せず、3～4成分では比較的安定した方向スペクトルが推定されるものの、5成分以上の観測波動量を用いる場合には推定値が不安定になり、推定値が激しく振動する場合や無限大に発散する場合がある。
- 5) MBMは一般に3成分以上の観測波動量が与えられた場合に適用可能であり、また与えられた反射率が真値に近い場合には優れた推定精度で入・反射波の方向スペクトルの分離計算が可能である。しかしながら、かなり大きな波のエネルギーが反射面に沿う方向から来襲し、かつ、反射面に沿う方向の近傍で方向角に対するエネルギーの変化率が大きい場合には、反射面近傍での方向スペクトルの推定値と真値との差が大きく現われるなどの問題点がある。
- 6) EMBMは大規模な入・反射波の観測を実施する場合(例えば6成分以上の波動量が観測される場合)に適用可能であり、この場合には入・反射波の方向スペクトルのみならず、反射率も周波数および方向角の関数としてかなり高い精度で推定可能である。
- 7) 海洋波が発達し、減衰する過程において、比較的発達した単峯型の方向スペクトルの平均分散角や波峯長パラメータなどの積分特性量は、周波数スペクトルとしてJONSWAP型、方向分布関数として光易型方向関数を想定した場合の方向スペクトルの積分特性量に近い特性を示す場合が多い。
- 8) 激しい気象擾乱が観測海域の近傍を通過する場合、気象擾乱の種類、規模、コースに依存して様々な方

向スペクトルの出現特性を示す。このうち、各周波数ごとのエネルギーの平均的な伝播方向がほぼ同一の風波の方向分布関数は、光易型方向関数によく一致する。

最後に、1つの疑問がある。すなわち、本論文では方向スペクトルの推定精度を検討するために数値シミュレーションを実施した。この際、真の方向スペクトルとして特定の方向スペクトルを仮定し、方向スペクトルを逆推定したが、なぜこのように高い精度で真の方向スペクトルに近い推定値が推定し得るのかという疑問である。実際の海洋波は周波数および方向角に関して無限の自由度を持つ。限られた少数の情報から方向スペクトルを逆推定する問題が、この意味で不定問題であるならば、最大エントロピー原理法やベイズ法により推定される方向スペクトルは、必ずしも真の方向スペクトルに近い推定値を推定し得る必然性はない。これについてはさらに検討する必要があるが、現段階では本論文の数値シミュレーションで用いた方向スペクトルが、たまたま最大エントロピー原理法やベイズ法で推定される方向スペクトル

に近い形状を与えるものであるとしか言えない。海洋波はその線形性のために、第1近似的には無数の成分波が周波数および方向角に対してそれぞれ独立にさまざまな方向に伝播する。しかしながら、より高次の非線形な効果がエネルギー分布を滑らかにすると考えられる。本論文で数値シミュレーション条件として用いた標準的な方向分布関数の滑らかさが、たまたま、最大エントロピー原理法やベイズ法の定式化に含まれる特性に対応していたと考えられるわけである。

いずれにせよ、本論文で用いた方向スペクトルとクロススペクトルの基礎式(式(3.4))は波浪の線形理論のみから導かれたものであり、このような解釈はその式中には内在していない。したがって、この意味では本論文で示した方法もあくまで便宜的な方法であり、その妥当性は今後の研究に待つほかはない。しかしながらその際にも、新しい知見をベイズ型モデルの事前分布に盛り込むことにより、本論文で示したベイズ型モデルを用いた方向スペクトル推定法は、より正しい推定法として、今後さらに発展していく可能性がある。

(1991年11月30日受付)

謝辞

本論文をとりまとめるにあたっては、九州大学工学部水工土木学科の入江功教授ならびに九州大学応用力学研究所の光易恒教授からは絶えず温かい御激励を頂くとともに論文のとりまとめに関し懇切なる御指導を受けた。また、九州大学工学部造船学科の中武一明教授ならびに貴島勝郎教授からは論文のとりまとめに関し懇切なる御指導を受けた。ここに心からの感謝の意を表する次第です。

筆者が海洋波の方向スペクトルの推定法に関する研究を始めるきっかけとなったのは、1984年頃のことである。当時、房総半島野島崎の南東沖海域において頻発する海難を未然に防止する手法の開発を目的として、運輸省は気象庁、気象研究所、船舶技術研究所、港湾技術研究所の協力体制により、1982年からの5カ年計画で、同海域の波浪観測、波浪外力と船体構造の応答解析、水理模型実験及び数値シミュレーション等を含む総合的調査研究を進行中であった。筆者は港湾技術研究所において、これら一連の調査のうち、波浪特性、主として方向スペクトルに関する特性について解析、検討を担務した。残念ながら機器の故障により波浪の生波形データは取得出来なかったが、衛星を経由して送られた種々の波浪諸元をもとに、当該海域の方向スペクトル特性を検討することが出来た。

その後、酒田のマフコタワーや玄海灘の耐波性直立ブイを活用した波向解析をはじめ、種々の観測データの波向解析に従事した。本研究の初期の段階では既往の方向スペクトル推定法を用いて解析したが、推定される値が現実離れたものもあり、大いに悩まされたものである。このようなことがきっかけとなり、自分なりに納得のいく方法を考案したものが本研究の内容である。

この間、現横浜国立大学工学部の合田良実教授（当時、港湾技術研究所水工部長、次長、所長）には、方向スベ

クトルの推定法に関し多くの御教示と御助言を受けた。前掲の光易教授にも本研究の初期の段階から多くの御指導を頂き、関連文献の紹介等、多くの御好意を賜った。同じく前掲の入江教授にも、教授が港湾技術研究所海洋水理部長在職中から暖かい御指導、御激励を絶えず賜った。

筆者が港湾技術研究所に配属になって以来、浅田忠則元水工部長（現東京湾横断道路株式会社）、堀江毅海洋水理部長、高橋智晴元海象観測研究室長（現社団法人海洋調査協会）、小舟浩治元海象調査研究室長（現パナマ運河代替案検討委員会日本代表）、村田繁元海象観測研究室長（現広島港工事事務所長）、広瀬宗一元主任研究官（現熊本港工事事務所長）、後藤智明海洋エネルギー利用研究室長、永井紀彦海象調査研究室長、佐々木弘元主任研究官（現海上電機株式会社）、菅原一晃主任研究官には筆者の直接の上司として多くの御指導、御教訓を賜った。とりわけ小舟前室長には、本研究の大部分を完成させる間、温かく支えて頂いた。後藤室長には博士の研究に対する厳しい態度を教わった。永井室長には本論文を取りまとめる機会を与えて頂き、絶えず優しい励ましを賜った。菅原主任研究官には数え切れないほどのディスカッションに付き合ってもらった。このほか、元海象観測研究室、現海象調査研究室に在職しておられたあるいは在職中の亀山豊研究官、浅井正研究官、立花祐二元研究官、成田明元研究官、平野隆幸研究官には直接、間接的に数々の御支援を頂いた。これらの方々に心からの感謝の意を表します。

また、本論文で用いた観測データの取得に努力して頂いた運輸省第一港湾建設局ならびに第二港湾建設局の関係各位の方々に謝意を表するとともに、今後さらに御協力をお願いする次第です。

