

# 港 湾 技 研 資 料

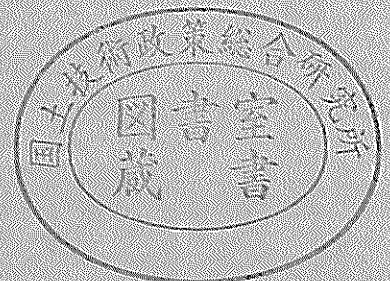
TECHNICAL NOTE OF  
THE PORT AND HARBOUR RESEARCH INSTITUTE  
MINISTRY OF TRANSPORT, JAPAN

No. 495      Sept. 1984

有限要素法による二層の潮流及び拡散計算

村 上 和 男  
森 川 雅 行

運輸省港湾技術研究所



# 目 次

要 旨 .....	3
1. まえがき .....	3
2. 基本方程式 .....	4
2.1 二層の潮流の基本方程式 .....	4
2.2 二層の拡散の基本方程式 .....	6
3. 有限要素法による定式化 .....	8
3.1 潮流方程式の定式化 .....	8
3.2 拡散方程式の定式化 .....	10
4. 計算結果の検討 .....	11
4.1 潮流計算結果の検討 .....	11
4.2 拡散計算結果の検討 .....	27
5. ま と め .....	36
参 考 文 献 .....	36
記 号 一 覧 .....	37
付 録 .....	39

# Numerical Simulations on Two-leveled Tidal Current and Substance Dispersion by means of Finite Element Method

Kazuo MURAKAMI\*  
Masayuki MORIKAWA\*\*

## Synopsis

This paper describes the numerical simulations of tidal current and substance dispersion using Finite Element Method. In this paper, two-leveled mathematical models of tidal current and substance dispersion are formulated in order to examine the effect of density stratification, river discharge and wind on flow or substance dispersion. It is assumed that the level of interfacial surface is fixed.

According to the results of one-layer system and two-layer system, averaged current velocity between upper and lower layers is almost the same as the velocity of one-layer system, in spite of the fact that the current velocity in upper-layer is considerably higher than the velocity in lower-layer.

The influence of river discharge on current is restricted around the mouth of big river. The wind driven current in upper-layer is about 3 cm/s/10knot to same direction as wind, whereas the water body in lower-layer is driven to opposite direction as the one in upper-layer because of compensation.

The results of contaminated water dispersion and salt water distribution simulations agree well with the field survey data in Tokyo Bay. Vertical current at interface acts vertical mixing of substance or salt between upper and lower layers.

---

\* Chief of Marine Diffusion Laboratory, Marine Hydrodynamics Division  
\*\* Member of Marine Diffusion Laboratory, Marine Hydrodynamics Division

# 有限要素法による二層の潮流及び拡散計算

村 上 和 男\*  
森 川 雅 行\*\*

## 要 旨

本資料は、有限要素法を用いて二層の潮流計算と拡散計算を実施し、湾内に流入する河川流量と海上風の流れに及ぼす影響を調べるとともに、汚染物質の拡散および海水中への淡水の流入による塩分分布に及ぼす鉛直混合の影響などについての検討を行ったものである。

ここで用いたモデルは、内部境界面の水位を固定して、上下層間の鉛直運動を鉛直流速によって考慮する2レベルモデルである。2レベルモデルによる潮流計算結果は、上層で速く下層で遅い結果となっているが、平均的には単層モデルの結果とほとんど同じである。現地でのM<sub>2</sub>潮の潮位と潮流の調和定数の値を、おむね再現しているものと思われる。

淡水流入による流れへの影響は、河口周辺ではかなりの流速の変化がみられるが、少し河口から離れると、その影響は急速に弱まる。また、風による影響は、上層においては3cm/s(風速10knotに対して)程度の影響がみられ、下層においては、逆方向の流れが発生する。

GODの拡散と塩分分布の計算は、現地の濃度分布のパターンをほぼ再現できた。内部境界面での鉛直流は、物質の上下層間の混合に大きな役割を果たしている。

## 1. まえがき

有限要素法の流体力学への適用が盛んである。これは、従来の数値計算法の差分法に比べて、要素の分割法が比較的任意に取りうるという点とともに、有限要素法の持つ数学的な有利性<sup>1)</sup>がおもな原因であると考えられる。

著者らも、前報<sup>2)</sup>において、有限要素法を用いた潮汐流の数値計算について論じた。前報においては、表層から底層までの平均化を施した単層二次元での潮流計算であった。しかしながら、夏期の実際の海域においては、表層で高温・低塩分となり、また底層では低温・高塩分となり、密度的に安定な状態が作り出される。このように、密度的に安定な状態になると、上下間の混合が非常に弱くなり、底層での貧酸素水塊が形成されやすくなる。貧酸素水塊の形成は、底質からの窒素・リンの溶出が促進され、海水の富栄養化の原因となる。

このように、夏期の水質を考える場合などには、上下方向の三次元的な挙動に対しても考慮する必要がある。三次元流の計算法については、いくつかの方法<sup>3), 4)</sup>が提案されているが、計算コストの問題などから、上層、下

層に分けた二次元二層の計算がよく行なわれる。

二層流の計算法には、一般には二つの方法が考えられている。ひとつは、上層と下層の内部境界面の水位が変化し、上下間の混合は、鉛直拡散と連行によるものだけとする2レイヤーモデルと、他のひとつは、上下間の内部境界面の水位を固定し、上昇流・下降流を考慮する2レベルモデルである。

内部境界面の現象について考えると、表面の潮位変化に伴って、内部境界面の水位が変化しているようで、2レイヤーモデルの方が、現象をより忠実に表そうと試みているものと考えられる。しかしながら、内部境界面の運動についてはまだ不明確な点が多く、また内部境界面での境界条件の与え方が難しいこと、及び計算の不安定の原因となりやすいことなど、2レベルモデルの方が計算においては扱いかいやすいことが多い<sup>5)</sup>。

このような観点から、有限要素法による2レベルモデルの潮流計算を実施した。計算結果を流れ場にして、拡散計算を汚染物質の拡散と塩分濃度の拡散について実施した。

本資料は、これらの計算結果を通して、淡水流入量と

\* 海洋水理部 海水汚染水理研究室長

\*\* 海洋水理部 海水汚染水理研究室

風の接線応力の流れに及ぼす影響について、それぞれ単層モデルと二層モデルによって検討したものである。本資料の構成は、1.にまえがき、2.に基本方程式、3.に有限要素法による定式化について述べ、4.に計算結果の検討、5.まとめとなっている。

## 2. 基本方程式

### 2.1 二層の潮流の基本方程式

図-1に示すのは、東京湾における夏期の水温、塩分、及び密度の鉛直分布である<sup>6)</sup>。このように、夏期の内湾での水温・塩分の鉛直分布は、表層において高温・低塩分であり、底層において低温・高塩分となっている。そして、これらの分布は水面下5~10m付近で急変するという、いわゆる躍層が形成される構造を示すことが多い。このような状態は、密度的に非常に安定であり、水塊の

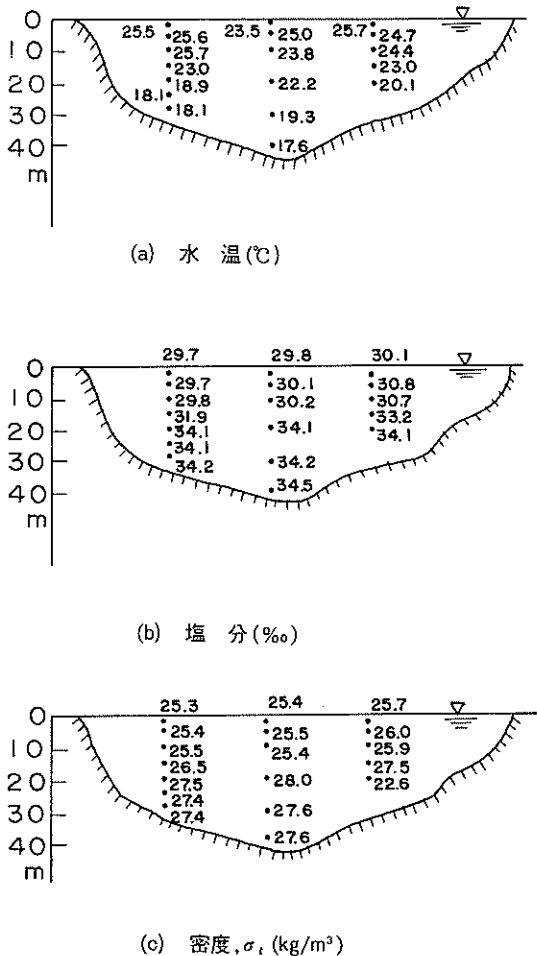


図-1 東京湾の夏期の水温・塩分・密度の鉛直分布 (56・8・6, 湾中央部, 村上他<sup>6)</sup>より)

上下間の混合が非常に弱く、夏期における水質悪化の原因のひとつとなっている。また、流れに及ぼす淡水流入および風の効果を考えた場合に、淡水は海水に比べて軽いので表層に流入することが多く、また風の接線応力は表面に強く働き、底層に行くに従って弱くなる。このように、夏期の水塊は上下で異った挙動を示すことがある。

以上のような問題を考慮に入れた場合、流れは水平方向のみならず、鉛直方向にも変化し、したがって流れを三次元的に取り扱う必要が生じてくる。しかし、流れを三次元的に取り扱うには、いろいろと困難な問題があり、現時点では二次元多層という取り扱いが多くなされている。多層流の中で、最も簡単なものとして、二層流を取上げることができる。二次元二層とは、従来の二次元単層が水面から海底までの積分量を取扱っているのに対し、水面から内部境界面と、内部境界面から海底までの積分量としての二次元単層問題を、2つ重ねて取り扱ったものとして考えることができる。

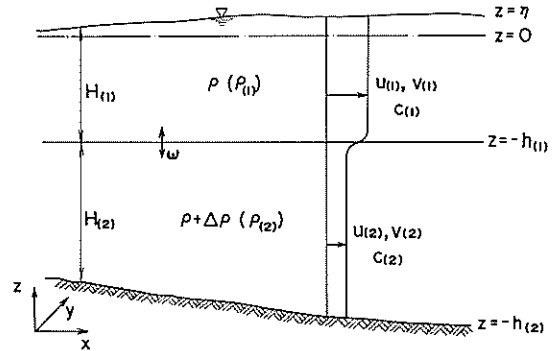


図-2 二層流の模式図(2レベルモデル)

二層流の基本方程式は、以下のように導くことができる<sup>7)</sup>。図-2に、二層流の模式図を示す。前述したように、潮流現象は本来三次元的なものであり、したがって、潮流の基本方程式も三次元的に次のように表すことができる。

連続の条件式は、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad \dots\dots (1)$$

運動方程式は、 $x$ 方向に対して、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho uw) \\ - \rho f v \\ = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad \dots\dots (2) \end{aligned}$$

y 方向に対して、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2) \\ & + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v w) + \rho f u \\ & = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

鉛直方向には、静水圧近似として

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

となる。ここにおいて、

- $\rho$  : 流体の密度
- $u, v, w$  : それぞれ  $x, y, z$  方向の流速
- $f$  : コリオリ力 ( $= 2 \omega \sin \phi$ )
- $\omega$  : 地球の自転角速度
- $\phi$  : 緯度
- $P$  : 圧力
- $\tau$  : 摩擦応力
- $g$  : 重力加速度

である。

いま、2 レベルモデルとして内部境界面を動かないものと考え、上層および下層についてそれぞれ積分をほどこすと、以下ようになる。

まず上層に対しては、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} q_x^{(1)} + \frac{\partial}{\partial y} q_y^{(1)} = q_I^{(1)} + \frac{\bar{\rho}}{\rho_{(1)}} w \quad \dots (5) \\ & \frac{\partial q_x^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}_{(1)} q_x^{(1)}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{u}_{(1)} q_y^{(1)}) \\ & = f q_y^{(1)} - \frac{\partial}{\partial x} (F_P^{(1)} - F_{zz}^{(1)}) + \frac{\partial}{\partial y} F_{yy}^{(1)} \\ & + \frac{1}{\rho_{(1)}} (\tau_x^s - \tau_x^i) + \frac{P_s}{\rho_{(1)}} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\bar{\rho}}{\rho_{(1)}} w \bar{u}_{(2)} \quad \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial q_y^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{v}_{(1)} q_x^{(1)}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v}_{(1)} q_y^{(1)}) \\ & = -f q_x^{(1)} + \frac{\partial}{\partial x} F_{yy}^{(1)} - \frac{\partial}{\partial y} (F_P^{(1)} - F_{yy}^{(1)}) \\ & + \frac{1}{\rho_{(1)}} (\tau_y^s - \tau_y^i) + \frac{P_s}{\rho_{(1)}} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\bar{\rho}}{\rho_{(1)}} w \bar{v}_{(2)} \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

また下層に対しては、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial q_x^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial q_y^{(2)}}{\partial y} = \frac{\bar{\rho}}{\rho_2} q_I^{(2)} - w \quad \dots\dots\dots (8) \\ & \frac{\partial q_x^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}_{(2)} q_x^{(2)}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{u}_{(2)} q_y^{(2)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = f q_y^{(2)} - \frac{\partial}{\partial x} (F_P^{(2)} - F_{zz}^{(2)}) + \frac{\partial}{\partial y} F_{yy}^{(2)} + \frac{1}{\rho_{(2)}} (\tau_x^i \\ & - \tau_x^b) - \{ P_s + \rho_{(1)} g (h_{(1)} + \eta) + \rho_2 g h_{(2)} \} \frac{\partial h_{(2)}}{\rho_{(2)} \partial x} \\ & - \frac{\bar{\rho}}{\rho_{(2)}} w u_{(2)} \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial q_y^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{v}_{(2)} q_x^{(2)}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v}_{(2)} q_y^{(2)}) \\ & = -f q_x^{(2)} + \frac{\partial}{\partial x} F_{yy}^{(2)} - \frac{\partial}{\partial y} (F_P^{(2)} - F_{yy}^{(2)}) \\ & + \frac{1}{\rho_{(2)}} (\tau_y^i - \tau_y^b) - \{ P_s + \rho_{(1)} g (h_{(1)} + \eta) \\ & + \rho_{(2)} g h_{(2)} \} \frac{\partial h_{(2)}}{\rho_{(2)} \partial y} - \frac{\bar{\rho}}{\rho_{(2)}} w \bar{v}_{(2)} \quad \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

となる。ここに、

- $P_s$  : 大気圧
- $\rho_{(1)}, \rho_{(2)}$  : 上層, 下層の水の密度
- $\tau_x^s, \tau_y^s$  : 風による接線応力
- $\tau_x^i, \tau_y^i$  : 内部摩擦応力
- $\tau_x^b, \tau_y^b$  : 海底摩擦応力

である。なお、式中のサフィックスに式した(1), (2)は、それぞれ上層と下層の値であることを意味する。また、式(5)~式(10)においては、

$$q_x^{(1)} = \int_{-h_{(1)}}^{\eta} u_{(1)} dz, \quad q_y^{(1)} = \int_{-h_{(1)}}^{\eta} v_{(1)} dz \quad \dots\dots (11)$$

$$q_x^{(2)} = \int_{-h_{(2)}}^{-h_{(1)}} u_{(2)} dz, \quad q_y^{(2)} = \int_{-h_{(2)}}^{-h_{(1)}} v_{(2)} dz \quad \dots\dots (12)$$

$$F_{zz}^{(1)} = \int_{-h_{(1)}}^{\eta} \left( \frac{\tau_{zz}}{\rho_{(1)}} - u_{(1)}'^2 \right) dz,$$

$$F_{yy}^{(1)} = \int_{-h_{(1)}}^{\eta} \left( \frac{\tau_{yy}}{\rho_{(1)}} - v_{(1)}'^2 \right) dz \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$F_{zz}^{(2)} = \int_{-h_{(2)}}^{-h_{(1)}} \left( \frac{\tau_{zz}}{\rho_{(2)}} - u_{(2)}'^2 \right) dz,$$

$$F_{yy}^{(2)} = \int_{-h_{(2)}}^{-h_{(1)}} \left( \frac{\tau_{yy}}{\rho_{(2)}} - v_{(2)}'^2 \right) dz \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$F_{xy}^{(1)} = F_{yx}^{(1)} = \int_{-h_{(1)}}^{\eta} \left( \frac{\tau_{xy}}{\rho_{(1)}} - u_{(1)}' v_{(1)}' \right) dz \quad \dots (15)$$

$$F_{xy}^{(2)} = F_{yx}^{(2)} = \int_{-h_{(2)}}^{-h_{(1)}} \left( \frac{\tau_{xy}}{\rho_{(2)}} - u_{(2)}' v_{(2)}' \right) dz \quad \dots (16)$$

$$\begin{aligned} F_P^{(1)} &= \frac{P_s}{\rho_{(1)}} h_{(1)} + \frac{1}{2} g \frac{(\rho_{(2)} - \rho_{(1)})}{\rho_{(1)}} h_{(1)}^2 \\ &+ \frac{1}{2} g h_{(1)}^2 \quad \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

$$F_P^{(2)} = \frac{(P_s + \rho_{(1)} g h_{(1)})}{\rho_{(2)}} h_{(2)} + \frac{1}{2} g \frac{(\rho_{(2)} - \rho_{(1)})}{\rho_{(2)}} h_{(2)}^2$$

$$+ \frac{1}{2} g h_{(2)}^2 \dots\dots\dots (18)$$

で定義される量である。

なお、ここで、鉛直流速  $w$  は上向きを正として定義される。また、風の接線応力、内部摩擦応力、および海底摩擦応力は一般に次のように定義される。

$$\tau_x^s = \rho_a C_D \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \cdot W_x \dots\dots\dots (19)$$

$$\tau_y^s = \rho_a C_D \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \cdot W_y \dots\dots\dots (20)$$

$$\tau_x^i = \frac{f_i}{8} \rho_{(1)} (\bar{u}_{(1)} - \bar{u}_{(2)}) \sqrt{(\bar{u}_{(1)} - \bar{u}_{(2)})^2 + (\bar{v}_{(1)} - \bar{v}_{(2)})^2} \dots\dots\dots (21)$$

$$\tau_y^i = \frac{f_i}{8} \rho_{(1)} (\bar{v}_{(1)} - \bar{v}_{(2)}) \sqrt{(\bar{u}_{(1)} - \bar{u}_{(2)})^2 + (\bar{v}_{(1)} - \bar{v}_{(2)})^2} \dots\dots\dots (22)$$

$$\tau_x^b = \frac{f_b}{8} \rho_{(2)} \bar{u}_{(2)} \sqrt{\bar{u}_{(2)}^2 + \bar{v}_{(2)}^2} \dots\dots\dots (23)$$

$$\tau_y^b = \frac{f_b}{8} \rho_{(2)} \bar{v}_{(2)} \sqrt{\bar{u}_{(2)}^2 + \bar{v}_{(2)}^2} \dots\dots\dots (24)$$