最後に、今日まで筆者を励まし、研究と生活を力強く温かく支えてくれた家族に心から感謝します。本当にありがとうございました。

参考文献

- 1) 合田良実：港湾構造物の耐波設計—波浪工学への序説—, 鹿島出版会, 210p., 1977. または, Goda, Y.: Random Seas and Design of Maritime Structure, University of Tokyo Press, 323p., 1985.
- 2) 合田良実：海岸・港湾調査法, 土木学会編, 新体系土木工学80, 技報堂出版, 251p., 1986.
- 3) 本間仁・堀川清司：海岸環境工学, 東京大学出版会, pp.506~524, 補章 A 方向スペクトルの推定理論, 1985.
- 4) Barber, N.F.: The directional resolving power of an array of wave detectors, Ocean Wave Spectra, Prentice Hall, Inc., pp.137~150, 1961.
- 5) Longuet-Higgins, M.S., D.E. Cartwright and N.D. Smith: Observation of the directional spectrum of sea waves using the motions of a floating buoy, Ocean Wave Spectra, Prentice Hall Inc., New Jersey, pp.111~136, 1963.
- 6) Panicker, N.N. and Borgman, L.E.: Enhancement of directional wave spectrum estimate, Proc. 14th Int. Coastal Eng. Conf., Copenhagen, pp.258~279, 1974.
- 7) 広瀬宗一：双峯型方向分布関数の推定法について, 第32回海岸工学講演会論文集, pp.164~168, 1985.
- 8) 山口正隆：方向スペクトル観測装置の分解能について(1)—3成分流速計による方法—, 愛媛大学紀要第Ⅲ部(工学), 第9巻, 第3号, pp.225~234, 1978.
- 9) Hasselman, D.E., M. Dunckel and J.A. Ewing: Directional Wave Spectra Observed during JONSWAP 1973, Jour. Physical Oceanography, Vol. 10, pp.1264~1280, 1980.
- 10) Capon, J.: High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis, Proc. IEEE, Vol. 57, pp. 1480~1418, 1969.
- 11) 磯部雅彦・近藤浩右・堀川清司：方向スペクトルの推定におけるMLMの拡張, 第31回海岸工学講演会論文集, pp.173~177, 1984.
- 12) Phillips, O.M.: The dynamics of the upper ocean, 2nd ed., Camb. Univ. Press, 336p., 1977.
- 13) Longuet-Higgins, M.S.: The statistical analysis of a random, moving surface, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A(966), Vol. 249. pp.321~387, 1956.
- 14) 合田良実：共分散法を用いた波向推定方式の数値的検討, 港湾技術研究所報告, 第20巻, 第3号, pp. 53~92, 1981.
- 15) Bretschneider, C.L.: Significant waves and wave spectrum, Ocean Industry, Feb., pp.40~46, 1968.
- 16) 光易恒：風波のスペクトルの発達(2) —有限な吹送距離における風波のスペクトルの形について—, 第17回海岸工学講演会論文集, pp.1~7, 1970.
- 17) Hasselman, K. et al.: Measurement of windwave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP), Deutsche Hydr. Zeit, Reihe A (8), No. 12, 1973.
- 18) Mitsuyasu, H. et al.: Observation of the directional spectrum of ocean waves using a cloverleaf buoy, Jour. Physical Oceanography, Vol. 5, pp.750~760, 1975.
- 19) 合田良実・鈴木康正：光易型方向スペクトルによる不規則波の屈折・回折計算, 港湾技研資料, No. 230, 45p., 1975.
- 20) 磯部雅彦・近藤浩右：入・反射波の共存場における方向スペクトルの推定法, 第30回海岸工学講演会論文集, pp.44~48, 1983.
- 21) 合田良実：波高計群による方向スペクトルを用いた反射波推定法の検討, 港湾技術研究所報告, 第19巻, 第3号, pp.37~69, 1980.
- 22) 力石國男・光易恒：スペクトル計算法と有限フーリエ級数, 九州大学応用力学研究所報, 第39号, pp. 77~104, 1973.
- 23) 赤池弘次・中川東一郎：ダイナミックシステムの統計的解析と制御, サイエンス社, 190p., 1972.
- 24) 赤池弘次：情報量基準AICとは何か—その意味と将来への展望—, 数理科学, No. 153, サイエンス社, pp.5~11, 1976.
- 25) 橋本典明・小舟浩治：方向スペクトルの推定における多変量自己回帰モデルの適用, 第33回海岸工学講演会論文集, pp.164~168, 1986.
- 26) 磯部雅彦・古市耕輔：不規則波に対する統計量の變動に関する理論的考察, 第33回海岸工学講演会論文集, pp.159~163, 1986.
- 27) Bendat, J.S. and A.G. Piersol: Random Data Analysis and Measurement Procedures, Second edition, John Wiley & Sons, 566p., 1986.
- 28) Borgman, L.E.: Directional spectral model for design use for surface waves, Hyd. Eng. Lab. Univ. Calif., Berkeley, HEL 1-12, 56p., 1965.

- 29) Jefferys, E.R.: Comparison of three methods for calculation of directional spectra, Proc. 5th Int. Offshore Mechanics and Arctic Engineering Symposium, pp.45~50, 1986.
- 30) 坂元慶行・石黒真木夫・北川源四郎: 情報量統計学, 共立出版株式会社, 236p., 1983.
- 31) 坂元慶行: カテゴリカルデータのモデル分析, 共立出版株式会社, 221p., 1985.
- 32) 寒川典昭・荒木正夫: 水文事象の頻度分析へのMEPの導入について, 土木学会論文報告集, 第335号, pp.89~95, 1983.
- 33) 橋本典明・小舟浩治: 最大エントロピー原理 (MEP) を用いた方向スペクトルの推定, 港湾技術研究所報告, 第24巻, 第3号, pp.123~145, 1985. または, 小舟浩治・橋本典明: 最大エントロピー原理 (MEP) を用いた方向スペクトルの推定, 第32回海岸工学講演会論文集, pp.159~163, 1985. または, Kobune, K. and N. Hashimoto: Estimation of Directional Spectra from the Maximum Entropy Principle, Proc. 5th Int. Offshore Mechanics and Arctic Engineering Symposium., Vol. 1, pp.80~85, 1986.
- 34) 瀧澤英一: 情報の理論と演習, 廣川書店, 293p., 1966.
- 35) 斎藤慶一: 確率と確率過程, サイエンス社, 142p., 1974.
- 36) 橋本典明・高橋智晴: 多量データを対象とする等値線自動描画アルゴリズムの開発, 港湾技術研究所報告, 第22巻, 第2号, pp.89~125, 1983.
- 37) 赤池弘次: エントロピーを巡る混乱, 数理科学, No. 259, サイエンス社, pp.53~57, 1985.
- 38) 林知己夫・鈴木達三・赤池弘次: 統計学特論, 放送大学教材, 日本放送出版協会, 236p., 1986.
- 39) Akaike, H.: Likelihood and Bayes procedure, Bayesian Statistics (Bernardo, J.M., De Groot, M. H., Lindley, D.U. and Smith, A.F.M. eds.) University Press, Valencia, pp.143~166, 1980.
- 40) 石黒真木夫・荒畑恵美子: ベイズ型スプライン回帰, 統計数理研究所彙報, 第30巻, 第1号, pp.29~36, 1982.
- 41) 石黒真木夫: 複雑すぎる現象をどう把えるか—大規模なパラメトリックモデル—, 統計数理, No.2, pp. 251~256, 1985.
- 42) Ishiguro, M.: On the Use of Multiparameter Models in Statistical Measurement Technique, Doctoral Dissertations, Tokyo University, 1984.
- 43) 橋本典明: ベイズ型モデルを用いた方向スペクトルの推定, 港湾技術研究所報告, 第26巻, 第2号, pp. 97~125, 1987, または, Hashimoto, N., K. Kobune and Y. Kameyama: Estimation of Directional Spectrum using the Bayesian Approach, and its Application to Field Data Analysis, Rept. Port and Harbour Res. Inst., Vol. 26, No. 5, pp.57~100, 1987. または, 橋本典明: ベイズ型モデルを用いた方向スペクトルの推定, 第34回海岸工学講演会論文集, pp.126~130, 1987. または, Hashimoto, N. and K. Kobune: Directional Spectrum Estimation from a Bayesian Approach, Proc. 21th Int. Coastal Eng. Conf., Spain, pp.62~76, 1988. または, Hashimoto, N. and K. Kobune: Estimation of Directional Spectrum through a Bayesian Approach, Coastal Engineering in Japan, JSCE, pp.183~198, 1988.
- 44) 繁舛算男: ベイズ統計入門, 東京大学出版会, 225p., 1985.
- 45) 橋本典明・小舟浩治: ベイズ型モデルを用いた方向スペクトルの推定—入・反射波共存場を対象として—, 港湾技術研究所報告, 第26巻, 第4号, pp. 3~33, 1987. または, 橋本典明・小舟浩治: 入・反射波共存場を対象としたベイズ型モデルを用いた方向スペクトルの推定, 第35回海岸工学講演会論文集, pp.163~167, 1988.
- 46) Haubrich, R.A.: Array design, Bull. Seismological Soc. America, Vol. 58, No. 3, pp.979~991, 1968.
- 47) 橋本典明・小舟浩治・亀山豊: 現地観測データを用いた方向スペクトル推定法に関する検討, 港湾技術研究所報告, 第27巻, 第2号, pp.59~94, 1988.
- 48) 小舟浩治・橋本典明・佐々木弘: 野島崎沖海域の波浪特性, 第32回海岸工学講演会論文集, pp. 124~128, 1985. または, Kobune, K., H. Sasaki and N. Hashimoto: Characteristics of Ocean Waves off Cape Nojima in the Northwestern Pacific, Measured with a Discus Buoy, Rept. Port and Harbour Res. Inst., Vol. 24, No. 3, pp.3~30, 1985. または, Kobune K., H. Sasaki and N. Hashimoto: Characteristics of Ocean Waves off Cape Nojima in the North Western Pacific, measured with a Discus Buoy, Coastal Engineering in Japan, JSCE, pp.45~62, 1988.

補章 A 方向スペクトルの推定における多変量自己回帰モデルの適用¹⁾

方向スペクトルの推定は、波数・周波数スペクトルに伝達関数を乗じて波数ベクトルについて Fourier 変換したものがクロススペクトルになるという、波数・周波数スペクトルとクロススペクトルの関係に基づいて推定される。すなわち、クロススペクトルは方向スペクトルを推定する際の基本情報であり、方向スペクトルの推定精度はクロススペクトルの推定精度に依存する。しかしながら、これまでクロススペクトルの推定精度が方向スペクトルの推定精度に及ぼす影響に関する研究はあまりなされていない。したがって、ここではクロススペクトルの推定精度が方向スペクトルの推定精度に及ぼす影響を評価する一環として、FFT 法および多変量自己回帰 (Multichannel Autoregressive; MAR) モデルを用いた場合のクロススペクトル推定値について両者の相違を検討し、さらに、これらをもとに方向スペクトル解析を行い、その特性について検討した結果について述べる。

なお、本章は著者が本論文の主題である「海洋波の方向スペクトルの推定法に関する研究」を始めた初期の頃の研究成果の一部である。しかしながら、本研究では方向スペクトルの推定法に既往の推定法 (EMLM) を用いており、本論文の主旨とはずれるため補章として扱うこととした。

A-1 多変量自己回帰モデルを用いたクロススペクトルの推定

FFT 法を用いてクロススペクトル解析を行う場合、独立な成分波を重ね合わせた一次元不規則波であっても、スペクトル解析の自由度、あるいは 2 点間の距離の増加などによって、2 つの波動量のコヒーレンスは見かけ上低下することが知られている。また、しばしば安定度と分解能の面から自由度をいくらに設定するか等に頭を悩ませることも多い。

一方、MAR モデルを用いる方法は、FFT 法とは異なり、ウィンドーによる平滑化はモデル選択の過程で自動的に行われる方法である。このため、FFT 法などでは、周囲を滑らかにすると、ピークもなまってくるなどの欠点があるが、本方法では鋭いピークも表現できるという利点を有している。また、与えられた時系列データが多変量自己回帰過程に従う時系列データであれば、本方法により推定されるクロススペクトルは最尤推定量となる。

ここでは、波浪観測ブイ、あるいは波高計アレイなどから得られる任意地点の任意の波動量の時系列データが MAR モデルで表わされるものとして、これらの観測波動量をもとに MAR モデルを用いてクロススペクトルを推定する方法について述べる。

MAR モデルによれば不規則波動量 $X(n)$ は次式で表わされる²⁾。

$$X(n) = \sum_{m=1}^M A(m)X(n-m) + E(n) \quad (\text{A.1})$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} X(n) &= \begin{pmatrix} x_1(n) \\ \vdots \\ x_h(n) \end{pmatrix}, \quad A(m) = \begin{pmatrix} a_{11}(m) & \cdots & a_{1k}(m) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1}(m) & \cdots & a_{kk}(m) \end{pmatrix} \\ E(n) &= \begin{pmatrix} \varepsilon_1(n) \\ \vdots \\ \varepsilon_k(n) \end{pmatrix}, \quad R_{\varepsilon_{ij}} = \begin{cases} \sigma_{\varepsilon_j} & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2})$$

であり、 $x_i(n)$ は任意地点の任意の波動量の時系列データ、 $a_{ij}(m)$ は回帰係数、 ε_j は予測誤差、 σ_{ε_j} は $\varepsilon_i \varepsilon_j$ の共分散である。

多変量時系列データに式 (A.1) をあてはめる場合、クロススペクトルは次式で与えられる²⁾。

$$\Phi(f) = (A(f))^{-1} \Sigma \{ (A(f))^* \}^{-1} \quad (\text{A.3})$$

ここに、 $\Phi(f)$ は (i, j) 要素が x_i と x_j のクロススペクトル $\Phi_{ij}(f)$ である行列、 f は周波数、 Σ は (i, j) 要素が $a_{ij}(f)$ である行列であり、

$$a_{ij}(f) = \sum_{m=0}^M a_{ij}(m) \exp(-i2\pi f m) \quad (\text{A.4})$$

である。

MAR モデルの次数選択の基準としては、赤池により提案された AIC (Akaike's Information Criterion) があり、次式で表わされる³⁾。

$$\begin{aligned} \text{AIC} = & -2 \times (\text{モデルの最大対数尤度}) \\ & + 2 \times (\text{モデルの自由パラメータ数}) \quad (\text{A.5}) \end{aligned}$$

式 (A.1) の M 次のモデルの場合には、AIC は次式となる。

$$\begin{aligned} \text{AIC}(M) = & N \ln(2\pi |\Sigma_M|) + Nk \\ & + 2\{Mk^2 + (k+1)k/2\} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

ここに、 N はデータ数、 k は波動量の数、 $|\Sigma_M|$ は $\Sigma(M)$ の行列式である。

式 (A.1) の回帰係数 $A(m)$ を推定する方法としては Yule-Walker 法²⁾ (以下、YWM と略記) や Householder 法 (以下、HHM と略記) を用いた最小自乗法による解法³⁾ があり、容易に回帰係数の推定値が求められる。YWM による解法は、事前に推定された多変量時系列データの共分散関数を用いて、漸化式により低次モデルの回帰係数から高次モデルの回帰係数へと、順次、計算を進めていく方法である。この場合、各計算ステップごとに AIC を算出し、AIC が最小となるモデル次数を最適モデル次数として選択する。一方、HHM による解法は行列の直交変換に基づく解法であり、いったん Householder 変換により観測データから構成される行列の三角行列が求められると、設定されたモデル次数の範囲内ですべての次数の AIC は容易に算出できる。このため、プログラミング上での取扱いが便利であり、観測データの追加あるいは回帰係数の追加や削除が容易に行えるなどの利点がある。

ここでは、MAR モデルの解法として、YWM および HHM の両方を用いてクロススペクトル解析を行い、解法の違いによるクロススペクトル推定値の差異についても検討することとした。なお、HHM を用いる場合には、赤池⁴⁾と同様に、まず、AIC が最小となる最適モデル次数を選択し、次に、各変数 $x_i(n)$ ごとに回帰係数 $a_{\omega}(m)$ の項数を増減させることにより AIC がさらに小さくなるかどうか検定することによって、変数別に最適次数を決定した。これは、任意の波動量に MAR モデルをあてはめる場合、各波動量ごとに異なるモデル次数を持つことも考えられるため、本方法を付加することにより、さらに推定精度の向上が図れるものとして付加した処理である。

A-2 数値シミュレーションによる検討

MAR モデルを用いたクロススペクトル推定値の特性あるいは FFT 法を用いたクロススペクトル推定値との相違を検討するために、数値シミュレーションを行った。ここでは、次式で表わされる多数の成分波の線形重ね合わせにより、任意の不規則変動波形をシミュレートした⁵⁾。

$$\begin{aligned} \xi_i(x, y, t) = & \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N H_i(f_m, \theta_n) a_{mn} \cos(k_m x \cos \theta_n \\ & + k_n y \sin \theta_n + 2\pi f_m t + \epsilon_{mn} + \phi_i) \\ & + z_i(t) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

ここに、 $H(f, \theta)$ は振幅の変換率を表わす伝達関数、 f は周波数、 θ は成分波の来襲する方向、 k は波数、 ϕ は位相変換角、 ϵ は位相遅れ角であって $0 \sim 2\pi$ の間に等密度にランダムに分布しているものとする。また、 $z(t)$ は計測等に付随するノイズを模式的に表わしたもので、正規確率分布の乱数を用いている。各成分波の振幅 a_{mn} は方向スペクトルから次式で与えられる。

$$a_{mn} = \sqrt{2S(f_m) \Delta f_m} \sqrt{G(\theta_n | f_m) \Delta \theta_n} \quad (\text{A.8})$$

ここに、 $S(f)$ はパワースペクトル、 $G(\theta | f)$ は方向分布関数であり、それぞれ次式で与えられる。

$$\begin{aligned} S(f) = & \sum_i a_i H_{03i}^2 T_{pi}(f/f_{pi})^{-m_i} \\ & \times \exp\left\{-\frac{m_i}{n_i}(f/f_{pi})^{-n_i}\right\} \\ & \times \gamma_i^{\exp[-(f/f_{pi}-1)^2/2\sigma^2]} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$\sigma = \begin{cases} 0.07 : 0.7f_p < f < f_p \\ 0.09 : f_p \leq f < 1.4f_p \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

$$G(\theta | f) = \sum_i G_{0i} \cos^{2s_i}\left(\frac{\theta - \theta_i}{2}\right) \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} G_0 = & \left[\int_0^{2\pi} \cos^{2s}\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \right]^{-1} \\ S = & \begin{cases} S_{\max}(f/f_p)^{-5} & : f \leq f_p \\ S_{\max}(f/f_p)^{-2.5} & : f > f_p \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

ここに、 f_p はスペクトルのピーク周波数、 T_p はその逆数であり、有義波周期とは次式のような関係がある。

$$T_p \approx 1.05 T_{1/3} \quad (\text{A.13})$$

表 A.1 にシミュレーションで用いた波浪条件を示す。ここでは水深を 150m、サンプリング周期を 0.5 秒、スペクトル分割数を 1025、方向分割数を 360 として、水面変動 η 、水面勾配 η_x および η_y の時系列データを作成した。また、解析にあたっては、データ数を 2048、1024、512 と変え、それぞれの場合について、ノイズ付加率を各変動量の標準偏差の 0%、2%、4%、6%、8%、10% とした場合について解析した。

図 A.1 は波浪条件 Case-1、データ数 2048、ノイズ付加率 6% の場合のクロススペクトル解析例 (パワースペ

表-A.1 数値シミュレーションに用いた波浪条件
(波浪条件として式 (A.9) ~ 式 (A.12) 中の
パラメータを表示)

	$H_{1/3}$ (m)	$T_{1/3}$ (s)	γ	m	n	S_{max}	$\bar{\theta}$ (°)
case-1 (風波)	5.0	8.0	1.0	5.0	4.0	10.0	45.0
case-2 (うねり)	5.0	10.0	2.0	8.0	4.0	100.0	45.0
case-3 (風波+うねり)	5.0	8.0	1.0	5.0	4.0	10.0	60.0
	3.0	10.0	2.0	8.0	4.0	100.0	-60.0
case-4 (風波+うねり)	5.0	10.0	1.0	5.0	4.0	10.0	75.0
	3.0	10.0	2.0	8.0	4.0	100.0	-75.0
case-5 (うねり+うねり)	5.0	10.0	2.0	8.0	4.0	100.0	75.0
	3.0	10.0	2.0	8.0	4.0	100.0	-75.0