ここに、

- $W_x, W_y$  :  $x, y$  方向の風速
- $\rho_a$  : 空気の密度
- $C_D$  : 風の抵抗係数
- $f_i$  : 内部抵抗係数
- $f_b$  : 海底摩擦係数

である。

境界条件としては、流速あるいは流量を規定する境界において、

$$q_n = \alpha_{nz} q_x + \alpha_{ny} q_y = \bar{q}_n \dots\dots\dots (25)$$

$$q_s = -\alpha_{ny} q_x + \alpha_{nz} q_y = \bar{q}_s \dots\dots\dots (26)$$

とおく。また、圧力を規定する境界においては、

$$F_{nn} = -F_p + \alpha_{nz}^2 F_{xx} + \alpha_{ny}^2 F_{yy} + 2\alpha_{nz}\alpha_{ny} F_{xy} = \bar{F}_{nn} \dots\dots\dots (27)$$

$$F_{ns} = (\alpha_{nz}^2 - \alpha_{ny}^2) F_{xy} + \alpha_{nz}\alpha_{ny} (F_{yy} - F_{xx}) = \bar{F}_{ns} \dots\dots\dots (28)$$

と表す。ここに、 $\alpha_{nz}, \alpha_{ny}$  は、それぞれ境界に対する直交成分の方向余弦を表す。流量を規定する境界においては、一般に陸岸境界においては陸岸を横切る流れはないとして、 $\bar{q}_n = 0$  と与える。また、河川などの境界においては、流量を境界条件として与えるか、あるいは、連続条件式に横流入として与える方法が用いられる。

また、圧力を規定する境界においては、開境界において、一般に、水位の境界条件が与えられ、 $F_{zz}, F_{zy}, F_{yy}$  については、正確な流速データがないことから無視される。

これらの境界条件の概略を図-3に示す。この図において、 $S_q$  は流量境界を示し、 $S_F$  は圧力境界を示す。

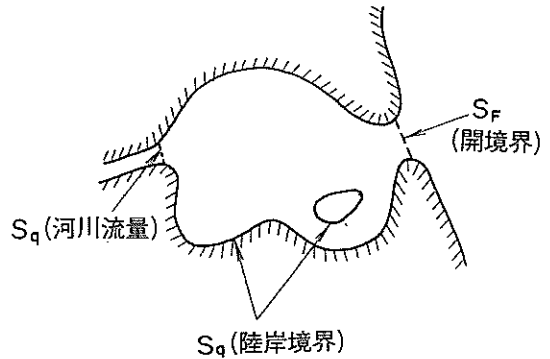


図-3 潮流の境界条件 ( $S_F$  : 圧力境界条件,  $S_q$  : 流量境界条件)

## 2.2 二層の拡散の基本方程式

物質の拡散現象についても、潮流同様、三次元的な現象であり、物質保存の基本方程式は三次元的に次のように表すことができる。

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (uc + Q_x') - \frac{\partial}{\partial y} (vc + Q_y') - \frac{\partial}{\partial z} (wc + Q_z') + P \dots\dots\dots (29)$$

ここに、

- $c$  : 物質の濃度
- $u, v, w$  :  $x, y, z$  方向の流速,
- $Q_x', Q_y', Q_z'$  :  $x, y, z$  方向の拡散フラックス,
- $P$  : 減衰, 生産, 負荷などの項

である。しかし、前述したように、流れの場が上下層の二層として与えられたならば、物質の拡散についても同様に二層の現象として扱う必要がある。したがって、潮流の場合と同様に、三次元の拡散方程式を底面から内部境界面まで、および内部境界面から自由表面まで積分すると、二層位モデルの拡散の基本方程式が以下のよう表せる。

上層に対して、

$$\frac{\partial (c_{(1)} + H_{(1)})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u_{(1)} c_{(1)} H_{(1)}) + \frac{\partial}{\partial y} (v_{(1)} c_{(1)} H_{(1)}) = -\frac{\partial}{\partial x} Q_{x(1)} - \frac{\partial}{\partial y} Q_{y(1)} + P_{(1)} \dots\dots\dots (30)$$

また、下層に対して

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (c_{(2)} H_{(2)})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u_{(2)} c_{(2)} H_{(2)}) + \frac{\partial}{\partial y} (v_{(2)} c_{(2)} H_{(2)}) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} Q_{x(2)} - \frac{\partial}{\partial y} Q_{y(2)} + P_{(2)} \quad \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

となる。ここにおいて、

$$\begin{aligned} Q_{x(1)} &= \int_{-h(1)}^{\eta} (Q'_x + u'' c'') dz, \\ Q_{y(1)} &= \int_{-h(1)}^{\eta} (Q'_y + v'' c'') dz \quad \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{x(2)} &= \int_{-h(2)}^{-h(1)} (Q'_x + u'' c'') dz, \\ Q_{y(2)} &= \int_{-h(2)}^{-h(1)} (Q'_y + v'' c'') dz \quad \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{(1)} &= -(w_s - w) \frac{c_{(1)} + c_{(2)}}{2} - \alpha (c_{(1)} - c_{(2)}) \\ &\quad - k_{(1)} c_{(1)} + R_{(1)} \quad \dots\dots\dots (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{(2)} &= (w_s - w) \frac{c_{(1)} + c_{(2)}}{2} + \alpha (c_{(1)} - c_{(2)}) \\ &\quad - k_{(2)} c_{(2)} + R_{(2)} \quad \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

で表される。ここで、

- $w_s$  : 物質の沈降速度
- $\alpha$  : 上下層の交換係数
- $k_{(1)}, k_{(2)}$  : 物質の減衰係数
- $R_{(1)}, R_{(2)}$  : 物質の流入負荷量
- $u'', v''$  : 流速の断面平均値からの偏差
- $c''$  : 濃度の断面平均値からの偏差

である。

いま、乱流拡散と移流分散に関する項を、分散係数と濃度勾配の積で表すとすると、

$$-Q_{x(1)} = E_{xx} H_{(1)} \frac{\partial c_{(1)}}{\partial x} + E_{xy} H_{(1)} \frac{\partial c_{(1)}}{\partial y} \quad \dots\dots (36)$$

$$-Q_{y(1)} = E_{xy} H_{(1)} \frac{\partial c_{(1)}}{\partial x} + E_{yy} H_{(1)} \frac{\partial c_{(1)}}{\partial y} \quad \dots\dots (37)$$

$$-Q_{x(2)} = E_{xx} H_{(2)} \frac{\partial c_{(2)}}{\partial x} + E_{xy} H_{(2)} \frac{\partial c_{(2)}}{\partial y} \quad \dots\dots (38)$$

$$-Q_{y(2)} = E_{xy} H_{(2)} \frac{\partial c_{(2)}}{\partial x} + E_{yy} H_{(2)} \frac{\partial c_{(2)}}{\partial y} \quad \dots\dots (39)$$

となる。ここに、 $E_{xx}, E_{yy}, E_{xy}$  は分散係数テンソルである。したがって、二層位モデルの拡散に関する基本方程式は、上層に対しては

$$\frac{\partial (c_{(1)} H_{(1)})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u_{(1)} c_{(1)} H_{(1)}) + \frac{\partial}{\partial y} (v_{(1)} c_{(1)} H_{(1)})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial x} (E_{xx} H_{(1)} \frac{\partial c_{(1)}}{\partial x} + E_{xy} H_{(1)} \frac{\partial c_{(1)}}{\partial y}) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} (E_{xy} H_{(1)} \frac{\partial c_{(1)}}{\partial x} + E_{yy} H_{(1)} \frac{\partial c_{(1)}}{\partial y}) \\ &\quad - (w_s - w) \frac{c_{(1)} + c_{(2)}}{2} - \alpha (c_{(1)} - c_{(2)}) \\ &\quad - k_{(1)} H_{(1)} c_{(1)} + R_{(1)} \quad \dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

また、下層に対しては、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (c_{(2)} H_{(2)})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u_{(2)} c_{(2)} H_{(2)}) + \frac{\partial}{\partial y} (v_{(2)} c_{(2)} H_{(2)}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (E_{xx} H_{(2)} \frac{\partial c_{(2)}}{\partial x} + E_{xy} H_{(2)} \frac{\partial c_{(2)}}{\partial y}) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} (E_{xy} H_{(2)} \frac{\partial c_{(2)}}{\partial x} + E_{yy} H_{(2)} \frac{\partial c_{(2)}}{\partial y}) \\ &\quad + (w_s - w) \frac{c_{(1)} + c_{(2)}}{2} + \alpha (c_{(1)} - c_{(2)}) \\ &\quad - k_{(2)} c_{(2)} H_{(2)} + R_{(2)} \quad \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

と書き表すことができる。

これらの式を展開すると、上層に対しては

$$\begin{aligned} & c_{(1)} \left( \frac{\partial H_{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial q_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial q_y^{(1)}}{\partial y} - q_I^{(1)} - \frac{\bar{\rho}}{\rho_{(1)}} w \right) \\ &\quad + c_{(1)} q_I^{(1)} + c_{(1)} \frac{\bar{\rho}}{\rho_{(1)}} w + H_{(1)} \frac{\partial c_{(1)}}{\partial t} + q_x^{(1)} \frac{\partial c_{(1)}}{\partial x} \\ &\quad + q_y^{(1)} \frac{\partial c_{(1)}}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (E_{xx} H_{(1)} \frac{\partial c_{(1)}}{\partial x} + E_{xy} H_{(1)} \frac{\partial c_{(1)}}{\partial y}) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} (E_{xy} H_{(1)} \frac{\partial c_{(1)}}{\partial x} + E_{yy} H_{(1)} \frac{\partial c_{(1)}}{\partial y}) \\ &\quad - (w_s - w) \frac{c_{(1)} + c_{(2)}}{2} - \alpha (c_{(1)} - c_{(2)}) \\ &\quad - k H_{(1)} c_{(1)} + R_{(1)} \quad \dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

となる。ここで、式(5)の関係を用いると、左辺第1項のカッコの中は消去されて、

$$\begin{aligned} & H_{(1)} \frac{\partial c_{(1)}}{\partial t} + q_x^{(1)} \frac{\partial c_{(1)}}{\partial x} + q_y^{(1)} \frac{\partial c_{(1)}}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (E_{xx} H_{(1)} \frac{\partial c_{(1)}}{\partial x} + E_{xy} H_{(1)} \frac{\partial c_{(1)}}{\partial x}) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} (E_{xy} H_{(1)} \frac{\partial c_{(1)}}{\partial x} + E_{yy} H_{(1)} \frac{\partial c_{(1)}}{\partial y}) \\ &\quad - (w_s - w) \frac{c_{(1)} + c_{(2)}}{2} - \frac{\bar{\rho}}{\rho_{(1)}} c_{(1)} w - c_{(1)} q_I^{(1)} \\ &\quad - \alpha (c_{(1)} - c_{(2)}) - k H_{(1)} c_{(1)} + R_{(1)} \quad \dots\dots\dots (43) \end{aligned}$$



と表される。同様に下層に対しても、

$$\begin{aligned}
 & H_{(2)} \frac{\partial c_{(2)}}{\partial t} + q_{z(2)} \frac{\partial c_{(2)}}{\partial x} + q_{y(2)} \frac{\partial c_{(2)}}{\partial y} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} (E_{zx} H_{(2)} \frac{\partial c_{(2)}}{\partial x} + H_{xy} H_{(2)} \frac{\partial c_{(2)}}{\partial y}) \\
 &+ \frac{\partial}{\partial y} (E_{zy} H_{(2)} \frac{\partial c_{(2)}}{\partial x} + E_{yy} H_{(2)} \frac{\partial c_{(2)}}{\partial y}) \\
 &+ (w_s - w) \frac{c_{(1)} + c_{(2)}}{2} + c_{(2)} \frac{\bar{\rho}}{\rho_{(2)}} w - c_{(2)} q_I^{(2)} \\
 &+ \alpha (c_{(1)} - c_{(2)}) - k H_{(2)} c_{(2)} + R_{(2)} \quad \dots\dots\dots (44)
 \end{aligned}$$

となる。

境界条件としては、濃度を規定する基本境界条件 (Essential boundary condition) が境界  $S_c$  上で

$$c = c^* \quad \dots\dots\dots (45)$$

として与えられる。また、鉛直方向のフラックスを規定する自然境界条件 (Natural boundary condition) が境界  $S_q$  上で

$$Q = Q_n^* \quad \dots\dots\dots (46)$$

として与えられる。

### 3. 有限要素法による定式化

#### 3.1 潮流方程式の定式化

流体力学における有限要素法による数値解法は、一般に重み付き残差法のひとつであるガラーキン法が用いられる<sup>6)</sup>。ガラーキン法とは、重み関数に試験関数を用いて重み付き残差を最小にする近似解法である。この方法を、潮流の基本方程式に適用すると以下ようになる。

上層に対しては、

$$\int_{\Omega} (\eta_{,t} + q_{z,z}^{(1)} + q_{y,y}^{(1)} - q_I^{(1)} - \frac{\bar{\rho}}{\rho_{(1)}} w) \Delta h \, d\Omega = 0 \quad \dots\dots\dots (47)$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \{ q_{z,t}^{(1)} + (\bar{u}_{(1)} q_z^{(1)})_{,z} + (\bar{u}_{(1)} q_y^{(1)})_{,y} - f q_y^{(1)} \\
 &+ (F_P^{(1)} - F_{zz}^{(1)})_{,z} - F_{yy}^{(1)} + \frac{1}{\rho_{(1)}} (\tau_x^e - \tau_x^i) \\
 &+ \frac{P^s}{\rho_{(1)}} \eta_{,z} - \frac{\rho}{\rho_{(1)}} w \bar{u}_{(2)} \} \Delta q_z \, d\Omega = 0 \quad \dots (48)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \{ q_{y,t}^{(1)} + (\bar{v}_{(1)} q_z^{(1)})_{,z} + (\bar{v}_{(1)} q_y^{(1)})_{,y} + f q_z^{(1)} \\
 &- F_{xy}^{(1)} + (F_P^{(1)} - F_{yy}^{(1)})_{,y} + \frac{1}{\rho_{(1)}} (\tau_y^e - \tau_y^i) \\
 &+ \frac{P^s}{\rho_{(1)}} \eta_{,y} - \frac{\bar{\rho}}{\rho_{(1)}} w \bar{v}_{(2)} \} \Delta q_y \, d\Omega = 0 \quad \dots\dots(49)
 \end{aligned}$$

となる。ここで、数値計算を簡略化するために境界条件を部分的に満足し、かつ関数の連続条件を緩和した基準関数を用いて弱形式化による定式化を行う。これは、式(48)、式(49)に、境界での残差を加え、左辺第1項の積分の中の一部に部分積分をほどこすと、これらの方程式は次のように変形される。

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \{ (q_{z,t}^{(1)} + (\bar{u}_{(1)} q_z^{(1)})_{,z} + (\bar{u}_{(1)} q_y^{(1)})_{,y} - f q_y^{(1)} \\
 &+ \frac{1}{\rho_{(1)}} (\tau_x^e - \tau_x^i) - \frac{P^s}{\rho_{(1)}} \eta_{,z} - \frac{\bar{\rho}}{\rho_{(1)}} w \bar{u}_{(2)} \} \Delta q_z \\
 &- \{ (F_P^{(1)} - F_{zz}^{(1)}) \Delta q_{z,z} - F_{yy}^{(1)} \Delta q_{z,y} \} \, dA \\
 &+ \int_{S_F} \alpha_{nz} F_P^{*(1)} \Delta q_z^{(1)} \, dS + \int \{ \{ \alpha_{nz} q_n^{(1)} - \alpha_{ny} q_s^{(1)} \\
 &- q_x^{(1)*} \} \Delta q_z^{(1)} - \{ \alpha_{nz} (F_{zz}^{(1)} - F_P^{(1)}) + \alpha_{ny} F_{yy}^{(1)} \} \\
 &\Delta q_z^{(1)} \} \, dS = 0 \quad \dots\dots\dots (50)
 \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \{ (q_{y,t}^{(1)} + (\bar{v}_{(1)} q_z^{(1)})_{,z} + (\bar{v}_{(1)} q_y^{(1)})_{,y} + f q_z^{(1)} \\
 &+ \frac{1}{\rho_{(1)}} (\tau_y^e - \tau_y^i) - \frac{P^s}{\rho_{(1)}} \eta_{,y} - \frac{\bar{\rho}}{\rho_{(1)}} w \bar{v}_{(2)} \} \Delta q_y \\
 &- \{ -F_{xy}^{(1)} \Delta q_{z,z} + (F_P^{(1)} - F_{yy}^{(1)}) \Delta q_{y,y} \} \, dA \\
 &+ \int_{S_F} \alpha_{ny} F_P^{*(1)} \Delta q_y^{(1)} \, dS + \int_{S_q} \{ \{ \alpha_{ny} q_n^{(1)} + \alpha_{nz} q_s^{(1)} \\
 &- q_y^{(1)*} \} \Delta q_y^{(1)} - \{ \alpha_{nz} F_{xy}^{(1)} + \alpha_{ny} (F_{yy}^{(1)} - F_P^{(1)}) \} \\
 &\Delta q_y^{(1)} \} \, dS = 0 \quad \dots\dots\dots (51)
 \end{aligned}$$