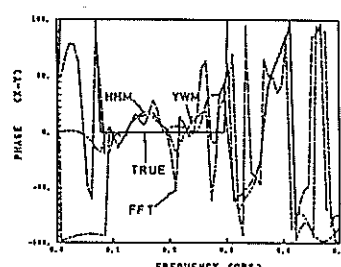
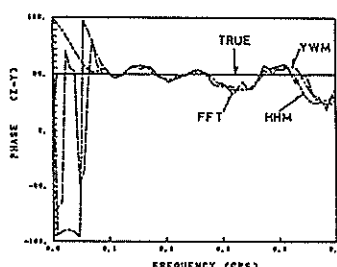
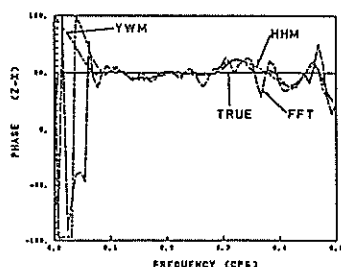
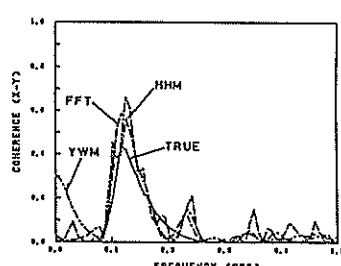
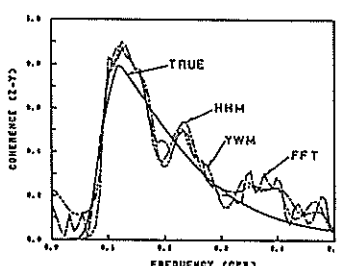
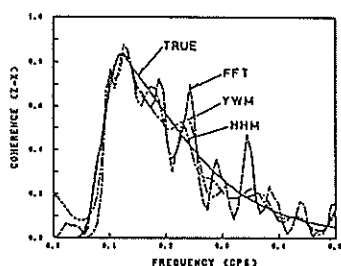
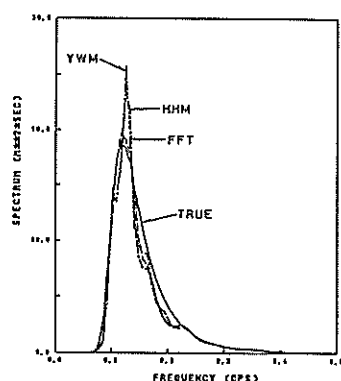


図-A.1 クロススペクトルの解析例 (Case-1)

(表-A.1中の Case-1を対象としてクロススペクトル解析した結果を図示, 上段は周波数スペクトル, 中段はコヒーレンス, 下段は位相差を示している)

クトル, コヒーレンスおよび位相差) を示したものである。図中の FFT による解析は 8×16 の三角ウィンドーを用い, 自由度を 24 としたとした場合の計算例である。また, TRUE は表-A.1 の波浪条件を用いて, 次式で表わされる数値積分⁹⁾により算出したものである。

$$\begin{aligned} \Phi_{mn}(\omega) = & \int_{\mathbf{k}} H_m(\mathbf{k}, \omega) H_n^*(\mathbf{k}, \omega) \\ & \exp\{-ik(x_n - x_m)\} S(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

ここに, $\Phi_{mn}(\omega)$ はクロススペクトル, ω は角周波数,

$H_m(\mathbf{k}, \omega)$ は水面変動から任意の波動量への伝達関数, $\mathbf{k}$ は波数ベクトル, $S(\mathbf{k}, \omega)$ は波数・周波数スペクトル, $*$ は共役複素数, x_m は平面座標である。

図-A.1 に見られるように, MAR モデルを用いる場合, AIC 最小値のモデル次数を選択した場合でも, パワースペクトルのピーク値は真値あるいは FFT の値よりも大きな推定値を推定する場合がある。しかしながら, コヒーレンスや位相差などの無次元量はほぼ妥当な推定値となることが多い。

その他, 図-A.1 および他のケースについて見られた一般的な特徴として以下のことが言える。

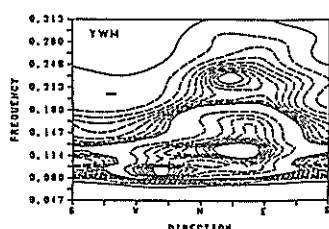
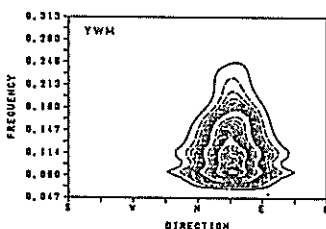
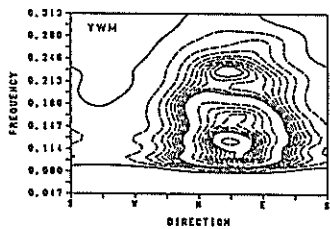
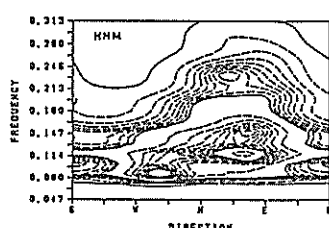
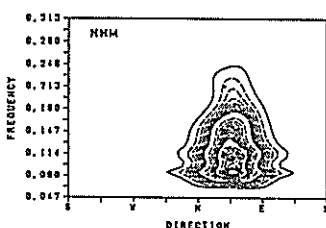
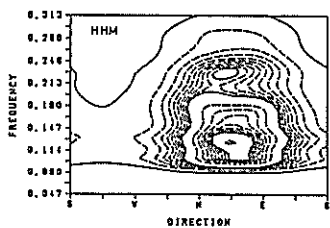
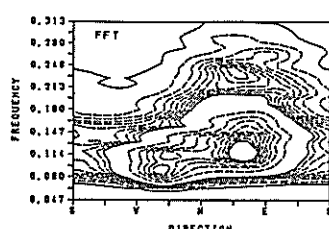
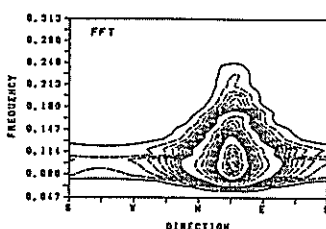
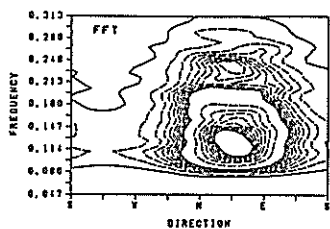
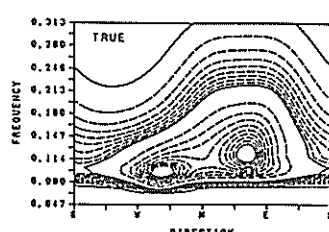
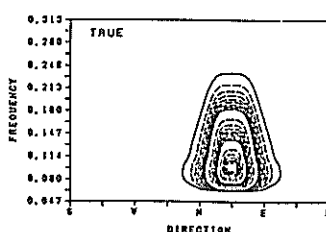
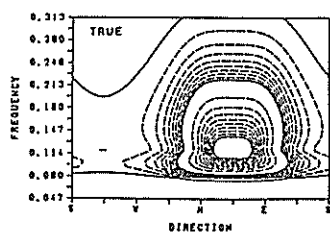


図-A.2 方向スペクトル

図-A.3 方向スペクトル

図-A.4 方向スペクトル

(図-A.2~A.4の上段は真の方向スペクトルを、2段目~4段目はそれぞれクロススペクトル解析にFFT, HHM, YWMを用いた場合の方向スペクトルの推定結果を示している)

- ① 今回のシミュレーション例では、波形にノイズを付加しない場合には明確なAIC最小値は出現しなかった。これは成分波を重ね合わせて得られた波形が離散スペクトルとしての性質を保持しているためと思われる。
- ② ノイズ付加率の増加とともにAIC最小値は増大し、AIC最小化によるモデル次数は小さくなって、滑らかなクロススペクトルが推定される。
- ③ データ数が多い場合(2048)にはFFTとMARの差異は小さいけれども、データ数が少ない場合(512)でも、明確なAIC最小値が存在する場合にはMARはシャープなピーク形状を損なうことなく、滑らかなクロススペクトルを推定可能である。
- ④ データが少ない場合にはHHMはYWMよりも長めのモデル次数を選択する傾向がある。その結果、HHMはYWMに比べて変動の大きなクロススペ

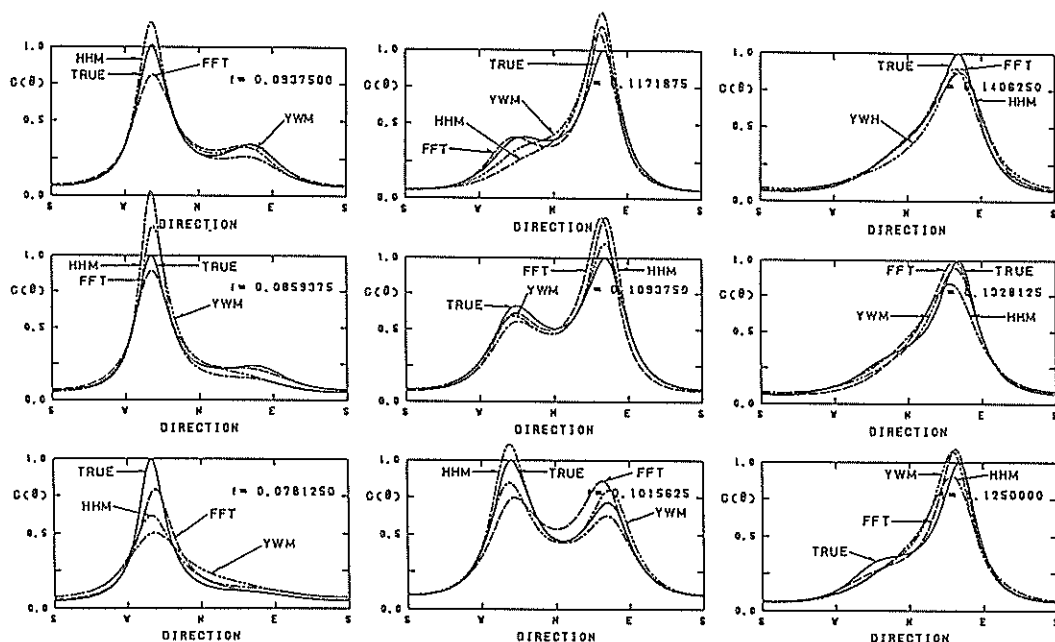
クトル形状となる場合が多い。

- ⑤ 逆に、データ数が多い場合には、YWMに比べてHHMの方が滑らかなクロススペクトル形状となる場合が多い。特に、ノイズ付加率の小さい場合には、YWMで推定されるコヒーレンスはピーク周波数よりも低周波数側で真値よりもかなり大きな値を推定するが、HHMではほぼ妥当な値が推定される。