ここにおいて、\*の付いた諸量は境界において与えられるものである。

式(50)、式(51)において、圧力を与える境界(開境界)においては  $F_{zz}^{(1)}$ 、 $F_{xy}^{(1)}$ 、 $F_{yy}^{(1)}$  は無視されている。

下層に対しても同様な手順でもって、連続条件式に対しては、

$$\int_{\Omega} (q_{z,z}^{(2)} + q_{y,y}^{(2)} + \frac{\bar{\rho}}{\rho_{(2)}} w - q_I^{(2)}) \Delta h \, d\Omega = 0 \quad \dots (52)$$

また、運動方程式に対しては、

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \{ q_{z,y}^{(2)} + (\bar{u}_{(2)} q_z^{(2)})_{,x} + (\bar{u}_{(2)} q_y^{(2)})_{,y} - f q_y^{(2)} \\
 &+ \frac{1}{\rho_{(2)}} (\tau_x^i - \tau_x^b) - \frac{\rho_{(1)}}{\rho_{(2)}} g H_{(2)} \eta_{,z} + w \bar{u}_{(2)} \} \Delta q_z^{(2)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \{ (F_P^{(2)} - F_{zz}^{(2)}) \Delta q_{z,x}^{(2)} - F_{yz}^{(2)} \Delta q_{z,y}^{(2)} \} dA \\
& + \int_{S_F} \alpha_{nz} F_P^{*(2)} \Delta q_x^{(2)} dS + \int_{S_q} \{ \alpha_{nz} q_n^{(2)} - \alpha_{ny} q_s^{(2)} \\
& - q_x^{*(2)} \} \Delta q_x^{(2)} - \{ \alpha_{nz} (F_{zz}^{(2)} - F_P^{(2)}) \\
& + \alpha_{ny} F_{yz}^{(2)} \} \Delta q_x^{(2)} dS = 0 \quad \dots\dots\dots (53)
\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \{ \{ q_{y,t}^{(2)} + (\bar{v}_{(2)} q_z^{(2)})_{,z} + (\bar{v}_{(2)} q_y^{(2)})_{,y} + f q_x^{(2)} \\
& + \frac{1}{\rho_{(2)}} (\tau_y^i - \tau_y^b) - \frac{\rho_{(1)}}{\rho_{(2)}} H_{(2)} \eta_{,y} + w \bar{v}_{(2)} \} \Delta q_y^{(2)} \\
& - \{ -F_{zy}^{(2)} \Delta q_{y,z}^{(2)} + (F_P^{(2)} - F_{yy}^{(2)}) \Delta q_{y,y} \} dA \\
& + \int_{S_F} \alpha_{ny} F_P^{*(2)} \Delta q_y^{(2)} dS + \int_{S_q} \{ \alpha_{ny} q_n^{(2)} + \alpha_{nz} q_s^{(2)} \\
& - q_y^{*(2)} \} \Delta q_y^{(2)} - \{ \alpha_{nz} F_{zy}^{(2)} + \alpha_{ny} (F_{yy}^{(2)} - F_P^{(2)}) \} \Delta q_y^{(2)} dS \\
& = 0 \quad \dots\dots\dots (54)
\end{aligned}$$

と表される。

有限要素法とは、これらの解析領域を三角形または四角形の有限要素に分割し、そのおのおの要素に対する近似解を、それぞれ局所化された関数を適用し、それらを重ね合わせて全体の近似解を求めるという方法である。ここでは、前報<sup>2)</sup>と同様に三角形要素を用いる。

いま、計算領域を多くの三角形に分割し、その三角形内の流速（線流量）と水位は、その三角形の節点での値の一次関数で与えられるとすると、三角形内での任意の点での流速と水位は、それぞれ、

$$q_x = \xi_1 q_{x_1}^e + \xi_2 q_{x_2}^e + \xi_3 q_{x_3}^e = \underline{\phi} \underline{q}_x^e \quad \dots\dots (55)$$

$$q_y = \xi_1 q_{y_1}^e + \xi_2 q_{y_2}^e + \xi_3 q_{y_3}^e = \underline{\phi} \underline{q}_y^e \quad \dots\dots (56)$$

$$w = \xi_1 w_1^e + \xi_2 w_2^e + \xi_3 w_3^e = \underline{\phi} \underline{w}^e \quad \dots\dots (57)$$

$$\eta = \xi_1 \eta_1^e + \xi_2 \eta_2^e + \xi_3 \eta_3^e = \underline{\phi} \underline{\eta}^e \quad \dots\dots (58)$$

で与えられる。ここで、 $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  は正規化された三角形座標で、図-4によって与えられるものである。また、サフィックス  $e$  は、おのおのの変数の節点値であることを意味し、 $\sim$  はマトリックスであることを意味している。また、重み関数についても同様に表すと、

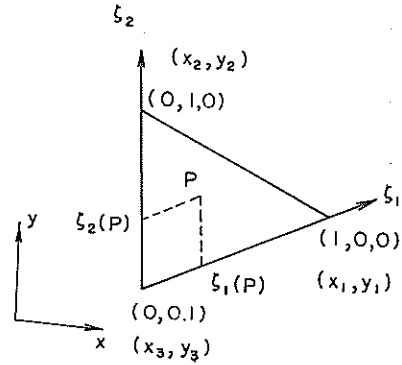


図-4 正規化された三角座標系

$$\Delta h = \xi_1 \Delta h_1^e + \xi_2 \Delta h_2^e + \xi_3 \Delta h_3^e = \underline{\phi} \underline{\Delta h}^e \quad \dots\dots (59)$$

$$\Delta q_x = \xi_1 \Delta q_{x_1}^e + \xi_2 \Delta q_{x_2}^e + \xi_3 \Delta q_{x_3}^e = \underline{\phi} \underline{\Delta q}_x^e \quad \dots\dots (60)$$

$$\Delta q_y = \xi_1 \Delta q_{y_1}^e + \xi_2 \Delta q_{y_2}^e + \xi_3 \Delta q_{y_3}^e = \underline{\phi} \underline{\Delta q}_y^e \quad \dots\dots (61)$$

となる。式(55)～式(61)の諸量を、式(47), (50), (51), および式(52)～(54)に代入し、これを計算領域全体にわたって積分すると、上層の連続式(47)は、

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\eta_{,t} + q_{z,z}^{(1)} + q_{y,y}^{(1)} - \frac{\rho_{(2)}}{\rho_{(1)}} w - q_t^{(1)}) \Delta h \, d\Omega \\
& = \sum_{i=1}^{NMEL} [ (\Delta \underline{h}^{e_i})^T \int_{\Omega_i} \underline{\phi}^T \{ \underline{\phi} \eta_{,t}^e + \underline{\phi}_{,z} q_x^{(1)e} \\
& + \underline{\phi}_{,y} q_y^{(1)e} - \frac{\bar{\rho}}{\rho_{(1)}} \underline{\phi} w^e - \underline{\phi} q_t^{(1)e} \} dA ] \quad \dots\dots (62)
\end{aligned}$$

となる。ここに、NMELは総要素数である。これを、簡単な形で記すと、

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{NMEL} (\Delta \underline{h}^{e_i})^T (M^i \underline{\eta}_{,t}^{e_i} + F_x^i q_x^{(1)e_i} + F_y^i q_y^{(1)e_i} \\
& - \frac{\bar{\rho}}{\rho_{(1)}} M^i \underline{w}^{e_i} - M^i q_t^{(1)e_i}) = 0 \quad \dots\dots (63)
\end{aligned}$$

で表される。ここに、

$$\underline{M}^i = \int_{A_i} \underline{\phi}^T \cdot \underline{\phi} \, dA \quad \dots\dots (64)$$

$$\underline{F}_x^i = \int_{A_i} \underline{\phi}^T \cdot \underline{\phi}_{,x} \, dA \quad \dots\dots (65)$$

$$\underline{F}_y^i = \int_{A_i} \underline{\phi}^T \cdot \underline{\phi}_{,y} \, dA \quad \dots\dots (66)$$

である。

運動方程式についても同様の操作をほどこすと、

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{NMEL} (\underline{d}q_z^{e_i})^T \{ M^i \underline{q}_{z,t}^{(1)e_i} - f M^i \underline{q}_y^{(1)e_i} - (G_z^i)^T \underline{\eta}^{e_i} \\ & + \underline{E}_{k_{zz}}^i \underline{q}_z^{(1)e_i} + \underline{E}_{k_{yz}}^i \underline{q}_y^{(1)e_i} \} \\ & = \sum_{i=1}^{NMEL} (\underline{d}q_z^{e_i})^T \underline{P}_z^{(1)e_i} \dots\dots\dots (67) \end{aligned}$$

および、

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{NMEL} (\underline{d}q_y^{e_i})^T \{ M^i \underline{q}_{y,t}^{(1)e_i} - (G_y^i)^T \underline{\eta}^{e_i} + \underline{E}_{k_{zy}}^i \underline{q}_z^{(1)e_i} \\ & + \underline{E}_{k_{yy}}^i \underline{q}_y^{(1)e_i} \} \\ & = \sum_{i=1}^{NMEL} (\underline{d}q_y^{e_i})^T \underline{P}_y^{(1)e_i} \dots\dots\dots (68) \end{aligned}$$

となる。

ここに、

$$\underline{G}_z^{(1)i} = \int_{A_i} \underline{g} \underline{\phi}^T (\underline{\phi} \underline{k}_{(1)}) \underline{\phi}_{,z} dA \dots\dots\dots (69)$$

$$\underline{G}_y^{(1)i} = \int_{A_i} \underline{\phi}^T (\underline{\phi} \underline{k}_{(1)}) \underline{\phi}_{,y} dA \dots\dots\dots (70)$$

である。また粘性項は、水平混合係数を用いて、

$$\underline{F}_{z_i z_j} = E_{k_{ij}} \left( \frac{\partial q_j}{\partial x_i} + \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \right) \quad i, j = 1, 2 \dots\dots\dots (71)$$

で定義される。これらを、マトリックスの形で書くと、連続の式は

$$\underline{M} \underline{\eta}_{,t} + \underline{F}_x \underline{q}_z^{(1)} + \underline{F}_y \underline{q}_y^{(1)} - \frac{\bar{\rho}}{\rho_{(1)}} \underline{M} \underline{w} - \underline{M} \underline{q}_f^{(1)} = 0 \dots\dots\dots (72)$$

$$\begin{aligned} & \underline{M} \underline{q}_{z,t}^{(1)} - \underline{G}_x^{(1)T} \underline{\eta} + \underline{E}_{k_{zz}} \underline{q}_z^{(1)} + \underline{E}_{k_{zy}} \underline{q}_y^{(1)} - f \underline{M} \underline{q}_y^{(1)} \\ & = \underline{P}_z^{(1)} \dots\dots\dots (73) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \underline{M} \underline{q}_{y,t}^{(1)} - \underline{G}_y^{(1)T} \underline{\eta} + \underline{E}_{k_{yz}} \underline{q}_z^{(1)} + \underline{E}_{k_{yy}} \underline{q}_y^{(1)} + f \underline{M} \underline{q}_z^{(1)} \\ & = \underline{P}_y^{(1)} \dots\dots\dots (74) \end{aligned}$$

で表される。下層についても同様に、

$$\underline{F} \underline{q}_z^{(2)} + \underline{F}_y \underline{q}_y^{(2)} + \frac{\bar{\rho}}{\rho_{(2)}} \underline{M} \underline{w} - \underline{M} \underline{q}_f^{(2)} = 0 \dots\dots (75)$$

$$\begin{aligned} & \underline{M} \underline{q}_{z,t}^{(2)} - \underline{G}_x^{(2)T} \underline{h}_{(2)} + \underline{E}_{k_{zz}} \underline{q}_z^{(2)} + \underline{E}_{k_{yz}} \underline{q}_y^{(2)} - f \underline{M} \underline{q}_y^{(2)} \\ & = \underline{P}_z^{(2)} \dots\dots\dots (76) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \underline{M} \underline{q}_{y,t}^{(2)} - \underline{G}_y^{(2)T} \underline{h}_{(2)} + \underline{E}_{k_{zy}} \underline{q}_z^{(2)} + \underline{E}_{k_{yy}} \underline{q}_y^{(2)} + f \underline{M} \underline{q}_z^{(2)} \\ & = \underline{P}_y^{(2)} \dots\dots\dots (77) \end{aligned}$$

で表される。これらの式の詳細な説明は、巻末の付録Aで行う。

### 3.2 拡散方程式の定式化

拡散方程式についても、ガラーキン法による定式化が行われる。この場合も、潮流の場合と同様に、関数の連続条件が緩和された弱形式による定式化が行われる。

境界での残差を考慮した重み付き残差を、拡散の基本方程式に適用すると、式(30)は

$$\begin{aligned} R_{(i)} &= \int \{ H_{(i)} \frac{\partial c_{(i)}}{\partial t} + q_z^{(i)} \frac{\partial c_{(i)}}{\partial x} + q_y^{(i)} \frac{\partial c_{(i)}}{\partial y} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} Q_{x(i)} + \frac{\partial}{\partial y} Q_{y(i)} - P_{(i)} \} \Delta W dA \\ & + \int_{S_q} (Q_{n_i}^* - Q_{n_i}) \Delta W dS = 0 \\ & \quad (i = 1, 2) \dots\dots\dots (78) \end{aligned}$$

となる。ここに、 $\Delta W$ は重み関数である。これに部分積分を施し、更にガウスの定理を適用すると

$$\begin{aligned} R_{(i)} &= \int \{ \{ H_{(i)} \frac{\partial c_{(i)}}{\partial t} + q_z^{(i)} \frac{\partial c_{(i)}}{\partial x} + q_y^{(i)} \frac{\partial c_{(i)}}{\partial y} \\ & - P_{(i)} \} \Delta W - Q_{z(i)} \frac{\partial \Delta W_{(i)}}{\partial x} - Q_{y(i)} \frac{\partial \Delta W_{(i)}}{\partial y} \} dA \\ & + \int_{S_q} Q_{n_i}^* \Delta W dS = 0 \quad (i = 1, 2) \dots\dots\dots (79) \end{aligned}$$

となる。

式(79)において、移流項に線流量 ( $q_x^{(i)} = u_{(i)} H_{(i)}$ 、 $q_y^{(i)} = v_{(i)} H_{(i)}$ )を用いているのは、拡散方程式中の流動場に、潮流計算の結果を用いているためである。拡散方程式とは物質の保存則であるので、その移流項を構成する媒体の保存則に対しても満足するように注意を要する。

ここに、

$$\begin{aligned} P_{(1)} &= - (w_s - w) \frac{c_{(1)} + c_{(2)}}{2} - \frac{\rho_{(2)}}{\rho_{(1)}} c_{(1)} w - c_{(1)} q_f^{(1)} \\ & - \alpha'_{(1)} H_{(1)} (c_{(1)} - c_{(2)}) - k H_{(1)} c_{(1)} + R_{(1)} \dots\dots\dots (80) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{(2)} &= (w_s - w) \frac{c_{(1)} + c_{(2)}}{2} + c_{(2)} w - c_{(2)} q_f^{(2)} \\ & + \alpha'_{(2)} H_{(2)} (c_{(1)} - c_{(2)}) - k H_{(2)} c_{(2)} + R_{(2)} \dots\dots\dots (81) \end{aligned}$$

である。なお、 $\bar{\rho} = \rho_{(2)}$ と仮定している。また $\alpha'_{(i)} = \alpha / H_i$ である。

式(79)の残差を、それぞれの三角形について積分し、計算領域全体にわたって重ね合わせると、

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{NMBL} (\Delta W)^T \left[ \int_T \phi^T \left\{ H_{(i)} \frac{\partial c_{(i)}}{\partial t} + q_z^{(i)} \frac{\partial c_{(i)}}{\partial x} \right. \right. \\ & \left. \left. + q_y^{(i)} \frac{\partial c_{(i)}}{\partial y} - P_{(i)} \right\} dA - \int_A (\phi_x^T Q_{z^{(i)}} \right. \\ & \left. + \phi_{,y}^T Q_{y^{(i)}}) dA + \int_{S_q} \phi_b^T Q_{n^{(i)}}^{b*} dS = 0 \quad \dots (82) \end{aligned}$$