などである。以上の諸特性の理論的根拠については、今後さらに検討する必要がある。

A-3 方向スペクトル解析による検討

MARモデルを用いたクロススペクトル推定値とFFT法によるクロススペクトル推定値の方向スペクトル推定値に及ぼす影響、相違などを検討するために、A-2で得られたクロススペクトル推定値を用いて方向スペ



図一A.5 クロススペクトル解析に FFT, HHM, YWM を用いた場合の方向分布関数の推定結果の比較

クトル解析を行った。方向スペクトルを推定する際に、クロススペクトルの推定法として MAR モデルを導入する試みは、既に Briggs⁷⁾によって行われているが、方向スペクトルの推定法として分解能の低い Longuet-Higgins らの方法⁸⁾を用いているため、必ずしもその特性が明確になっているとは言い難い。したがってここでは、汎用性が高く、計算が簡便で比較的分解能の良い拡張最尤法 (EMLM)⁹⁾を用いて方向スペクトル解析を行った。

図一A.2～図一A.4は方向スペクトルの等値線図を示したものである。図一A.2は風波、図一A.3はうねり、図一A.4は風波とうねりが重なり合った例であり、データ数 2048、ノイズ付加率 6% の例を示している。図一A.2に見られるように、エネルギーの方向分布幅の広い風波の方向スペクトルの場合には、FFT と MAR との差異は小さく、いずれもほぼ妥当な方向スペクトル形状を示している。しかしながら、図一A.3に見られるようにエネルギーの分布幅の狭いうねりの場合には、FFT は真値よりもやや幅広いエネルギー分布を示す傾向がある。この場合でも MAR はほぼ妥当な推定値を示している。図一A.4の二方向波浪の例では、いずれの方法も二方向波浪を識別している。しかしながら、FFT では低周波数側のピーク値はかなり低めに推定されており、一方、MAR では真値よりも先鋭な形状として推定されている。パワースペクトルの解析結果によれば、MAR のパワースペクトルには顕著な二つのピークが見られたが、FFT のパワースペクトルでは平滑化のために低周波数側のピークは不明瞭であった。また、図一A.5に示すピーク周波数近傍の方向分布関数に見られるように、高周波数側のピーク値 ($f=1.171875$ (Hz)) は、いずれの方法もほぼ同程度の値を示しているが、低周波数側のピーク値 ($f=0.09375$ (Hz)) では、FFT は MAR よりも低めの値を示している。これは FFT の平滑化の影響が方向分布関数の推定値にも及んでいることを示しているものと思われる。なお、図一A.4および図一A.5より、各周波数別には、MAR は二つのピークの内、卓越した方のピークを強調して推定する傾向が認められるようである。

ースペクトルでは平滑化のために低周波数側のピークは不明瞭であった。また、図一A.5に示すピーク周波数近傍の方向分布関数に見られるように、高周波数側のピーク値 ($f=1.171875$ (Hz)) は、いずれの方法もほぼ同程度の値を示しているが、低周波数側のピーク値 ($f=0.09375$ (Hz)) では、FFT は MAR よりも低めの値を示している。これは FFT の平滑化の影響が方向分布関数の推定値にも及んでいることを示しているものと思われる。なお、図一A.4および図一A.5より、各周波数別には、MAR は二つのピークの内、卓越した方のピークを強調して推定する傾向が認められるようである。

A-4 まとめ

波形データから方向スペクトルを推定する過程の内、主としてクロススペクトル推定法の違いによる方向スペクトル推定値の相違や特性、および方向スペクトル推定値に与える影響等について検討した。その結果、MAR を用いる方法は、うねりなどの先鋭な方向スペクトル形状を推定する場合やうねりと風波が重なり合った波浪場で二方向波浪を明確に識別するのに適していることが明らかとなった。また、データ数が多い場合には HHM が、少ない場合には YWM が、安定した方向スペクトルを推定できることなどが明らかとなった。しかしながら、MAR モデルの方向スペクトル推定値に及ぼす影響をより詳細に評価するためには、数値シミュレーション

法についても更に再検討するとともに、ここで示した計算法を波高計アレイなどの任意の波動量にも適用することにより、より詳細にその特性を把握する必要がある。

参考文献

- 1) 橋本典明・小舟浩治：方向スペクトルの推定における多変量自己回帰モデルの適用，第33回海岸工学講演会論文集，p.164～168，1986。
- 2) 赤池弘次・中川東一郎：ダイナミックシステムの統計的解析と制御，サイエンス社，190p.，1972。
- 3) Kitagawa, G. and Akaike, H.: A procedure for the modeling of non-stationary time series, Ann. Inst. Statist. Math., Vol. 30, No. 2, B, pp.351～363, 1978.
- 4) Akaike, H., Kitagawa, G., Arahata, E. and Tada, F.: TIMSAC-78, Computer Science Monographs,

No. 11, The Inst. Statist. Math., 1979.

- 5) 合田良実：波浪の統計的性質に関する二，三の数値的検討，港湾技術研究所報告，第24巻，第4号，p. 65～102，1985。
- 6) 磯部雅彦・近藤浩右・堀川清司：方向スペクトルの推定におけるMLMの拡張，第31回海岸工学講演会論文集，p.173～177，1984。
- 7) Briggs, M.J.: Calculation of directional wave spectra by the maximum entropy method of spectral analysis, Proc. of 19th ICCE, pp. 484～500, 1984.
- 8) Longuet-Higgins, M.S., D.E. Cartwright and N.D. Smith: Observation of the directional spectrum of sea wave using the motions of a floating buoy, Ocean Wave Spectra, Prentice Hall, Inc., New Jersey, pp.111～136, 1963.

補章 B ベイズ型モデルを用いた海洋波の非線形核関数の数値的推定¹⁾

海面を伝わる不規則な波浪は、第1近似として種々の方向に伝わる様々な微小振幅波の重ね合わせとして表現される。しかしながら、実際には非線形の性質もあり、特に浅海域においてはこれを無視することはできない。波浪の非線形性に関する研究の歴史は古く、既に多くの理論的、実験的研究が実施されている。しかしながら、従来の研究を振り返ってみると、特に現地観測データを用いた研究においては、もっぱら現地観測データにより波浪の非線形理論の妥当性を検証する立場の研究が多く、必ずしも実際の現地波浪の非線形特性を調査しているとは言えないものが多い。これは実際の不規則な非線形波浪の特性を明確に記述し、推定し得る統計的解析法が確立していないことに起因しているものと思われる。一方では、非線形・非ガウス過程を扱う時系列解析法としてバースペクトル解析がある。しかしながら、非線形効果がバースペクトル上に表現されていることは間違いないが、その非線形性についてははっきりした理論モデルが存在しない場合、バースペクトルの意味を読み取ることは難しい。したがって、より直接的に線形成分波相互間の干渉の度合い（非線形効果）を示す量が推定されるならば、実際の海洋波の非線形性を理解するのに有用であろう。また、このような量を推定することにより初めて現地観測データに基づいた非線形不規則波の数値シミュレーションが可能となる。

ここではこのような不規則波の非線形性を直接表示し得る解析法を開発する第1段階として、線形成分波の2次の干渉の度合いを示す量を特に非線形核関数と称し、観測されたパワースペクトルおよびバースペクトルからベイズ型モデルを用いて非線形核関数を推定する方法およびパワースペクトルに含まれる線形成分と2次の非線形成分のスペクトルを分離する方法について述べる。

なお、本章は本研究の主題である「海洋波の方向スペクトルの推定法に関する研究」には直接関わりはないが、本論文の第5章～第7章で述べたベイズ型モデルを用いた海洋波の統計的解析法の重要な応用の1つとして、本研究とは別に開発したので、参考のために補章として掲載することとした。

B-1 理論式の定式化

いま、観測された時系列データが弱非線形・疑似ガウ

ス過程に従うならば、観測されたパワースペクトル $S(\omega)$ およびバースペクトル $B(\omega_1, \omega_2)$ と線形成分のパワースペクトル $S^{(1)}(\omega)$ および2次の非線形成分のパワースペクトル $S^{(2)}(\omega)$ は、非線形核関数 $G(\omega_1, \omega_2)$ を

$$dZ^{(2)}(\omega) = \int G(\lambda, \omega - \lambda) dZ^{(1)}(\lambda) dZ^{(1)}(\omega - \lambda) \quad (\text{B.1})$$

で定義して、次式で関係付けられる^{2),3)}。

$$S(\omega) = S^{(1)}(\omega) + S^{(2)}(\omega) \quad (\text{B.2})$$

$$S^{(2)}(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} |G(\lambda, \omega - \lambda)|^2 S^{(1)}(\lambda) S^{(1)}(\omega - \lambda) d\lambda \quad (\text{ただし, } \omega \neq 0) \quad (\text{B.3})$$

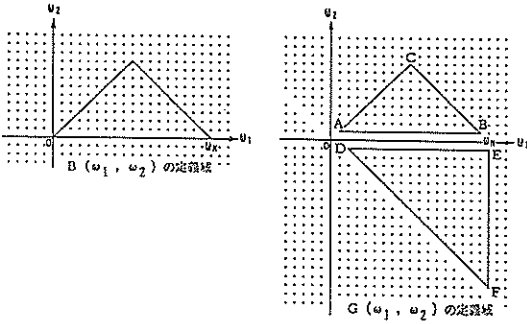
$$B(\omega_1, \omega_2) = 2 \{ G^*(\omega_1, \omega_2) S^{(1)}(\omega_1) S^{(1)}(\omega_2) + G(\omega_1 + \omega_2, -\omega_1) S^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) S^{(1)}(\omega_1) + G(\omega_1 + \omega_2, -\omega_2) S^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) S^{(1)}(\omega_2) \} \quad (\text{ただし, } \omega_1 \neq 0, \omega_2 \neq 0, \omega_1 + \omega_2 \neq 0) \quad (\text{B.4})$$