となる。これをマトリックスの形で書き表すと、2レベルモデルの拡散方程式の有限要素定式化は、

$$\begin{aligned} & \underline{M}_{c_{(1)}} c_{(1),t} + \underline{A}_{(1)} c_{(1)} + \underline{K}_{(1)} c_{(1)} + \underline{D}_{(1)} c_{(1)} + \underline{E}_{(1)} (c_{(1)} \\ & - c_{(2)}) + \underline{E}^* = \underline{S}_{(1)} \sim \underline{F}_{(1)}^{b*} \quad \dots (83) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \underline{M}_{c_{(2)}} c_{(2),t} + \underline{A}_{(2)} c_{(2)} + \underline{K}_{(2)} c_{(2)} + \underline{D}_{(2)} c_{(2)} + \underline{E}_{(2)} (c_{(2)} - c_{(1)}) \\ & - \underline{E}^* = \underline{S}_{(2)} - \underline{F}_{(2)}^{b*} \quad \dots (84) \end{aligned}$$

で書き表せる。ここに、

$$\underline{M}_{c_{(i)}} = \int \phi^T \phi H_{(i)} \phi dA \quad \dots (85)$$

$$\underline{A}_{(i)} = \int \phi^T (\phi q_x^{(i)} \phi_{,x} + \phi q_y^{(i)} \phi_{,y}) dA \quad \dots (86)$$

$$\begin{aligned} & \underline{K}_{(i)} = - \int \phi_{,z}^T (E_{zz} \phi H_{(i)} \phi_{,z} + E_{zy} \phi H_{(i)} \phi_{,y}) dA \\ & - \int \phi_{,y}^T (E_{zy} \phi H_{(i)} \phi_{,z} + E_{yy} \phi H_{(i)} \phi_{,y}) dA \quad \dots (87) \end{aligned}$$

$$\underline{D}_{(i)} = -k_i \bar{H}_{(i)} \int \phi^T \phi dA \quad \dots (88)$$

$$\underline{E}_{(1)} = \frac{1}{2} \int \phi^T \phi w \phi dA - \alpha'_{(1)} \bar{H}_{(1)} \int \phi^T \phi dA \quad \dots (89)$$

$$\underline{E}_{(2)} = -\frac{1}{2} \int \phi^T \phi w \phi dA - \alpha'_{(2)} \bar{H}_{(2)} \int \phi^T \phi dA \quad \dots (90)$$

$$\underline{E}^* = -w_s \int \phi^T \phi dA \frac{c_{(1)}^e + c_{(2)}^e}{2} \quad \dots (91)$$

$$\underline{S}_{(i)} = \int \phi^T \phi Q_{I^{(i)}} \phi dA c_{(i)}^e \quad \dots (92)$$

$$\underline{F}_{(i)}^{b*} = \int_{S_q} \phi_b^T \phi_b^e dS Q_{n^{(i)}}^{b*} \quad \dots (93)$$

で定義されるものである。なお、これらの式の詳細な説明に関しては付録Bで行う。

## 4. 計算結果の検討

### 4.1 潮流計算結果の検討

(a) 東京湾での潮流計算条件

前報<sup>2)</sup>と同様に東京湾を例題に取り上げて、2レベルモデルでの潮流計算を実施した。また、比較のために二次元単層での計算もあわせ実施した。

表-1 潮流の計算条件

	単層モデル	二層モデル
節点数	172	同左
要素数	272	同左
最大要素面積	7.5 km <sup>2</sup>	同左
最小要素面積	1.6 km <sup>2</sup>	同左
タイムステップ	30秒	同左
海底摩擦係数	0.005	0.005
内部抵抗係数	*	0.0015
水平混合係数	$E_{k_{zz}} = E_{k_{yy}} = 500 \text{ m}^2/\text{s}$ $E_{k_{zy}} = 250 \text{ m}^2/\text{s}$	同左
上層厚さ	*	5 m
開境界条件	表-2	同左
河川流入量	表-3	同左(上層に流入)
抗力係数	式(59)~(60)	同左
密度	$\rho = 1.015$	上層 $\rho_{(1)} = 1.015$ 下層 $\rho_{(2)} = 1.025$

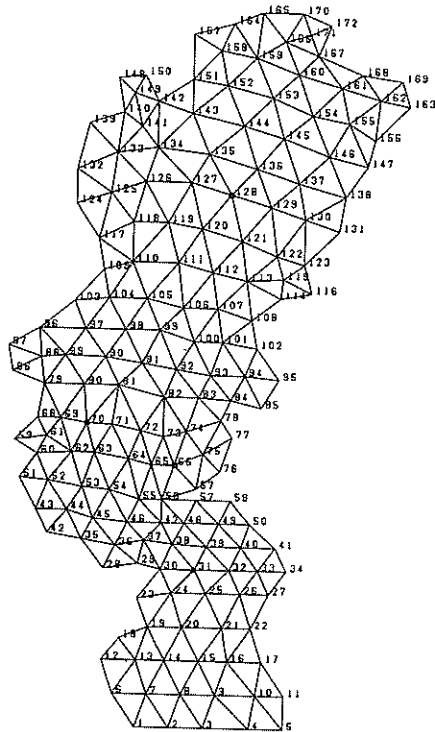


図-5 有限要素分割図(節点数172, 要素数272)

表-1に、今回用いた計算の条件を示す。ここで、これらの計算条件についての若干の考察を行う。

図-5に、東京湾を三角形の有限要素に分割した要素分割図を示す。節点総数172、要素総数272と、前報に比べて若干増加してある。これは、三角形の有限要素の3つの頂点が陸岸境界であると、陸岸境界条件によりその要素の総ての節点での流向が規定されてしまうので、不自然な流速分布となりやすい。したがって、前報では3点とも陸岸境界であったような要素は今回の計算においては細分割したためである。前報<sup>2)</sup>で、図-22(a)、(b)(p.24, 25)の左上部の要素の流速が不自然に大きかったのは、この三角形要素の3節点ともが陸岸境界であったためと思われる。

タイムステップは、一般的に

$$\Delta t < \frac{\alpha_t \Delta s}{\sqrt{2gh}} = \alpha_t \Delta t_{cr} \quad \dots\dots\dots (94)$$

で与えられる。ここで $\alpha_t$ はWangら<sup>7)</sup>の経験によると、1~1.5程度の値が得られている。差分法においては、一般に $\Delta s$ が一定値であるので、水深の最大のところでタイムステップは規定されるが、有限要素法の場合には $\Delta s$ が任意にとれるので、 $\Delta s/\sqrt{h}$ が最小のところ、すなわち、水深が最大か、あるいは $\Delta s$ が最小のところ、が最も厳しい条件となるものと思われる。今回の計算では、浦賀水道のところで条件が制約条件となり、

$$\Delta t_{cr} = \frac{\alpha_t \Delta s}{\sqrt{2gh}} = \frac{1.0 \times (1,600,000 \sqrt{3})^{1/2}}{\sqrt{2 \times 9.8 \times 100}} = 38 \text{ 秒} \quad \dots\dots\dots (95)$$

が得られた。したがって、ここではタイムステップとして30秒を採用した。なお $\Delta s$ の大きさとしては、要素の三角形を正三角形とみなした場合の頂点とある一辺までの距離をとっている。

海底摩擦係数は、

$$f_b = \frac{n^2 g}{h^{3/2}} \quad \dots\dots\dots (96)$$

で与えられる。ここで、 $n$ はマンングの粗度係数、 $h$ は水深、 $g$ は重力加速度である。いま、 $n = 0.025$ 、 $h = 30 \text{ m}$ 、 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ とすると、 $f_b = 0.002$ 程度であるが、前報において、海底摩擦係数の値が計算の安定化に大きく寄与していること、および $f_b = 0.002$ のケースの流れが若干不安定であったことなどを勘案して、 $f_b = 0.005$ と大きめの値を採用した。

内部摩擦係数についてはいろいろな式が提案されている。たとえば金子<sup>10)</sup>によると、塩水くさび内の界面での内部摩擦係数は

$$f_i = 0.2 (F_i^2 R_e)^{-0.5} \quad \dots\dots\dots (97)$$

で与えられる。ここで、 $F_i$ は内部フルード数、 $R_e$ はレイノルズ数である。ここでは、例題として

$$F_i = \frac{u_{(1)}^2}{g \frac{\Delta \rho}{\rho_{(1)}} h_{(1)}} = \frac{25^2}{980 \times 0.01 \times 500} = 0.13 \quad \dots\dots\dots (98)$$

$$R_e = \frac{u_{(1)} h_{(1)}}{\nu_{(1)}} = \frac{25 \times 500}{0.01} = 1.25 \times 10^6 \quad \dots\dots\dots (99)$$

とすると、 $f_i = 0.0014$ となる。したがって本計算においては、試験的に、 $f_i = 0.0015$ を用いた。また、 $f_i = 0.005$ と海底摩擦係数と同じ値にした場合についても検討している。

風の海面への接線応力に対する抗力係数 $C_D$ は、

$$C_D = 0.00091 \quad (w_{10} < 7 \text{ m/s}) \quad \dots\dots\dots (100)$$

$$C_D = 0.00091 + 0.00207 \left(1 - \frac{7}{w_{10}}\right)^2 \quad (w_{10} > 7 \text{ m/s}) \quad \dots\dots\dots (101)$$

が用いられている。ここに、 $w_{10}$ は海面上10mの風速である。この抗力係数についても数多くの研究<sup>11)</sup>があり、どの値を用いるのかは議論のあるところではあるが、一般的に、風速が大きくなるにしたがって抗力係数が大きくなる傾向がある。

水平渦動粘性係数は、節点間の距離の平均を3kmとすると、

$$E_{k_{zz}} = E_{k_{yy}} = 0.02 l^{\frac{4}{3}} = 0.02 \cdot (300,000)^{\frac{4}{3}} = 4 \times 10^5 \text{ cm}^2/\text{s} = 40 \text{ m}^2/\text{s} \quad \dots\dots\dots (102)$$

になる。しかし、前報において、水平渦動粘性係数が小さい場合には計算の不安定が生じることから、今回は、

$$E_{k_{zz}} = E_{k_{yy}} = 500 \text{ m}^2/\text{s} \\ E_{k_{xy}} = 250 \text{ m}^2/\text{s} \quad \dots\dots\dots (103)$$

という大きい値を採用している。

その他の計算条件としては、上層の厚さを5mと仮定し、開境界条件としては前報と同じように三浦半島の城ヶ島と房総半島の岩井袋とに、潮汐の卓越周潮であるM<sub>2</sub>潮の水位振動を与えている。東京港周辺での潮汐の調和定数に関しては表-2に、また、河川流入量に関しては表-3に示す。ここに示したものは年平均流量で、これを各投入点から連続的に与えている。

表-2 東京湾周辺の潮汐の調和定数

	K <sub>1</sub>		O <sub>1</sub>		M <sub>2</sub>		S <sub>2</sub>		潮型 指数
	H	κ <sub>0</sub>	H	κ <sub>0</sub>	H	κ <sub>0</sub>	H	κ <sub>0</sub>	
館山	22	161	18	156	36	147	18	174	0.74
若井	23	179	17	157	35	152	17	174	0.77
富津	25	178	18	158	45	159	21	180	0.65
千葉	26	182	19	161	51	155	25	186	0.59
東京	24.6	184.4	18.6	166.6	50.1	162.4	23.9	193.0	0.58
布良	21.6	175.3	16.7	158.5	35.6	141.3	16.3	171.9	0.74
霊岸島	22	182	18	170	45	166	19	198	0.63
横浜	24.9	179.7	19.3	160.2	46.7	155.2	22.7	185.1	0.64
横須賀	24.1	179.4	18.8	160.0	42.8	153.0	20.7	182.5	0.68
浦賀	24	176	20	163	38	151	18	178	0.79
久里浜	23.4	178.0	18.2	158.4	35.8	148.0	17.0	176.8	0.79
城ヶ島	22	177	18	159	38	146	17	171	0.73
油壺	22.9	180.1	17.9	160.9	35.2	152.6	16.7	181.8	0.79

表-3 河川流量(年平均流量)

番号	河川名・地点名	節点番号	流 量
1	根岸	68	1.11 ton/s
2	横浜港	86	5.07
3	横浜港	87	5.07
4	鶴見川	96	13.10
5	浮島	109	4.31
6	多摩川	117	72.80
7	東京港	132	1.78
8	荒川	148	63.20
9	江戸川放水路	142	92.50
10	習志野	165	2.20
11	検見川	167	3.82
12	千葉	169	8.31
13	養老川	156	11.30
14	市原	147	3.75
15	小櫃川	84	2.32
16	小糸川	77	18.80

(b) 潮流計算結果

以上述べた計算条件を用いて、表-4に示すケースの潮流計算を実施した。ここでは、主として単層モデルと2層モデルの相違、特に、河川流入と風の及ぼす影響についての検討を行った。この表において、風速10 knot、風向135°とあるのは、約5 m/sの風が南東の方向(計算軸が真北より7°時計廻りに傾いているので風向が真

表-4 潮流の計算ケース

ケース番号	層	河川 流入	風 速	風 向	内部抵抗 係 数
CAFE-11	単層	有	0	0	*
CAFE-12	単層	無	0	0	*
CAFE-13	単層	有	10 knot	135°	*
CAFE-14	単層	有	10 knot	315°	*
CAFE-21	2層	有	0	0	0.0015
CAFE-22	2層	無	0	0	0.0015
CAFE-23	2層	有	10 knot	135°	0.0015
CAFE-24	2層	有	10 knot	315°	0.0015
CAFE-25	2層	有	10 knot	315°	0.0050
CAFE-26	2層	無	0	0	0.0050

北から142°の方向)より吹いていることを意味する。

まず、二次元単層モデルの結果を示す。図-6(a)に示すのは、河川流入有り・風無しのケース(CAFE-11)の上潮最強時での潮流ベクトル図である。図-6(b)に示すのは同時刻での水位分布図である。また、図-7(a)、(b)に示すのは、同じケースでの下潮最強時での潮流ベクトル図、および水位分布図である。

次に、同じ計算条件での二次元2層モデル(2レベルモデル-CAFE-21)の結果を示す。図-8(a)~(c)に示すのは、上潮最強時での上層の潮流ベクトル図、水位分布図、下層の潮流ベクトル図、および境界面での鉛直流の分布である。また、図-9(a)~(c)に下潮最強時での同

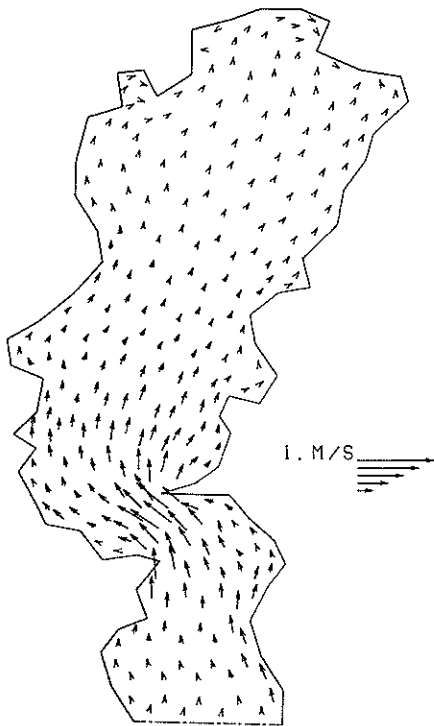


図-6(a) 潮流図(単層モデル, CAFE-11, 上潮最強時, 41時間目)

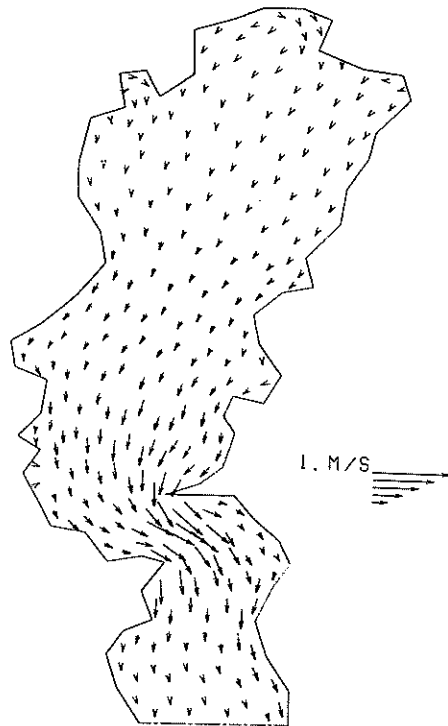


図-7(a) 潮流図(単層モデル, CAFE-11, 下潮最強時, 47時間目)

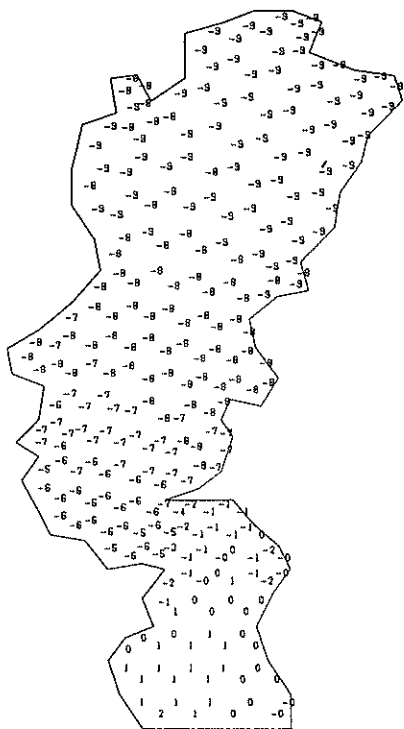


図-6(b) 水位分布図(単層モデル, CAFE-11, 上潮最強時, 41時間目, 単位 cm)