ここに、 $dZ^{(1)}(\omega)$ および $dZ^{(2)}(\omega)$ はそれぞれ角周波数 ω の線形成分波および2次の非線形成分波の複素振幅を表わす。また、 $B(\omega_1, \omega_2)$ および $G(\omega_1, \omega_2)$ は一般に複素数であり、*はその共役複素数を表わす。なお、有限長の離散データをもとに解析を実施する場合、 $B(\omega_1, \omega_2)$ および $G(\omega_1, \omega_2)$ の定義域はそれらの量の対称性の構造を考慮して、図B-1に示す範囲となる。 $G(\omega_1, \omega_2)$ の第1象限は2つの線形成分波の周波数の和の干渉を、第4象限は差の干渉を表わす。 $B(\omega_1, \omega_2)$ あるいは $G(\omega_1, \omega_2)$ の実部は不規則波の上下の非対称性に、虚部は前後の非対称性に関係付けられる。

観測値 $S(\omega)$ および $B(\omega_1, \omega_2)$ が与えられた段階では、式 (B.2)、(B.4) の右辺は全て未知量であり、 $G(\omega_1, \omega_2)$ について解くことはできない。そこでB-5に述べる理由により、次式で与えられる関数を便宜的に導入する。

$$K(\omega_1, \omega_2) = \frac{2G(\omega_1, \omega_2) S^{(1)}(\omega_1) S^{(1)}(\omega_2)}{S(\omega_1) S(\omega_2)} \quad (\text{B.5})$$

このとき、式 (B.3)、(B.4) は次式で表わされる。



図—B.1 バイスペクトル $B(\omega_1, \omega_2)$ と非線形核関数 $G(\omega_1, \omega_2)$ の定義域

$$S^{(2)}(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |K(\lambda, \omega - \lambda)|^2 \frac{\{S(\lambda)S(\omega - \lambda)\}^2}{S^{(2)}(\lambda)S^{(2)}(\omega - \lambda)} d\lambda \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} \frac{B(\omega_1, \omega_2)}{H(\omega_1, \omega_2)} = & \frac{1}{H(\omega_1, \omega_2)} \{K^*(\omega_1, \omega_2)S(\omega_1)S(\omega_2) \\ & + K(\omega_1 + \omega_2, -\omega_1)S(\omega_1 + \omega_2)S(\omega_1) \\ & + K(\omega_1 + \omega_2, -\omega_2)S(\omega_1 + \omega_2)S(\omega_2)\} \\ & + \varepsilon(\omega_1, \omega_2) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

ここに、 $\varepsilon(\omega_1, \omega_2)$ は誤差であり、平均 0、未知の分散 σ^2 の正規分布に従うものとする。また、 $H(\omega_1, \omega_2)$ は ε が前述の正規分布に従うように導入された便宜的な関数である。これについては、B—4 に後述する。以下では説明の便宜上、式 (B.7) の実部のみを扱うこととし、さらに式 (B.7) を次式のように行列表示して扱う。

$$B = AX + E \quad (\text{B.8})$$

ここに、 B はその要素が $B(\omega_1, \omega_2)/H(\omega_1, \omega_2)$ となる $M \times 1$ 行列、 A はその要素が $S(\cdot)S(\cdot)/H(\omega_1, \omega_2)$ となる $M \times N$ 行列、 X はその要素が $K(\cdot, \cdot)$ となる $N \times 1$ 行列、 E はその要素が $\varepsilon(\omega_1, \omega_2)$ となる $M \times 1$ 行列であり、 M は図—B.1 の定義域内の $B(\omega_1, \omega_2)$ の観測値の数、 N は $G(\omega_1, \omega_2)$ の推定値の数である。このとき、観測値 $B(\omega_1, \omega_2)$ が与えられれば、 X 、 σ^2 に関する尤度は、

$$L(X; \sigma^2) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{M/2} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \|AX - B\|^2 \right) \quad (\text{B.9})$$

で与えられる。ここに、 $\|\cdot\|$ はユークリッド・ノルムである。しかしながら、式 (B.7) あるいは式 (B.8) では、それぞれの式に 2 つあるいは 3 つの未知数が含まれており、どの未知数も連立していない。このため尤度が

最大となる X を式 (B.8) のみから特定することは不可能である。

そこで $K(\omega_1, \omega_2)$ すなわち X の要素 $x_{i,j}$ が連続的な滑らかな曲面を構成すると仮定し、 $K(\omega_1, \omega_2)$ が局所的には ω_i と ω_j の 1 次式 (局所的には平面) で近似し得るものと仮定する。このとき、

$$x_{i,j} - x_{i-1,j} - x_{i,j-1} + x_{i-1,j-1} \quad (\text{B.10})$$

は 0 に近いと想定される⁹⁾。また、図—B.1 中の境界 AB および DEF 上では X は滑らかな曲線を構成すると仮定すれば、例えば、

$$x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j} \quad (\text{AB 上}) \quad (\text{B.11})$$

は同様に 0 に近いと想定される。すなわち、

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j (x_{i,j} - x_{i-1,j} - x_{i,j-1} + x_{i-1,j-1})^2 \\ + \sum_j (x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j})^2 \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

あるいは作用行列 D を導入し、これを行列表示して、

$$\|DX\|^2 \quad (\text{B.13})$$

を考えると、式 (B.13) が小さい程、 X の推定値は滑らかになると考えられる。したがって、 X の推定値としては式 (B.13) をあまり大きくしない範囲で尤度 (式 (B.9)) の大きいものが望ましい。これを定式化すると、図—B.1 中の $G(\omega_1, \omega_2)$ が $\omega_2 = 0$ 上で不連続であることを考慮して、その第 1 象限および第 4 象限に異なる 2 つの超パラメータ u および v を用い、

$$\ln L(X; \sigma^2) - \frac{u^2}{2\sigma^2} \|D_u X\|^2 - \frac{v^2}{2\sigma^2} \|D_v X\|^2 \quad (\text{B.14})$$

を最大化する X を求めれば良い。ここに、 D_u および D_v はそれぞれ図—B.1 の $G(\omega_1, \omega_2)$ の第 1 象限および第 4 象限における式 (B.12) の作用行列である。式 (B.14) はベイズの推論方法において、事後分布 $p_{\text{post}}(\cdot)$ の

$$p_{\text{post}}(X|u^2, v^2, \sigma^2) = L(X; \sigma^2) p(X|u^2, v^2, \sigma^2) \quad (\text{B.15})$$

の関係式において、 X の事前分布として、

$$\begin{aligned} p(X|u^2, v^2, \sigma^2) = & p(X|u^2, \sigma^2) p(X|v^2, \sigma^2) \\ = & \left(\frac{u^2}{2\pi\sigma^2} \right)^{N/2} \exp \left(-\frac{u^2}{2\sigma^2} \|D_u X\|^2 \right) \\ & \times \left(\frac{v^2}{2\pi\sigma^2} \right)^{N/2} \exp \left(-\frac{v^2}{2\sigma^2} \|D_v X\|^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

を想定したことに他ならない。ここに、 N_1 および N_4 はそれぞれ図—B.1中の $G(\omega_1, \omega_2)$ の第1象限および第4象限で、事前分布を与えた格子点の数である。

u および v を与えれば、式(B.14)を最大化する X は σ に無関係に求まり、

$$\|AX - B\|^2 + u^2 \|D_u X\|^2 + v^2 \|D_v X\|^2 \quad (\text{B.17})$$

を最小化することにより得られる。また、 u, v の決定と σ の推定は次式で表わされる ABIC (赤池のベイズ型情報量基準)⁹⁾の最小化によれば良い。

$$\text{ABIC} = -2 \ln \int L(X; \sigma^2) p(X|u^2, v^2, \sigma^2) dX \quad (\text{B.18})$$

B-2 数値計算法

B-1で導いた式を用いて $G(\omega_1, \omega_2)$ を推定するためには、式(B.17)の最小化および式(B.18)の積分と最小化を実施しなければならない。式の誘導は省略するが、結果のみを示すと以下の手順となる⁹⁾。

- ① 適当な u, v を与えて式(B.17)に最小自乗法を適用し、与えられた u, v に対する X の推定値 $\bar{X}$ を推定する。
- ② ①で得られた結果を用いて、与えられた u, v に対する σ^2 および ABIC を次式で算出する。

$$\begin{aligned} \sigma^2 = & (\|A\bar{X} - B\|^2 + u^2 \|D_u \bar{X}\|^2 + v^2 \|D_v \bar{X}\|^2) \\ & / (M + N_1 + N_4 - N) \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

$$\begin{aligned} \text{ABIC} = & (M + N_1 + N_4 - N) \{1 + \ln(2\pi\sigma^2)\} \\ & + \ln\{\det(A' A + u^2 D_u' D_u + v^2 D_v' D_v)\} \\ & - N_1 \ln(u^2) - N_4 \ln(v^2) \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

- ③ u, v の値を種々に変えて、①、②の計算を繰り返す。
- ④ ①～③の計算結果の内、最小の ABIC を与える $u, v, \bar{X}, \sigma^2$ を最適な推定値とする。
- ⑤ ④で得られた $\bar{X}$ すなわち $K(\omega_1, \omega_2)$ を用い、 $S^{(1)}(\omega)$ の初期値として $S(\omega)$ を用いて、式(B.2)、(B.5)、(B.6)に逐次近似法を適用して $S^{(1)}(\omega)$ 、 $S^{(2)}(\omega)$ 、 $G(\omega_i, \omega_j)$ を推定する⁹⁾。