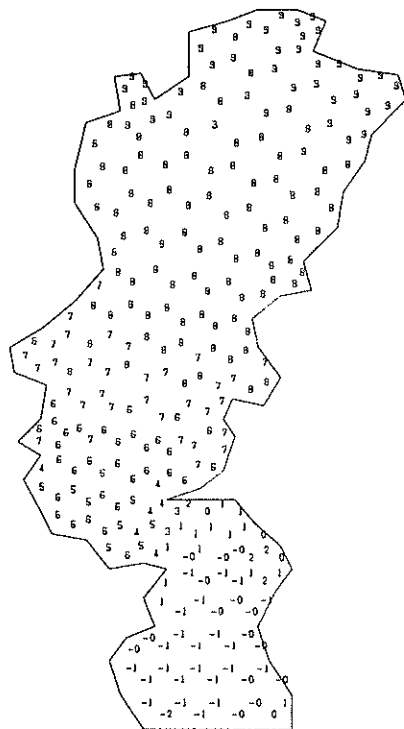


図-7(b) 水位分布図(単層モデル, CAFE-11, 下潮最強時, 47時間目, 単位 cm)

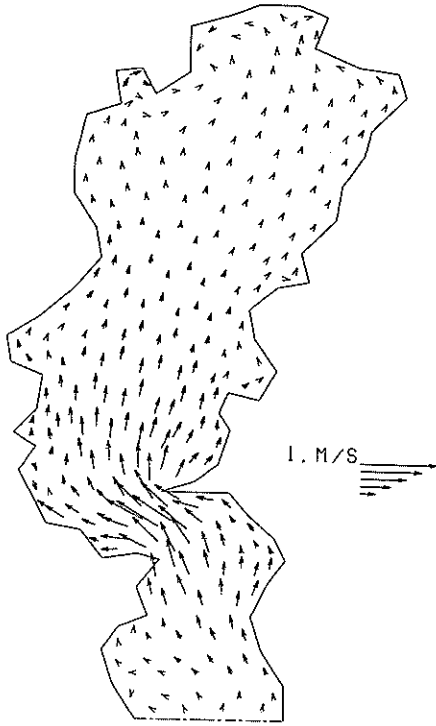


図-8(a) 潮流図(二層モデル, CAFE-21, 上層, 上潮最強時, 41時間目)

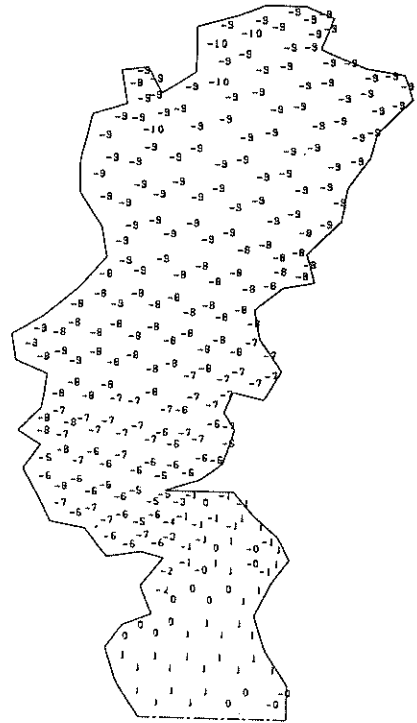


図-8(c) 水位分布図(二層モデル, CAFE-21, 上潮最強時, 41時間目, 単位 cm)

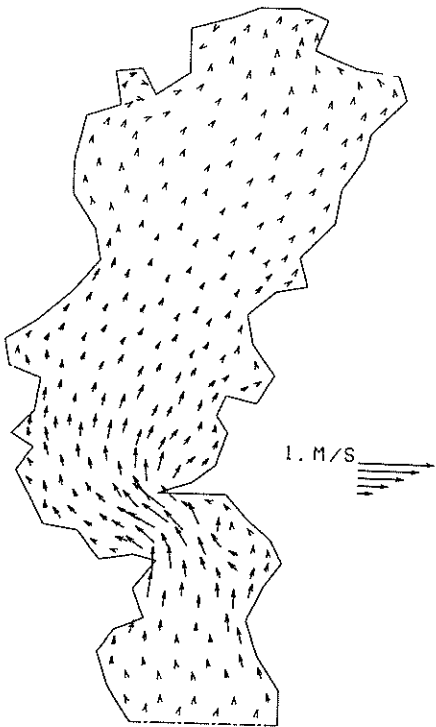


図-8(b) 潮流図(二層モデル, CAFE-21, 下層, 上潮最強時, 41時間目)

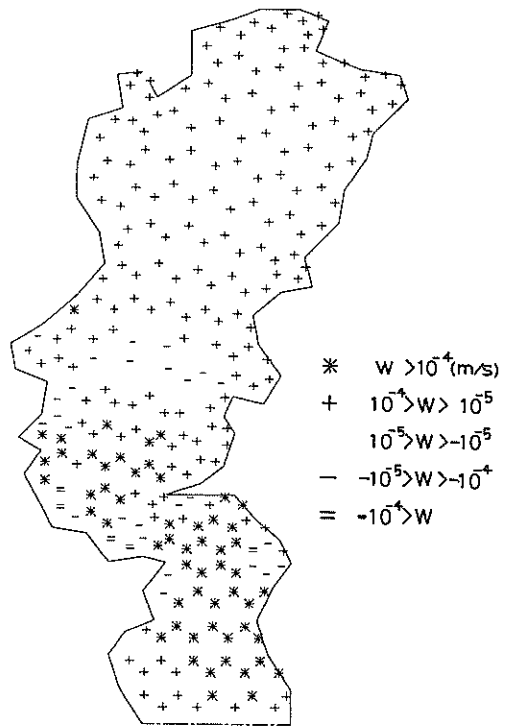


図-8(d) 鉛直流速分布図(二層モデル, CAFE-21, 上潮最強時, 41時間目)



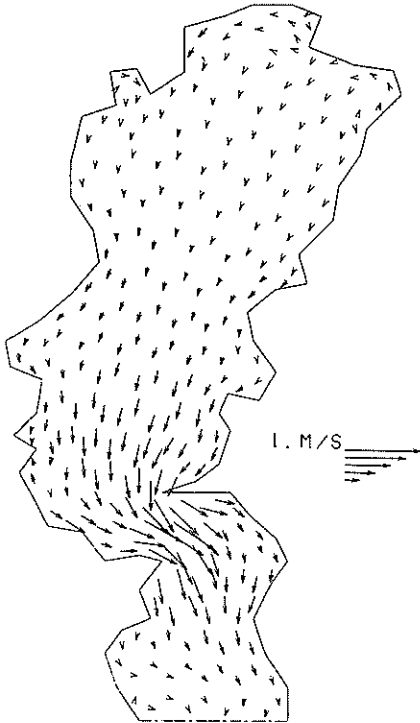


図-9(a) 潮流図(二層モデル, CAFE-21, 上層, 下潮最強時, 47時間目)

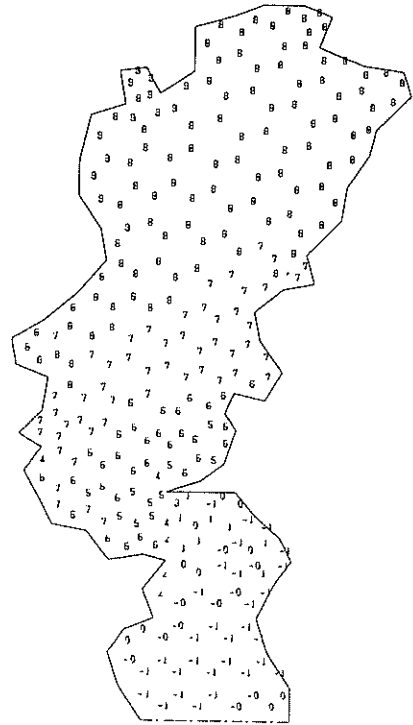


図-9(c) 水位分布図(二層モデル, CAFE-21, 下潮最強時, 47時間目, 単位 cm)

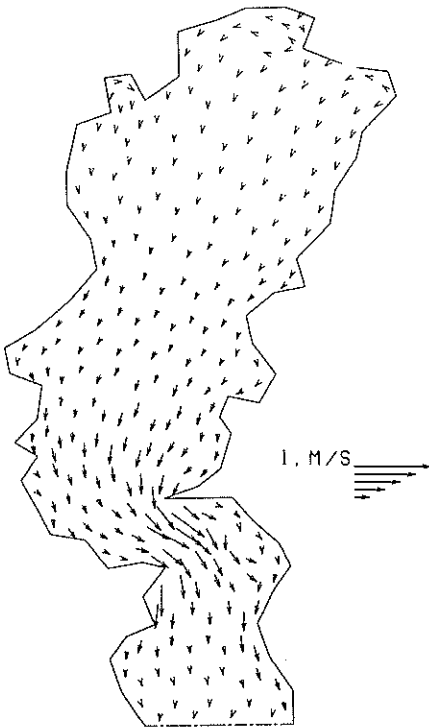


図-9(b) 潮流図(二層モデル, CAFE-21, 下層, 下潮最強時, 47時間目)

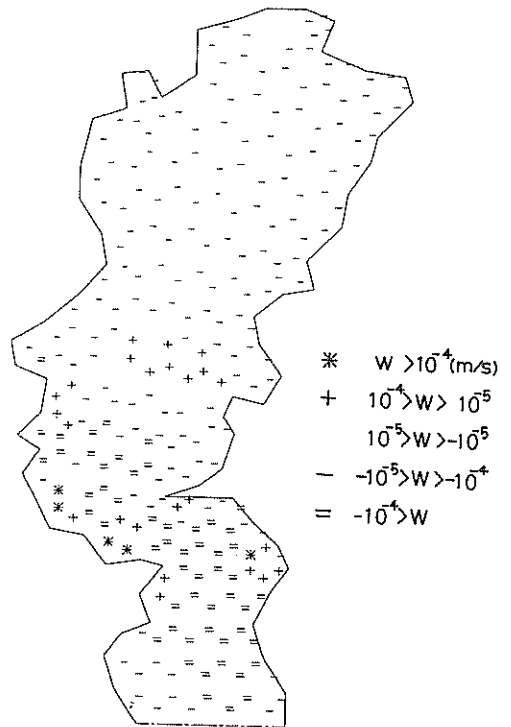


図-9(d) 鉛直流速分布図(二層モデル, CAFE-21, 下潮最強時, 47時間目)

表-5 潮位振幅と位相の遅れ  
(M<sub>2</sub> 潮の調和定数と計算結果との比較)

	現地データ		計算結果(半日周潮)							
	M <sub>2</sub> 潮		単層モデル				2レベルモデル			
	振幅	遅角	振幅	遅角	計/現	計-現	振幅	遅角	計/現	計-現
城ヶ島	(cm)	(°)	(cm)	(°)		(°)	(cm)	(°)		(°)
岩井袋	38.0	146.0	38.0	146.0	1.00	0.0	38.0	146.0	1.00	0.0
久里浜	35.0	152.0	35.0	152.0	1.00	0.0	35.0	152.0	1.00	0.0
富津	35.8	148.0	39.3	158.3	1.10	10.3	37.3	159.1	1.04	11.1
横浜	45.0	159.0	44.0	156.5	0.98	-2.5	44.7	154.4	0.99	-4.6
東京	46.7	155.2	46.9	163.3	1.00	8.1	47.6	163.1	1.02	7.9
千葉	50.1	162.4	48.8	161.8	0.97	-0.6	48.8	161.8	0.97	-0.6
	51.0	155.0	49.9	161.8	0.98	6.8	50.3	159.5	0.99	4.5

様な図面を示す。

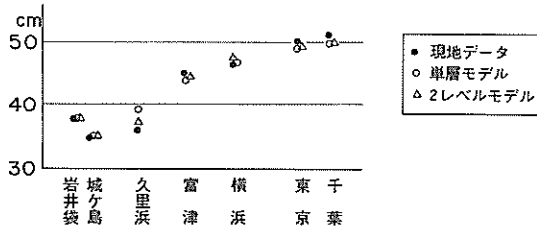
これらの計算結果の比較を行う前に、まず、これらの計算結果と現地での潮流観測結果との比較を行う。計算条件としては、湾口においてM<sub>2</sub> 潮の潮位振幅を与えていることから、水位と流速の計算結果と現地でのM<sub>2</sub> 潮の潮位と潮流の調和定数との比較を行った。

表-5に示すのは、現地でのM<sub>2</sub> 潮の潮位の調和定数と計算結果の水位変化の半日周潮成分との比較である。振幅については、久里浜の結果を除いて、単層モデルおよび2レベルモデルの結果とも、現地の現象をよく再現

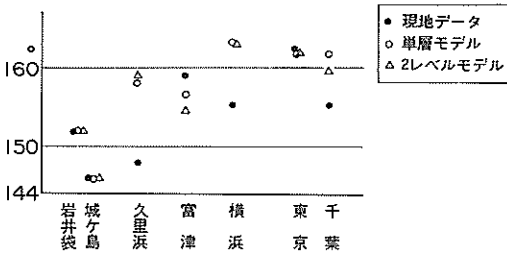
しているものと思われる。しかし、遅角については、現地の調和定数と計算結果とに若干の相違がみられる。これは、計算条件に用いた開境界での潮汐の調和定数の値がかなり古い資料によったこと、およびその他の地点での調和定数の資料の統一がとれていないことなどが原因と考えられるが、その理由は明らかではない。なお、図-10は、湾内に進入した場合の潮汐の増幅と波の進行の遅れの様子を示したものである。

表-6 潮流の調和定数<sup>13),14)</sup>(現地)

番号	観測層	北方成分		東方成分		節点番号
		振幅 (cm/s)	遅角 (°)	振幅 (cm/s)	遅角 (°)	
1	3 m	35.1	80.4	17.9	268.3	31
	15 m	34.5	77.6	10.3	249.1	
	45 m	21.9	44.8	4.6	216.1	
2	3 m	22.5	67.1	7.1	200.5	46
	15 m	20.1	81.4	8.8	252.4	
	45 m	15.7	56.1	10.9	258.5	
3	3 m	10.7	28.3	26.6	58.3	66
	11 m	11.0	41.2	20.8	50.1	
4	3 m	15.1	67.6	8.3	87.3	70
	18 m	12.4	58.2	6.3	51.6	
5	3 m	9.3	69.6	9.0	70.4	105
	25 m	6.8	54.7	8.0	49.1	
6	3 m	7.8	70.4	4.2	72.0	118
	10 m	8.7	72.2	3.9	74.2	
	15 m	8.6	70.1	4.1	77.4	
7	3 m	5.3	52.0	7.1	52.6	128
	12 m	5.3	69.5	5.4	88.3	
8	3 m	3.9	60.7	7.6	80.3	130
	12 m	2.0	86.1	3.9	78.4	



(a) 潮位振幅



(b) 位相(遅角)

図-10 潮位振幅の増幅と位相の遅れ

次に、流れの再現性についての検討を行う。表-6に示すのは、東京湾での潮流観測より得られた  $M_2$  潮の潮流の調和定数<sup>13), 14)</sup>である。これらの測定点の位置については図-5の節点番号を参照のこと。この結果と計算結果での潮流の半日周潮成分の潮流楕円を図-11(a)~(d)に示す。ここで、各測点での潮流の代表的なものとして、現地結果は中層あるいは低層の値を、また2レベルモデルは下層の結果を用いて比較を行っている。場所によっては幾分異なる結果を示している所もあるが、全体的には、単層モデルも2レベルモデルも現地の流況をよく再現しているものと考えられる。

次に、同一条件での単層モデル(CAFE-11)と2層モデル(CAFE-21)の比較を行う。同一条件と言って

も、2層モデルに関しては内部境界面の抵抗係数、上層厚さ、および上層への河川流出などの条件が加わっている。

水位変動に関しては、図-10からもわかるように両者のモデルにおいては、ほとんど差異はみられない。これは、連続条件式について考慮すると、水位の変化がその領域の水の容量の流入出量の差を示していることから、平均的な水の動きには両者の結果はほとんど変わらないものと考えられる。

しかし、流速については若干の相違がみられる。前述の図-6(a)、図-8(a)、(c)に、それぞれの上潮最強時の流速のベクトル図、また、図-7(a)、図-9(b)、(c)には、下潮最強時の流速のベクトル図を示した。これらの

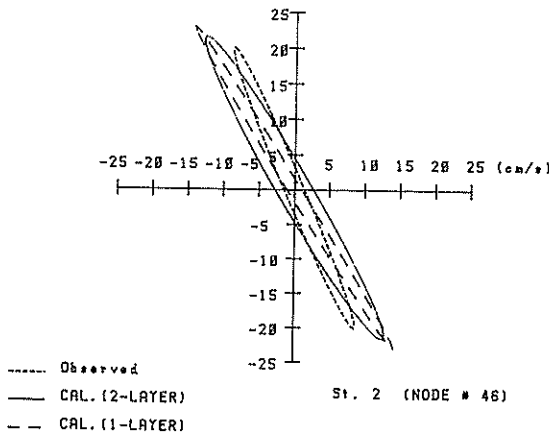


図-11(a) 現地データと計算結果の潮流楕円の比較 (節点番号46)

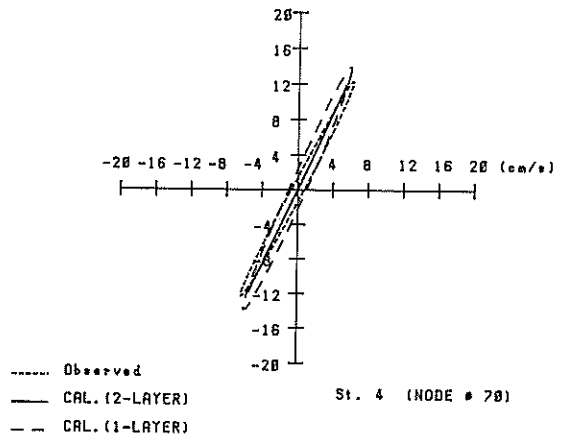


図-11(c) 現地データと計算結果の潮流楕円の比較 (節点番号70)

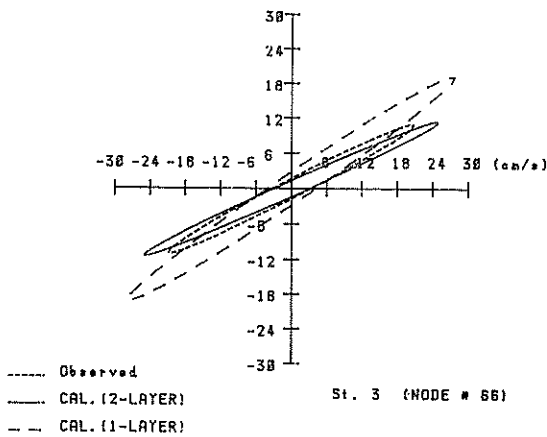


図-11(b) 現地データと計算結果の潮流楕円の比較 (節点番号66)

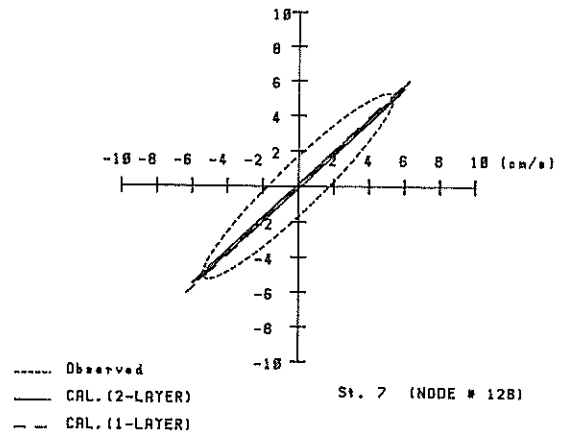


図-11(d) 現地データと計算結果の潮流楕円の比較 (節点番号128)

図から、流れの方向はほとんど同じであり、したがって、全体的な流況には両者の差はないことがわかる。しかし、これらの図を詳しくみると、2レベルモデルの上層での流速値が、下層での結果あるいは単層モデルでの結果に比べて大きいことが読みとれる。

比較のために流速の早い浦賀水道（節点番号31）と、少し湾内へ入った横浜沖（節点番号70）での流速の絶対値の経時変化を図-12に示す。ここで、流出（下潮）を負に、流入（上潮）を正にとっている。この図から、2レベルモデルの上層の結果が早く、下層の結果は小さい値を示していることがわかる。そして、実線で示される単層モデルの値が、破線と一点鎖線で示される2レベルモデルの上下層の平均的な値を示していることがわかる。また、2レベルモデルの上層の流速値が下層のそれに比べて位相が30分～1時間程度遅れていることが読みとれる。このような現象は、摩擦抵抗が海底面において作用するので、慣性力が上層においておそくまで働くことから一般的にみられる傾向であり、表-6の現地での潮流の調和定数からも同じような傾向がうかがえる。しかし、表-6の現地での調和定数は上層と中層ではあまり差がなく、底層において若干小さくなる傾向を示す

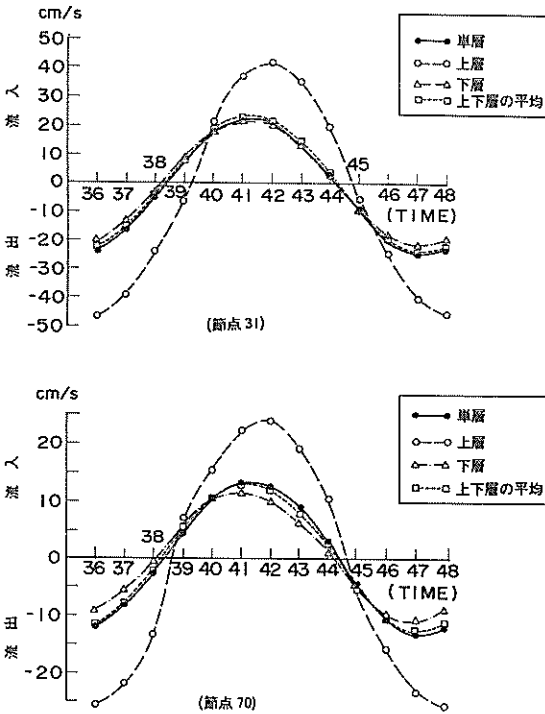


図-12 単層モデルと二層モデルの潮流の比較  
(上：測点31，下：測点70)

のに対し、2レベルモデルの結果は上層と下層との流速差が大きすぎるものと思われる。この原因は、上層厚さを5mと仮定したこと、および内部抵抗係数  $f_i = 0.0015$  が小さすぎたことなどが考えられるが、水塊の上下構造に関しては複雑な要因が多く、その詳細は明らかではない。

次に、鉛直流速の結果について述べる。図-8(c)、および図-9(c)の鉛直流速の分布は、流速値が非常に小さいので記号で示してある。総体的に、上潮時には上昇流、下潮時には下降流を示しているところが多い。特に浦賀水道周辺での上昇流の値が大きい。しかし、鉛直流速の値は非常に小さく、大きいところでも0.5 mm/s程度である。また、観音崎から横須賀市の沿岸にかけての海域では、上潮時には反流域となること、また下潮時には流れがぶつかる位置にあるところから、全体の動きとは逆方向の鉛直流速となっている。しかし、このような鉛直流速については、現地での測定が困難なことから現地でのデータがなく、明確なことはよくわからない。

このような上層と下層の流速差に対して、内部境界面での抵抗係数の大きさがどのように影響するののかについての検討を行った。CAPE-22においては  $f_i = 0.0015$

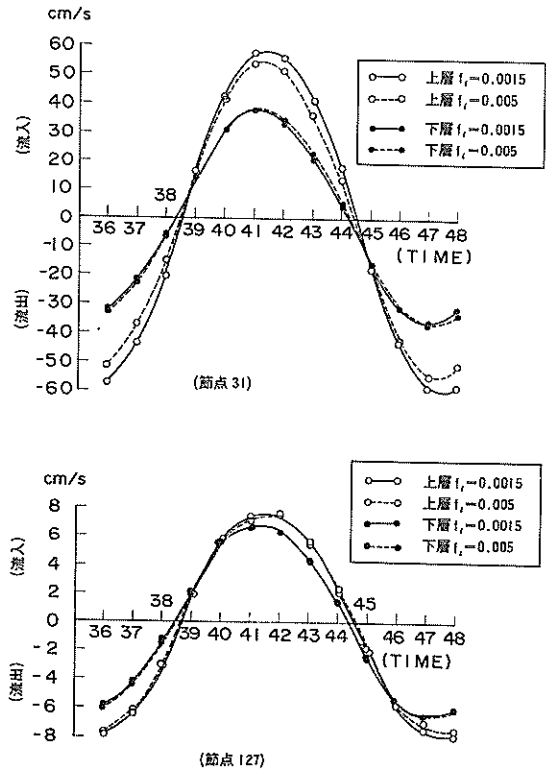


図-13 内部摩擦係数の大きさによる潮流の比較  
(上：測点31，下：測点127)



分法による検討<sup>2)</sup>からも、東京湾での潮汐残差流の大きさは、あまり大きくないようである。

次に、密度流の効果を考察する。密度流に対しては、ここでは、浮力の拡散、あるいは密度の拡散などを考慮した厳密な検討は行っていないが、上下層の密度差 ( $\rho_{(1)} = 1.015$ ,  $\rho_{(2)} = 1.025$ ) による流れと、上層への淡水流入による検討を行っている。

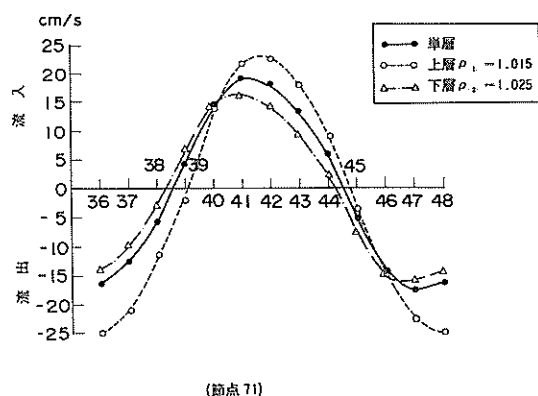


図-16 密度差による上下層の潮流の比較

図-16に示すのは、CAFE-12とCAFE-22(すなわち、河川流入無し、風無し)の横浜沖の節点71での流速の経時変化である。2レベルモデルの上層の流速が上潮時、下潮時とも早いのは、これまでみてきたものと同じであるが、平均的にみると、わずかではあるが上層で平均的に0.8 cm/sの流出、下層で0.4 cm/sの流入というパターンがみられる。一方、単層モデルの結果では、0.6 cm/sの流入を示している。したがって、河川での塩水くさびの現象と同様に、湾内においても表層の軽い流体が流出して、底層の重い流体が流入する傾向がみられている。

次に河川流入の流れに及ぼす影響について考察する。河川からの流入量は表-3に示す年平均流量である。流量の与え方としては、単層モデルでは層全体に、2レベルモデルでは上層に、式(72)の連続条件式の $q_1$ の形で連続的に与えた。

図-17に、単層モデルのCAFE-11の平均流を示す。図-15の結果と比較すると、湾奥部の江戸川河口周辺でかなりの変化が認められるが、その他の海域ではほとんど変化がみられない。また、2レベルモデルのCAFE-21の平均流の結果を図-18(a), (b)に示す。江戸川河口付近では上下層とも河川流出のパターンがみられる。また、河川からの淡水流入の影響を受けて、上層での平

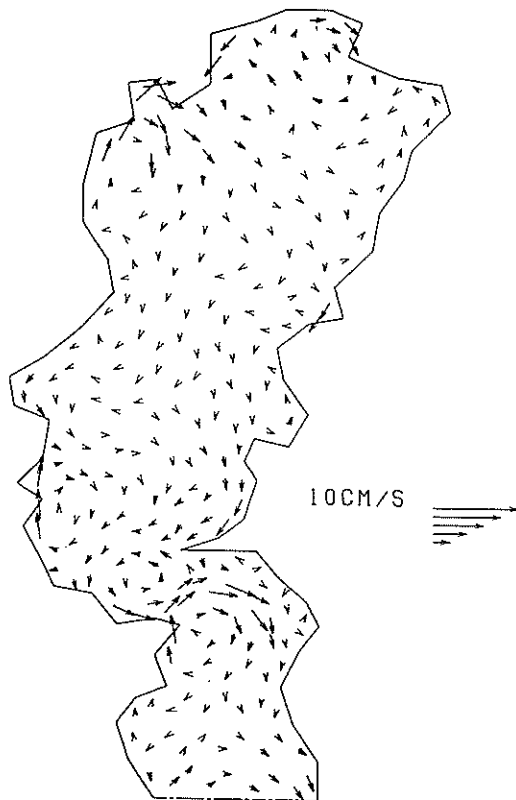


図-17 恒流図(単層モデル, CAFE-11)

均流は全般的に流出傾向であることがわかる。

これらの変化をもう少し詳しくみるために、図-19(a), (b)に単層モデルのCAFE-11とCAFE-12の結果の比較を示す。節点141でCAFE-11の方が4 cm/s程度南に偏った流れを示しており、河川流入量の影響の大きいことを示している。しかし、節点71ではその影響は小さく、したがって、河口から離れた節点においては河川の影響はそう大きいものではないことがわかる。

これに対して、2レベルのCAFE-21(河川流入有)とCAFE-22(河川流入無し)の結果を比較を図-20(a)~(c)に示す。河口付近の節点141では、上下層ともかなり大きな変化がみられるが、その影響は上層において大きい。また、湾奥部の節点127においても上層に若干の相違がみられる。このことは、2レベルモデルにおいて河川水の投入を上層のみに限定しているための影響であろうと思われる。このような現象は、実際の海域において密度の軽い淡水が流出する場合、表層をほうようにして流出する現象を再現しているものと考えられる。しかし、このような影響は、河口から遠く離れた節点71では、ほとんどみられない。河川水の海域への流出に関

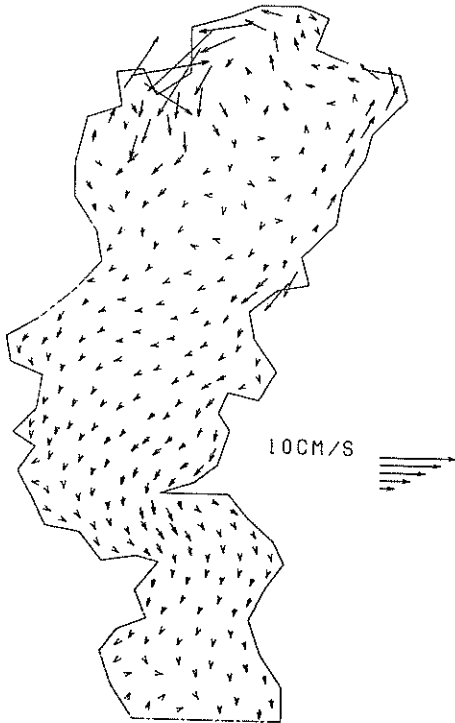


図-18(a) 恒流図(二層モデル, CAFE-21, 上層)

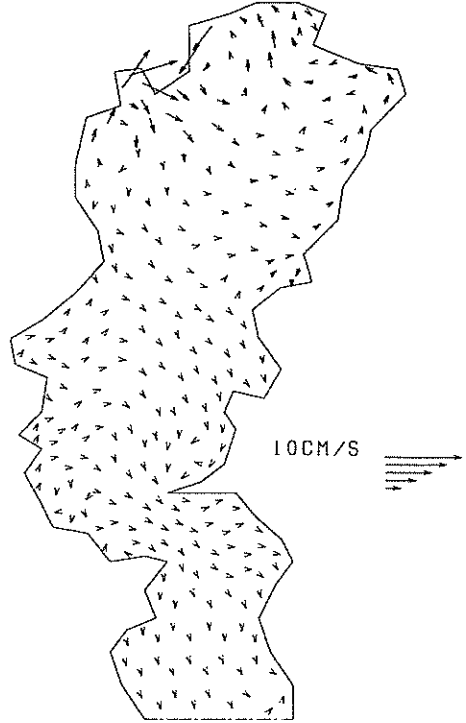
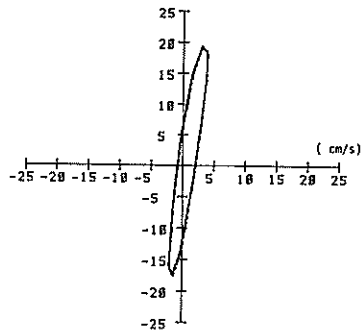
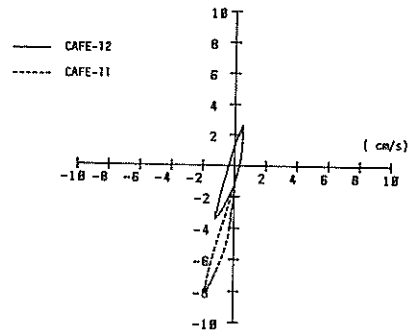


図-18(b) 恒流図(二層モデル, CAFE-21, 下層)

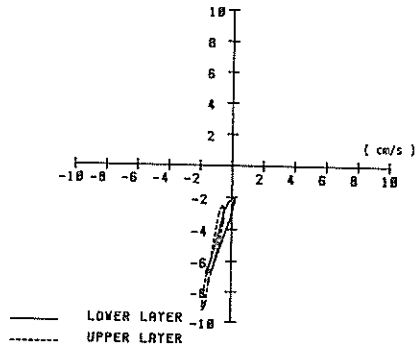


CASE NO.1 - PT.71

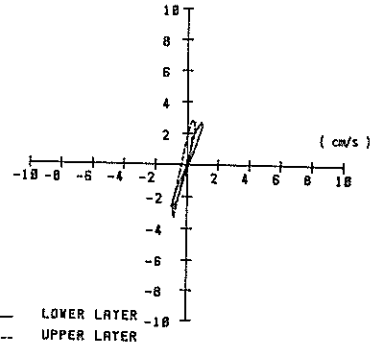


CASE No.1 Pt.141

図-19 潮流のホドグラフ(CAFE-11, CAFE-12の比較,  
左:節点番号71, 右:節点番号141)

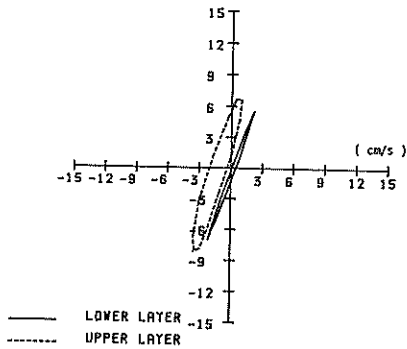


CASE No. 6 Pt. 141

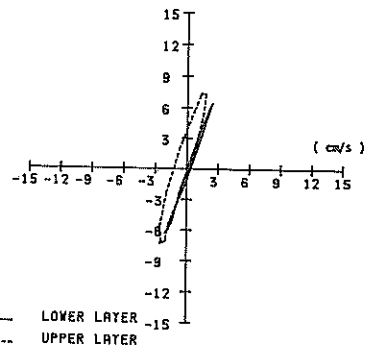


CASE No. 5 Pt. 141

図-20(a) 潮流のホドグラフ ( 節点番号 141,  
左: CAFE-21, 右: CAFE-22 )