なお、①～③の超パラメータ u, v の設定に際しては事前に種々の試算を実施し、一般には、

$$u = a \times (0.5)^m \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad (\text{B.21})$$

$$v = b \times (0.5)^n \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (\text{B.22})$$

として格子探索法を実施した。ここに、 a, b は適当な定数である。また、現地観測データから推定された $S(\omega)$ および $B(\omega_1, \omega_2)$ にかんがりの推定誤差が含まれている場合には、⑤の逐次近似法による繰り返し計算において、 $S^{(2)}(\omega)$ が $S(\omega)$ よりも大きく推定され、計算が収束しない場合がある。この場合には、観測して得られた $S(\omega)$ においてあらかじめ線形成分のエネルギーの卓越した周波数範囲を想定し、この範囲の積分により $S^{(2)}(\omega)$ を推定して逐次近似法を実行した。

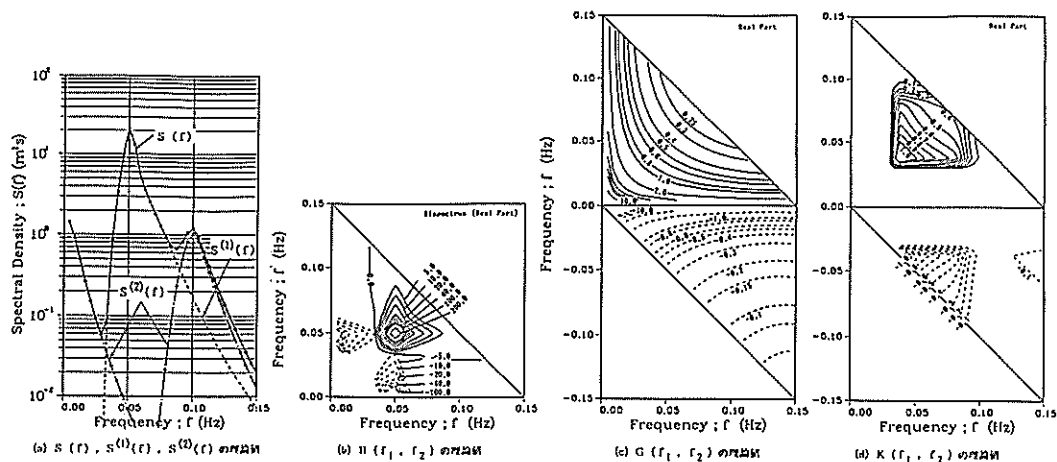
B-3 数値シミュレーションによる検討

ベイズ型モデルを用いた海洋波の非線形核関数の数値的推定法の推定精度や適用性、有効性などを検討するために数値シミュレーションを実施した。シミュレーションに用いた観測された $S(f)$ および $B(f_1, f_2)$ は、まず、適当な形の $S^{(1)}(f)$ を仮定し、Tick⁹⁾により導かれた次式で表わされる非線形核関数、

$$\begin{aligned} G(\omega_1, \omega_2) = & \frac{gk_1 k_2}{2\omega_1 \omega_2} + \frac{\omega_1 \omega_2}{2g} - \frac{(\omega_1 + \omega_2)^2}{2g} \\ & + (\omega_1 + \omega_2)^2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{g(\omega_2 k_1^2 + \omega_1 k_2^2)}{\omega_1 \omega_2 (\omega_1 + \omega_2)} \right. \\ & \left. + \frac{gk_1 k_2}{\omega_1 \omega_2} + \frac{\omega_1 \omega_2}{2g} - \frac{(\omega_1 + \omega_2)^2}{2g} \right\}^2 \\ & / \{g|k_1 + k_2| \tanh|k_1 + k_2|d - (\omega_1 + \omega_2)^2\} \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

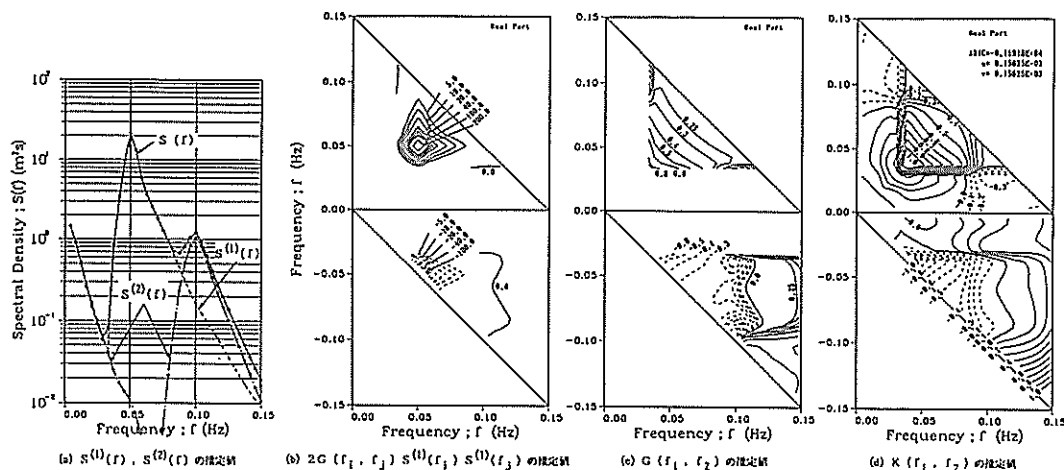
を用いて、式(B.2)～(B.4)により算出した。式(B.23)は等水深 d で一方向の不規則波の2次の非線形性までを考慮して導かれたものであり、 $G(\omega_1, \omega_2)$ が実数であることから、 $B(\omega_1, \omega_2)$ も実数となる。図—B.2は水深20mの条件で、適当な形の $S^{(1)}(f)$ をもとに計算された諸量の理論的關係を示したものであり、(a)は $S(f)$ 、 $S^{(1)}(f)$ 、 $S^{(2)}(f)$ の理論値を、(b)は $B(f_1, f_2)$ 、(c)は $G(f_1, f_2)$ 、(d)は $K(f_1, f_2)$ の理論値である。

図—B.3は式(B.7)中の関数 $H(f_1, f_2)$ を1として、図—B.2(a)の $S(f)$ 、(b)の $B(f_1, f_2)$ を用いて、B-1、B-2に述べた方法により、図—B.2に対応する諸量を推定した結果である。ただし、図—B.3(b)では $B(f_1, f_2)$ の代わりに式(B.4)の右辺、 $2G(f_1, f_2)S^{(1)}(f_1)S^{(1)}(f_2)$ を示している。これにより、図—B.2(b)に示す $B(f_1, f_2)$ の正値は2つの線形成分波の周波数の和の干渉により、負値は差の干渉により生じたものであることが分かる。図—B.2



図一B.2 数値シミュレーションに用いた諸量の理論値

((a)は周波数スペクトル $S(f)$ およびその線形成分 $S^{(1)}(f)$ と2次の非線形成分 $S^{(2)}(f)$, (b)はバイスペクトル $B(f_1, f_2)$, (c)は非線形核関数 $G(f_1, f_2)$, (d)は式 (b.5) で定義された関数 $K(f_1, f_2)$ の理論値を示している。)



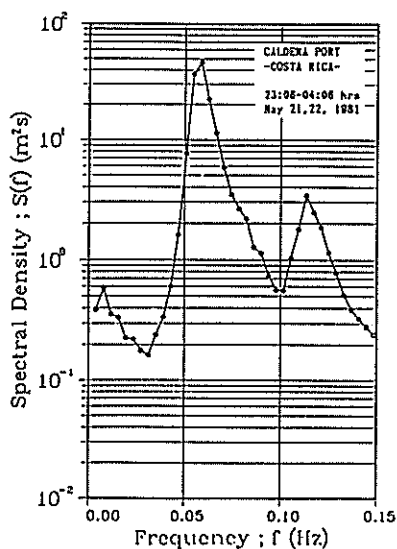
図一B.3 ベイズ型モデルにより推定された諸量の推定値

((a)は周波数スペクトル $S(f)$ およびその線形成分 $S^{(1)}(f)$ と2次の非線形成分 $S^{(2)}(f)$, (b)は $2G(f_1, f_2)S^{(1)}(f_1)S^{(1)}(f_2)$, (c)は非線形核関数 $G(f_1, f_2)$, (d)は式 (B.5) で定義された関数 $K(f_1, f_2)$ の推定値を示している。)

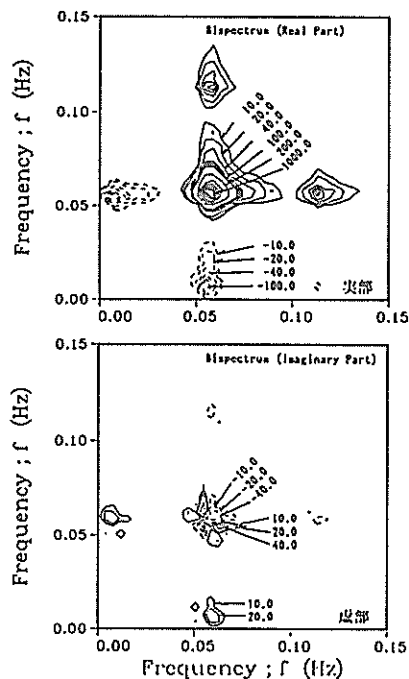
と図一B.3を比べると, $0.03 < |f| < 0.09$ (Hz) の範囲, すなわち $S^{(1)}(f)$ の卓越した周波数範囲ではいずれの量も極めて妥当な推定値を推定し得ることが分かる。なお, 図一B.3(b), (c)において, $|f| < 0.03$ (Hz) の範囲でこれらの量を図示していないのは, (a)に見られるように $S^{(2)}(f)$ が $S(f)$ よりも大きく推定されたために $S^{(1)}(f)$ を0と置くことにより, $G(f_1, f_2)$ が計算不能になったためである。