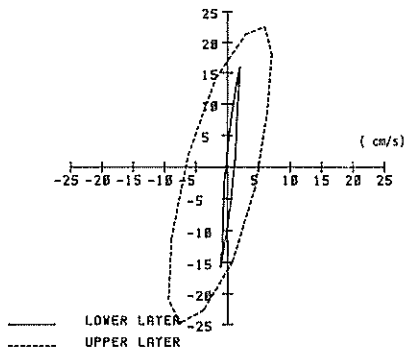


CASE NO. 6 - PT. 127

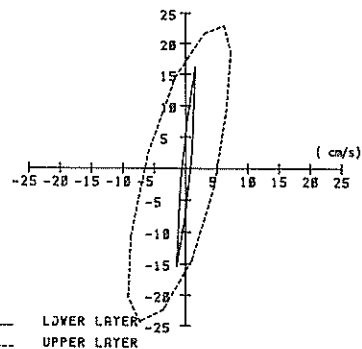


CASE No. 5 Pt. 127

図-20(b) 潮流のホドグラフ ( 節点番号 127,  
左: CAFE-21, 右: CAFE-22 )



CASE NO. 6 - PT. 71



CASE No. 5 Pt. 71

図-20(c) 潮流のホドグラフ ( 節点番号 71,  
左: CAFE-12, 右: CAFE-22 )



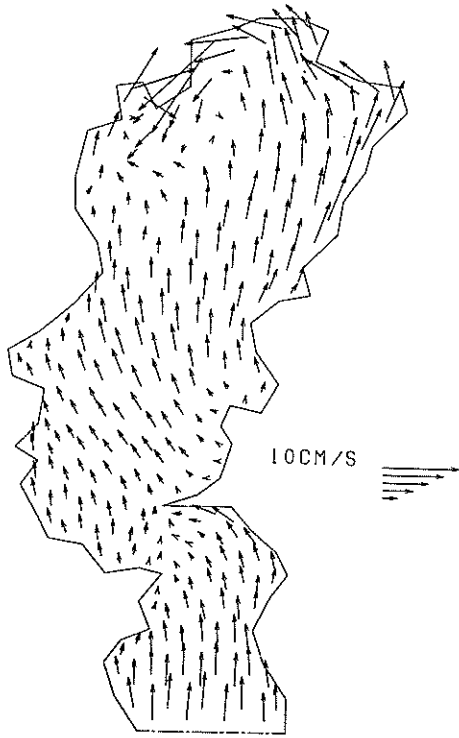


図-21(a) 恒流図(二層モデル, CAFE-23, 上層)

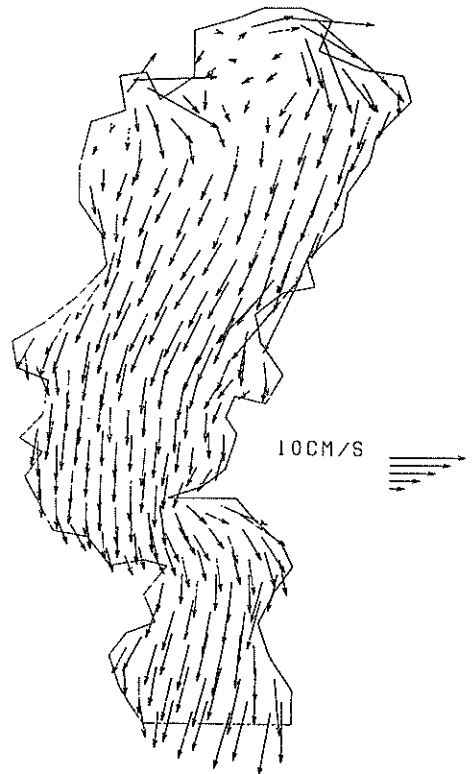


図-22(a) 恒流図(二層モデル, CAFE-24, 上層)

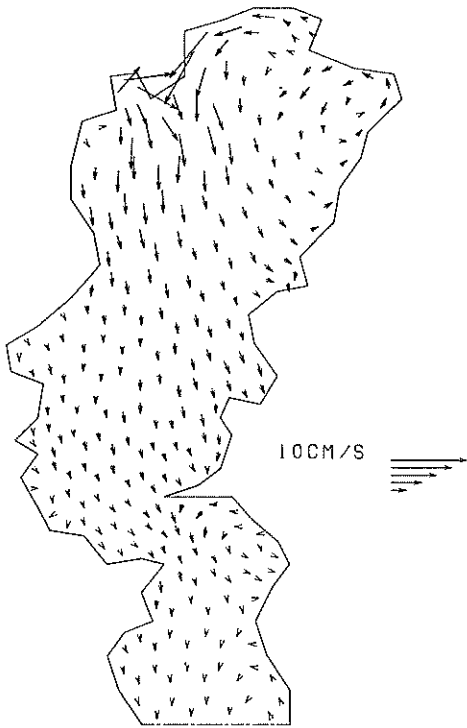


図-21(b) 恒流図(二層モデル, CAFE-23, 下層)

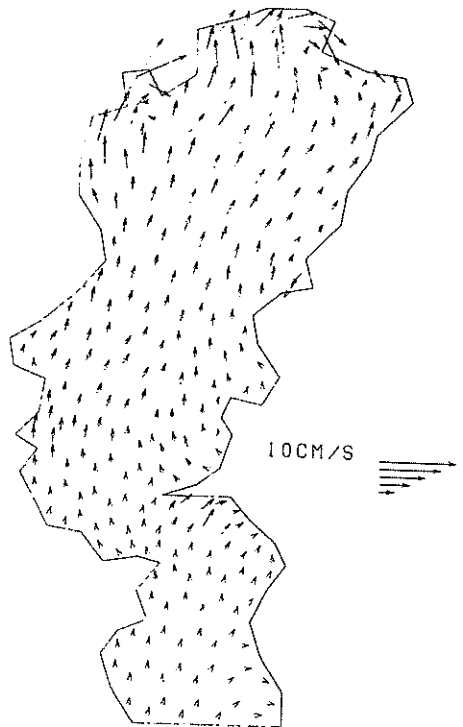


図-22(b) 恒流図(二層モデル, CAFE-24, 下層)

する研究は、石狩川河口で数多くなされている<sup>15)</sup>。数値計算において、このような詳細な検討を行うためには、密度の拡散、浮力の拡散および二層流の層厚などを考慮に入れた流れのモデルを構築する必要があるであろう。

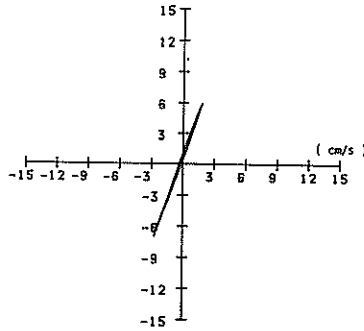
次に海上風の流れに及ぼす影響について考察する。東京湾の恒流の生成要因は、風によるものが最も大きいとされている<sup>16)</sup>。ここでは、比較のために、北西の風10knotの場合(CAFE-13とCAFE-23)と、南東の風10knotの場合(CAFE-14とCAFE-24)について検討を行う。

2レベルモデルの上層と下層の平均流の結果を、CAFE-23については図-21(a), (b)に、CAFE-24については図-22(a), (b)に示す。これらの図から、上層では風の方向に流れ、下層ではそれを補う流れとして逆向きの流れとなっていることがわかる。

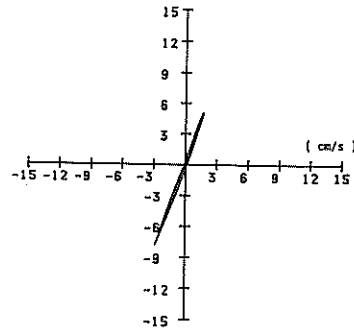
風の影響についても、特定の節点での潮流のホドグラフにより考察する。図-23に示すのは単層モデルでの

CAFE-13とCAFE-14の結果であり、図-24に示すのは2レベルモデルでのCAFE-23とCAFE-24の結果である。単層モデルの場合は、平均流として5mm/s程度の変化がみられるにすぎず風の影響はあまり大きくないものと考えられる。これに対し、2レベルモデルの場合は、上層の水塊が風の吹いている方向に流され、10knotの風に対して5~6cm/s程度、潮流のホドグラフが偏ることがわかる。そして、下層の水塊は上層とは逆に流れ、表層での吹送流の補償流の役割を果たしているものと考えられる。

これらのハイドログラフの平均値をとったものが図-25である。この図より、上層の5m層の水塊は湾全体において、10knotの風に対して3cm/s程度の影響を受けていることがわかる。これに対し、下層の水塊は上層のそれとは逆向きの作用を受けているが、その大きさは下層の厚さに逆比例している。また、単層モデルの場

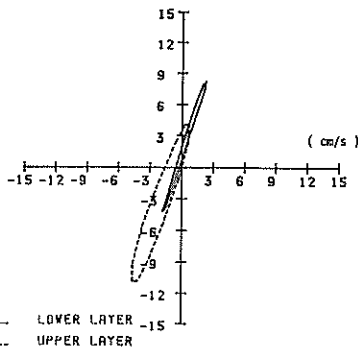


CASE NO. 3 - PT. 127

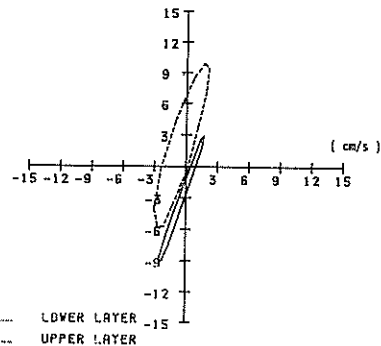


CASE NO. 4 - PT. 127

図-23 潮流のホドグラフ(節点番号127, 左: CAFE-13, 右: CAFE-14)



CASE NO. 7 - PT. 127



CASE NO. 8 - PT. 127

図-24 潮流のホドグラフ(節点番号127, 左: CAFE-23, 右: CAFE-24)

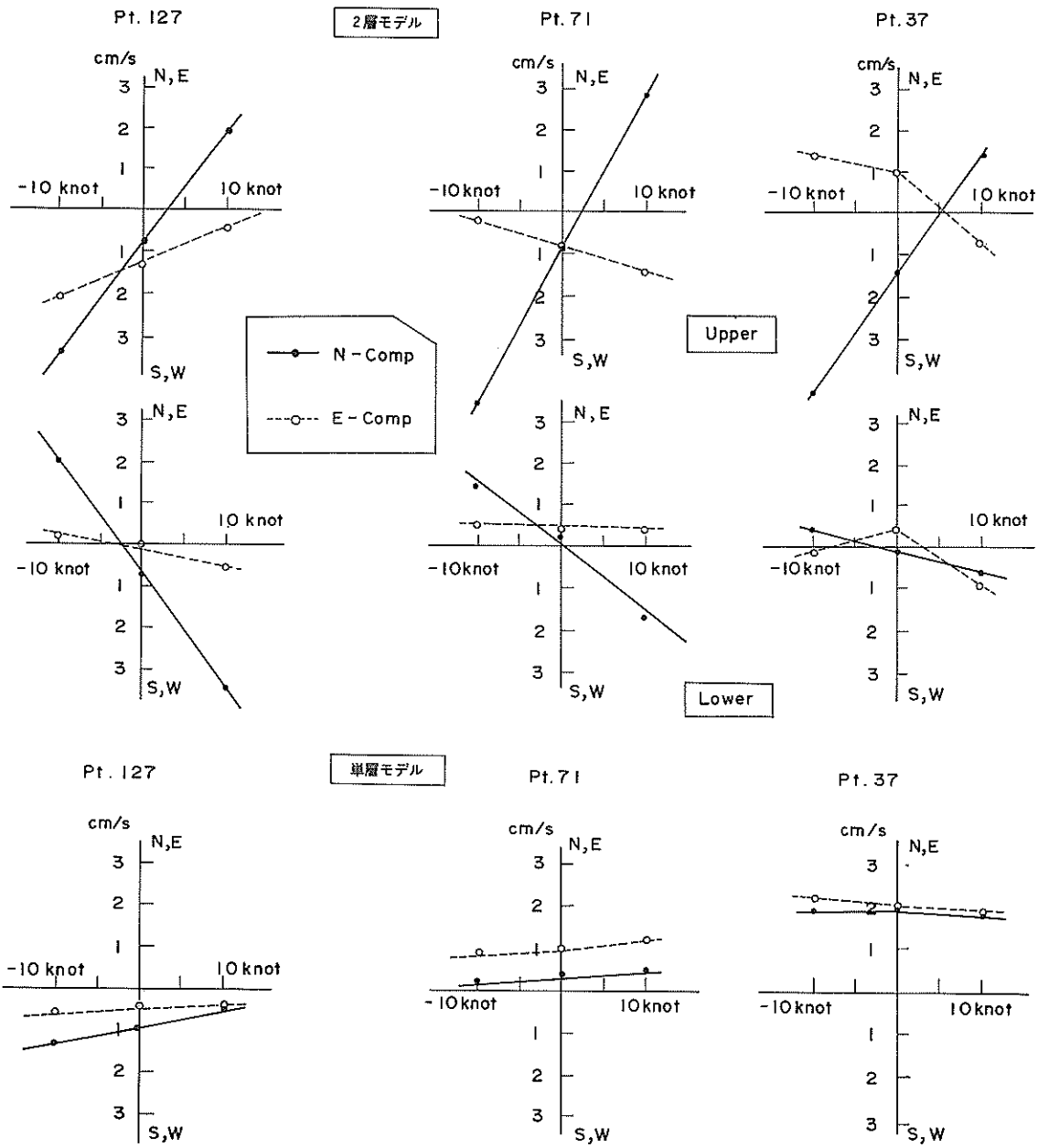


図-25 恒流の風による変化

合は風の影響は非常に小さく、10 knotの風に対して、比較的水深の浅い接点127においても、わずか0.5 cm/s程度の差があるにすぎない。また、その変化の程度も場所によって異なるようである。

風の接線応力による流れへの影響は、表面に働く応力が一定であることを考えると、層厚に逆比例する。した

がって、上層厚さによって、吹送流の大きさも異なる。筆者らが大阪湾泉南沖において解析した重回帰分析結果<sup>17)</sup>によると、泉南沖での潮流の主流方向である北方成分に対して、海面下3mでの恒流成分を

$$v = a_0 + a_1 W_x (t - \tau'_x) + a_2 W_y (t - \tau'_y) \dots (104)$$

表-7 恒流の生成要因の検討

	単層モデル	2レベルモデル	
		上層	下層
潮汐残差流	地形の背後に1~2 cm/s程度の弱い循環流が形成される。その他は非常に小さい。	ここでは検討せず。 (単層モデルと同一であると仮定)	同左
密度流	検討せず	わずかに流出	わずかに流入
河川流	河口付近で河川流出の影響がみられる。	河口付近で河川流出の影響がみられる。その他の海域では上層をわずかに流出*	河口付近で河川流出の影響がみられる。
吹送流	影響は非常に小さく、その度合いも場所的に異なる。	風の方向に流される。10 knotの風に対して、約3 cm/s影響される。	上層の水塊とは逆方向に流れる。その大きさは下層厚さ逆比例している。

\*) 河川流と密度流の両方の影響と思われる。

と表した場合に、 $a_0 = -4.09 \sim -7.15$ ,  $a_1 = -0.31 \sim 0.49$ ,  $a_2 = 0.30 \sim 1.52$  の範囲の値が得られている。本計算結果を、式(104)と同様な形で表わすと、10 knotの風に対して約3 cm/sの影響があるということは、 $a_2 \approx 0.6$ に相当する。この値は、現地での結果とそう大きく矛盾しない。しかし、下層での恒流成分が風の方向と逆方向となる傾向については、現地ではあまり見られない。このような現象は、風向きおよび地形の形状にも大きく左されるものと思われるが、現時点では明らかではない。以上の結果を総合すると表-7のようになる。しかし、これらの結果をあわせ考えても、まだ、現地観測から得られる恒流のパターンを説明するには不十分のようである。これには、数値計算における種々の条件、例えば、水平混合係数、海底および内部摩擦係数、風の抗力係数、風向・風速、密度分布などの詳細な検討が必要であると思われる。

#### 4.2 拡散計算結果の検討

##### (a) 一様流中での拡散計算

有限要素法による拡散方程式の解法の検証として、単純水路での一様流中での拡散計算を実施した。図-26に単純水路での三角形の有限要素分割図を示す。また表-8に、今回実施した一様流中での拡散計算の計算条件を示す。表中の $P_e$ はPeclet Numberと呼ばれるもので、拡散現象における移流項と拡散項の比を表すもので

$$P_e = \frac{U \cdot \Delta s}{E_x} \dots\dots\dots (105)$$

で定義される。ここに、 $U$ は平均流速、 $\Delta s$ は要素間の距離、 $E_x$ は拡散係数である。

図-27に示すのは、二次元単層の場合の中心軸上の濃度分布である。実線が次式で示される解析解で、破線が計算結果である。

$$c = \frac{M}{H\sqrt{4\pi E_x t}} \exp\left[-\left\{\frac{(x-Ut)^2}{4E_x t}\right\}\right] \dots\dots\dots (106)$$