B-4 現地観測データへの適用

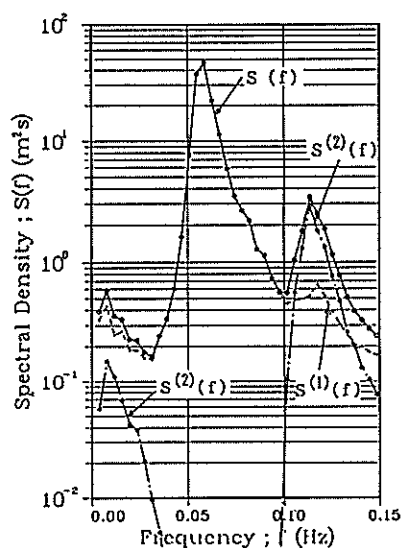
本章で述べた方法の現地観測データへの適用性を検討するために, 1981年5月にコスタリカ国カルデラ港で観測された顕著なうねりのデータを用いて解析した。図一B.4(a), (b)は観測された $S(f)$ および $B(f_1, f_2)$ を示す。ここではより安定した $B(f_1, f_2)$ を推定するために, 長時間にわたる連続的な観測データをいくつかのセグメントに分けてを計算し, それらの平均値を採用した。また, 同



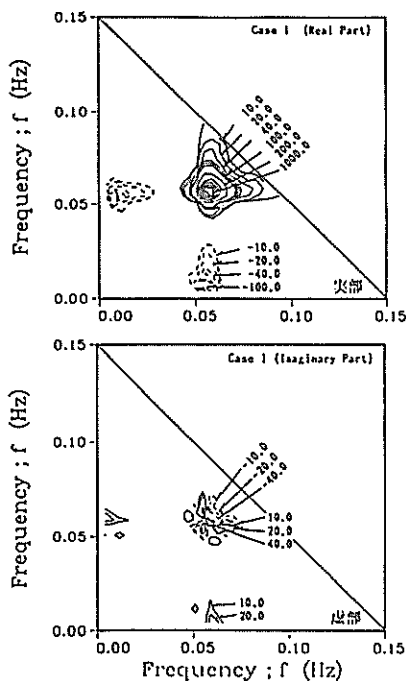
(a) $S(f)$ の観測値



(b) $B(f_1, f_2)$ の観測値



(c) $S^{(1)}(f)$, $S^{(2)}(f)$ の推定値



(d) $B(f_1, f_2)$ の逆推定値

図一B.4 ベイズ型モデルを用いた非線形核関数の推定法の現地観測データへの適用

((a)は周波数スペクトルの観測値, (b)はバイスペクトル $B(f_1, f_2)$ の観測値, (c)はベイズ型モデルにより分離された周波数スペクトルの線形成分 $S^{(1)}(f)$ と2次の非線形成分 $S^{(2)}(f)$, (d)はベイズ型モデルにより推定された非線形核関数 $G(f_1, f_2)$ と周波数スペクトルの線形成分 $S^{(1)}(f)$ をもとに, 式(B.4)により求められたバイスペクトル $B(f_1, f_2)$ の逆推定値)

時に $B(f_1, f_2)$ の誤差の標準偏差も算出した。図—B.4(c), (d)はこれらのデータを用いて解析した結果の一例であり、式 (B.7) 中の $H(\omega_1, \omega_2)$ を 1 として計算した結果である。図—B.4(c)は $S^{(1)}(f)$ と $S^{(2)}(f)$ を分離した結果であり、(d)は推定された $G(f_1, f_2)$ および $S^{(1)}(f)$ をもとに式 (B.7) により $B(f_1, f_2)$ を逆推定した結果である。(c)に見られるように、スペクトルのピーク周波数の 2 次ピークでの $S^{(2)}(f)$ は合田の結果⁹⁾に比べてかなり小さめである。しかしながら、(d)の $B(f_1, f_2)$ はほぼ完全に(b)の $B(f_1, f_2)$ を再現し得ており、(b)の $B(f_1, f_2)$ に含まれている 2 次の非線形効果は $G(f_1, f_2)$ 中で妥当に評価し得ていたものと推察される。したがって、図—B.4(c)に見られる低周波数側の $S^{(2)}(f)$ の過小評価は、本方法の不備によるものではなく、観測されたデータそのものの特性によるものと推察される。なお、ここには示していないが、ここで推定された $G(f_1, f_2)$ はかなり複雑な形状を示しており、 $G(f_1, f_2)$ から本データの 2 次の非線形特性を評価することは困難であった。この場合、式 (B.7) 中の $H(\omega_1, \omega_2)$ として別途計算して求めた $B(f_1, f_2)$ の誤差の標準偏差を用いれば、より滑らかな $G(f_1, f_2)$ が推定され便利である。ただし、この場合、(d)に示した $B(f_1, f_2)$ の逆推定値の精度は若干低下する。

B—5 まとめ

B—1, B—2では式 (B.2) ~ (B.4) により非線形核関数を推定する方法について述べた。しかしながら、式 (B.2) ~ (B.4) を $G(\omega_1, \omega_2)$ について解くことはもともと不完全な逆問題であり、数学的に厳密に解くことはできない。この意味では、ここで述べた方法により推定された解の妥当性を証明することはできない。しかしながら、ある種の主観的要素を含む統計モデルを媒介として、観測データから対象の構造に関する情報を引き出すことはあらゆる実験科学に共通の要素でもあり、この意味では本方法による非線形核関数の逆推定法は、現段階においては妥当な方法であろう。

なお、本章では式 (B.5) により新しい変数 $K(\omega_1, \omega_2)$ を導入して推定理論の定式化を行った。しかしながら、ベイズ型モデルを用いた同様な推定理論の定式化はここに述べた方法のみではなく、他にも幾つかの方法が可能である。例えば、観測された $S(\omega)$ が $S^{(1)}(\omega)$ の第 1 近似であると仮定すれば、式 (B.4) の $G(\omega_1, \omega_2)$ そのものにベイズ型モデルが適用でき、式 (B.4) を $G(\omega_1, \omega_2)$ について解くことと式 (B.2) ~ (B.3) の逐次近似法の全体を繰り返せば、同様に、 $S^{(1)}(\omega)$, $S^{(2)}(\omega)$, $G(\omega_1, \omega_2)$

を推定できる。実際、数値シミュレーション結果によれば、この方法の方が推定精度が良い。しかしながら、この方法の場合、格子探索法を用いた繰り返し計算を何度も繰り返す必要があり、かなりの計算時間を消費する。しかしながら、B—1, B—2で述べた方法によれば、格子探索法による繰り返し計算は最初の 1 回だけでよい。これが推定精度は劣るものの、式 (B.5) で新しい変数 $K(\omega_1, \omega_2)$ を導入し、推定理論の定式化を行った理由である。

参考文献

- 1) 橋本典明：ベイズ型モデルを用いた海洋波浪の非線形核関数の数値的推定，港湾技術研究所報告，第29巻，第3号，pp.27~56，1990。または，橋本典明：ベイズ型モデルを用いた海洋波浪の非線形核関数の数値的推定，海岸工学論文集，第37巻，pp.121~125，1990。
- 2) Hasselmann, K., W. Munk and G. MacDonald: Bispectra of ocean waves, Time Series Analysis (ed. M. Rosenblatt), John Wiley & Sons, Inc., pp.125~139, 1963.
- 3) Tick, L.J.: A non-linear random model of gravity waves I, J. Math. and Mech., Vol. 8, No. 3, pp.634~652, 1959.
- 4) Masuda, A. and Y. Kuo: A note on the imaginary part of bispectra, Deep-Sea Res., Vol. 28 A, No. 3, pp.213~222, 1981.
- 5) 坂元慶行：カテゴリカルデータのモデル分析，共立出版株式会社，221p，1985。
- 6) Akaike, H.: Likelihood and Bayes procedure, Bayesian Statistics (Bernardo, J.M., De Groot, M. H., Lindley, D.U. and Smith A.F.M. eds.) University Press, Valencia, pp.143~166, 1980.
- 7) Masuda, A., Y. Kuo and H. Mitsuyasu: On the dispersion relation of random gravity waves, Part 1. Theoretical framework, J. Fluid Mech., Vol. 92, Part 4, pp.717~730, 1979.
- 8) Tick, L.J.: Nonlinear probability models of ocean waves, Ocean Wave Spectra, Prentice Hall, pp.163~169, 1963.
- 9) Goda, Y.: Analysis of wave grouping and spectra of long-travelled swell, Rept. Port and Harbour Res. Inst., Vol. 22, No. 1, pp.3~41, 1983.

港 湾 技 研 資 料 No. 722

1 9 9 2 . 3

編集兼発行人 運輸省港湾技術研究所

発 行 所 運輸省港湾技術研究所
横須賀市長瀬3丁目1番1号

印 刷 所 株式会社 昭和工業写真印刷所

Published by Port and Harbour Research Institute
Nagase, Yokosuka, Japan

Copyright © (1992) by P.H.R.I

All rights reserved. No part of this book may be reproduced by any means, nor transmitted, nor translated into a machine language without the written permission of the Director General of P.H.R.I

この資料は、港湾技術研究所長の承認を得て刊行したものである。したがって、本資料の全部又は一部の転載、複写は、港湾技術研究所長の文書による承認を得ずしてこれを行ってはならない。