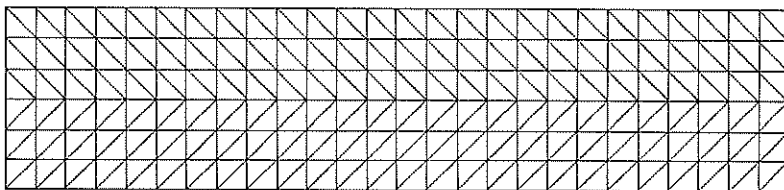


図-26 一様水路の有限要素分割図

表-8 一様流中での拡散計算のケース

ケース番号	層数	(m/s) 流速	(m <sup>2</sup> /s) 拡散係数	(m) 要素距離	$P_e$ . No.	(m/s) $\alpha$	負荷
CASE-1	単層	0.2	100	1,500	3	*	全層
CASE-2	単層	0.2	200	1,500	1.5	*	全層
CASE-3	単層	0.2	10	1,500	30	*	全層
CASE-4	二層	0.1	100	1,500	0.75	$1.0 \times 10^{-5}$	上・下層
CASE-5	二層	0.1	100	1,500	0.75	$1.0 \times 10^{-5}$	上層
CASE-6	二層	0.1	100	1,500	0.75	$1.0 \times 10^{-4}$	上層

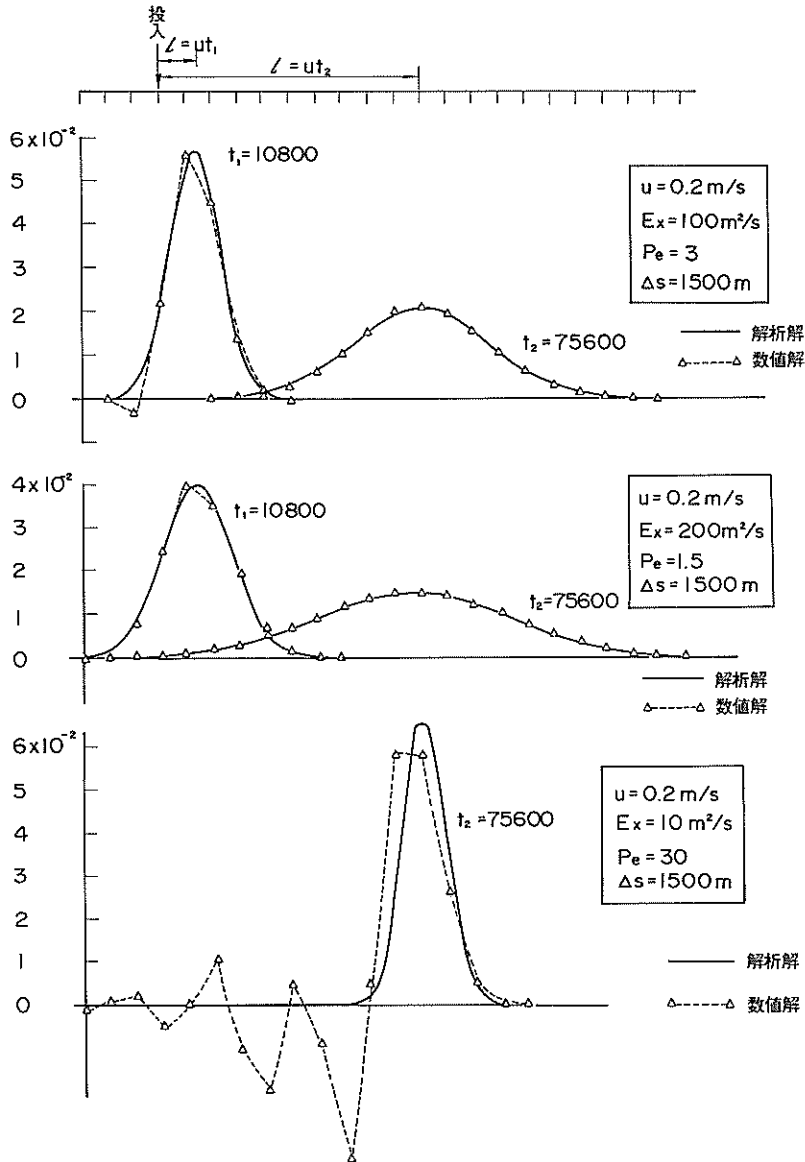


図-27 一様流中の拡散の数値解と解析解の比較(単層モデル)

図-27より、 $t = 75,600$  秒に対しては、Case-3の結果が振動しているが、他の2ケースについては理論解と一致していることがわかる。また、 $t = 10,800$  秒に対しても、Case-1, 2とも大体理論解と一致している。しかし、Case-1の負荷点の上流側で若干のひずみが生じている。特に、 $t = 10,800$  sの場合の濃度の立ち上がりのところでマイナスの濃度が生じている。以上のことから、本モデルは、Peclet数がある程度小さい場合には差分法においてよく生じる数値拡散<sup>18)</sup>をすることもなく、ほぼ理論解を満足することがわかる。

一般に、このPeclet数が2以上の時に拡散方程式は

不安定であることが知られている<sup>19)</sup>。この不安定さを避けるために、差分法における上流差分と同様な手法のupwindの有限要素法のスキームが考案されているが、本資料においては、peclet数があまり大きくならないような有限要素、拡散係数を用いることとし、upwindのスキームについては検討していない。

二層の拡散計算についても一様流での計算を行っている。Case-4は上下層の層厚が15mと等しく、負荷量も同じ場所同じ量だけ与えていること、および物質の沈降速度を考慮していないことから、実質的には一層の計算を上下層で行っていることに相当する。図-28(a)に

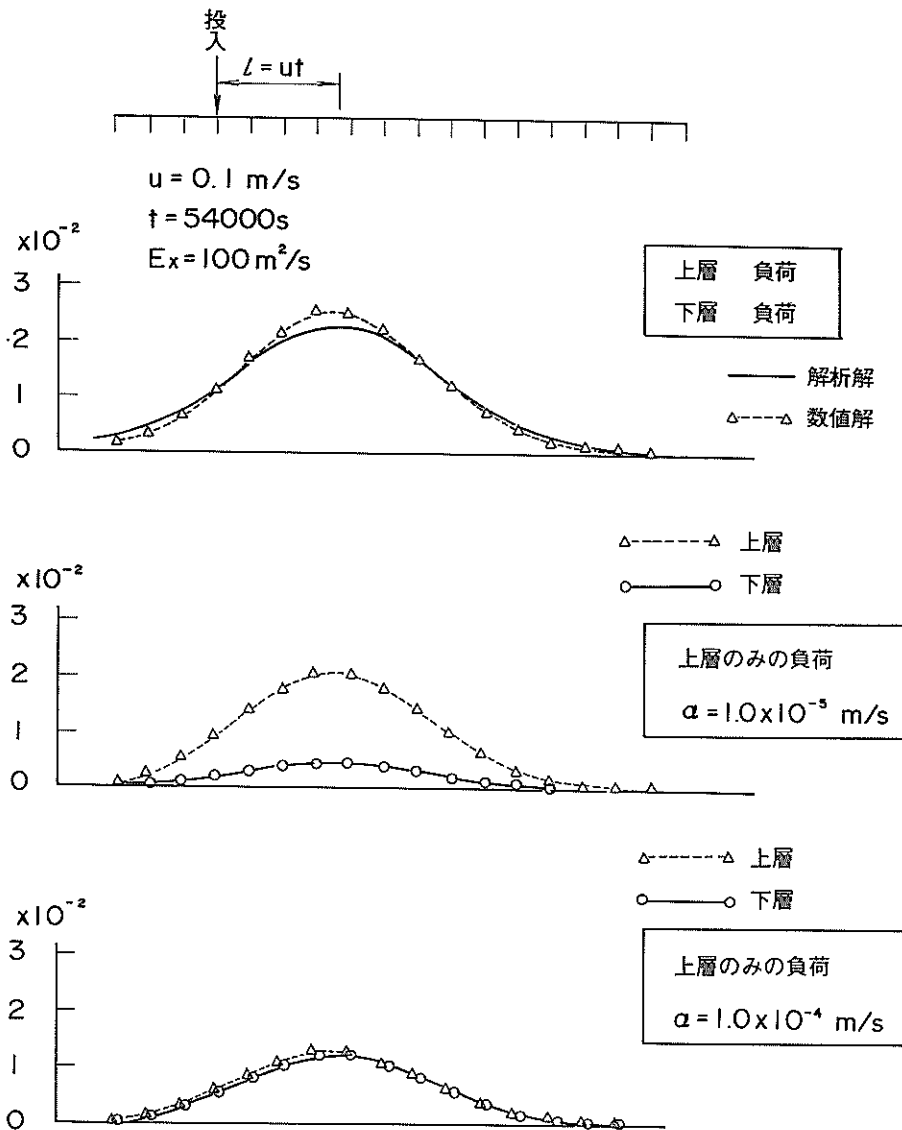


図-28 一様流中の拡散の数値解と解析解の比較(二層モデル)

Case-4 の  $t = 54,000$  s の時の中心軸上の濃度分布を示す。この場合の  $P_e$  数は 0.75 である。このケースについても、実線で示された理論解をほぼ満足しているが、最大濃度付近で計算結果の方が高い値を示している。この原因は、上流端での境界濃度を 0 ppm と固定して、それより上流側へは拡がらないようにしているために、計算領域内に物質がとどまっているためと考えられる。次に、図-28 (b) に Case-5 の濃度分布を示す。このケースは、上層にのみ負荷を与えているので、上層から下層への鉛直混合が上下間の混合係数として  $\alpha = 1.0 \times 10^{-5}$  m/s の値を与えている。これは、鉛直拡散係数に換算すると  $1.5 \text{ cm}^2/\text{s}$  に相当する値を入れている。次に、上下間の混合係数の値を 10 倍の  $\alpha = 1.0 \times 10^{-4}$  m/s にした場合の濃度分布を図-28 (c) に示す。下層での濃度がケースに比べて大幅に増加して、上層の値とほとんど変わらない濃度となっている。このように、上下層の濃度分布は、鉛直混合、すなわち鉛直拡散係数に非常に敏感であることがわかる。

ここでの検討は、一様流中であるので、鉛直流は発生しておらず、鉛直混合についてもあまり詳細なことはわからないが、実際の計算を行う際には、これらのことを考慮に入れて、二層位の拡散計算をする必要があるものと考えられる。

(b) 東京湾での拡散計算

以上の検討を踏まえて、東京湾を例題として拡散計算を実施した。表-9 に、拡散計算の計算条件を示す。これらの計算条件に関して若干の考察を行う。節点数、要素数などの地形形状に関するものは潮流計算に用いたものと同じものを使用する。また、流速、水位の流れ場に関するものは潮流計算の結果を使用した。

水平拡散係数は、流れの乱れ成分より生じる乱流拡散係数と、流れのシャワーより生じる移流分散係数が支配的であると考えられる。乱流拡散係数は、慣性小領域内では有名な 4/3 乗則が成立するといわれ、

$$\epsilon = K_1 L^{4/3} \quad \dots\dots\dots (107)$$

で表される。ここに、 $L$  は現象の規模を表す長さのスケールであり、 $K_1$  は 0.01 ~ 0.02 ( cgs 単位系 ) 範囲の比例定数である。また、移流分散係数は二次のテンソル量として表され、

$$E_{zz}^d = \lambda \frac{\bar{u}^2 H^2}{\epsilon_z} \quad \dots\dots\dots (108)$$

$$E_{yy}^d = \lambda \frac{\bar{v}^2 H^2}{\epsilon_z} \quad \dots\dots\dots (109)$$

表-9 拡散の計算条件

	単層モデル	二層モデル
節点数	潮流計算と同じ(172)	同左
要素数	潮流計算と同じ(272)	同左
タイムステップ	300 秒	同左
拡散係数	$E_{zz} = E_{yy} = 200 (\text{m}^2/\text{s})$ $E_{xy} = 100 (\text{m}^2/\text{s})$	同左
鉛直拡散係数	*	$\alpha = 1.0 \times 10^{-5}$ m/s $1.0 \times 10^{-4}$ m/s
上層厚さ	*	潮流計算と同じ(5 m)
開境界条件	0 ppm (COD) 3.4 % (塩分)	同左
初期濃度	0 ppm (COD) 3.4 % (塩分)	同左(上・下層とも)
河川流入量	表-3	同左(上層に投入)
負荷量	表-11	同左
流速	潮流計算結果を使用	同左
水位	潮流計算結果を使用	同左

$$E_{yy}^d = E_{zz}^d = \lambda \frac{\bar{u} \bar{v} H^2}{\epsilon_z} \quad \dots\dots\dots (110)$$

で表現される。ここで、 $\lambda$  は流速分布に関する比例定数、 $\epsilon_z$  は鉛直拡散係数、 $H$  は水深である。潮流の流速分布を近似的に対数則で表すものとして、 $\lambda$  の値は 1/600 となる。

鉛直拡散係数については、Reichardt の実験によると

$$\epsilon_z = 0.067 u_* H \quad \dots\dots\dots (111)$$

で与えられる。ここに、 $u_*$  は摩擦速度である。流速分布を対数則と仮定すると、近似的に  $u_* \approx 0.06 u$  で表される。したがって、 $u = 10 \text{ cm/s}$ 、 $H = 10 \text{ m}$  の場合の鉛直拡散係数、および移流分散係数は、

$$\epsilon_z = 0.067 u_* H = 0.067 \times 0.06 \times 10 \times 2,000 = 80 \text{ cm}^2/\text{s} \quad \dots\dots\dots (112)$$

$$E_{zz}^d = \lambda \frac{\bar{u}^2 H^2}{\epsilon_z} = \frac{1}{600} \frac{10^2 \cdot 2,000^2}{80} = 8 \times 10^3 \text{ cm}^2/\text{s} \quad \dots\dots\dots (113)$$

となる。なお、本計算においては簡単のために、また、拡散計算を安定に行うための  $P_e$  数を考慮して、乱流拡散係数と移流分散係数の和を全域一律に表-9 に示すように与えた。

上下層間の鉛直混合は、一般に次式で与えられる。

$$Q_{21} = (w_s - w_g) \frac{c_{(1)} + c_{(2)}}{2} + \alpha (c_{(2)} - c_{(1)}) \quad \dots\dots\dots (114)$$

ここに、 $w_s$  は沈降速度、 $w_g$  はエントレインメント速度、 $\alpha$  は境界面での混合係数である。2層流の場合、 $w_g$  は水平流速と Richardson 数との関数として

$$\frac{w_g}{u} = f(R_i) \quad \dots\dots\dots (115)$$

で表されるが、本モデルでは2レベルモデルの潮流計算において、内部境界では Entrainment 速度として考慮せず、鉛直流速  $w$  として考慮している。また、 $\alpha$  は、上下層の濃度差に起因する鉛直混合係数で、内部境界面付近での鉛直拡散係数に相当するものとして次式で定義される。

$$q_i = \alpha (c_{(1)} - c_{(2)}) = \frac{10^{-8}}{\rho} \frac{\partial c}{\partial z} \quad \dots\dots\dots (116)$$

したがって、

$$\alpha = \frac{10^{-8}}{\rho} \div \frac{10^{-8}}{0.001} \div 10^{-5} \text{ (m/s)} \quad \dots\dots\dots (117)$$

となる。本計算においては、代表的なものとして、 $10^{-5}$  と  $10^{-4}$  m/s についての計算を実施した。

拡散計算のタイムステップは、潮流計算での結果を流動場と用いるために、潮流計算のタイムステップの整数倍であることが要求される。また、Christodoulou<sup>9)</sup>によると、二層流での拡散計算のタイムステップの安定条件式として、

$$dt < \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2} \frac{u_i}{ds} + 8 \frac{E_{ij}}{(ds)^2} + \frac{k}{2} + \frac{\alpha'}{2}}} \quad \dots\dots\dots (118)$$

が与えられている。これを、東京湾の場合にあてはめると、 $ds \div 1500$  m、 $u = 0.5$  m/s、 $E_{ij} = 200$  m<sup>2</sup>/s、 $k = 0.0$ 、 $\alpha = 10^{-5}$ /s を式(118)に代入すれば、

$$dt < \frac{1}{4.1 \times 10^{-4} + 7.1 \times 10^{-4} + 0.1 \times 10^{-5}} \div 890 \text{ s} \quad \dots\dots\dots (119)$$

表-10 拡散の計算ケース

計算ケース	層数	物質	流動場	$E_{xx}, E_{yy}$ m <sup>2</sup> /s	$E_{xy}$ m <sup>2</sup> /s	$\alpha$ m/s
DISPER-11	単層	COD	CAFE-11	200	100	*
DISPER-12	単層	塩分	CAFE-11	200	100	*
DISPER-21	二層	COD	CAFE-21	200	100	$1.0 \times 10^{-5}$
DISPER-22	二層	塩分	CAFE-21	200	100	$1.0 \times 10^{-5}$
DISPER-23	二層	塩分	CAFE-21	200	100	0.0
DISPER-24	二層	塩分	CAFE-21	200	100	$1.0 \times 10^{-4}$

となる。本計算においては、潮流計算のタイムステップの10倍の300秒を採用した。

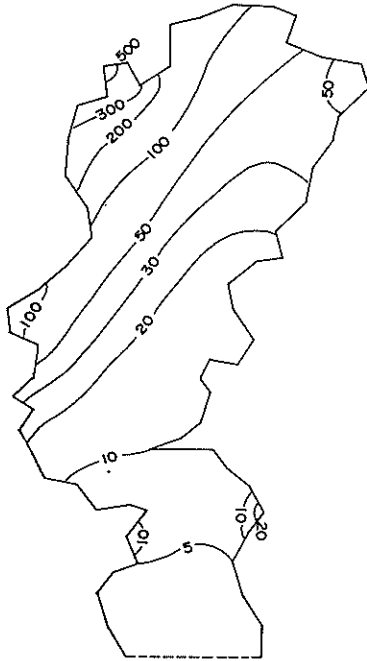
表-10に、今回実施した東京湾での拡散計算のケースについて示す。単層、二層とも、それぞれCODの計算と塩分の計算とを実施している。CODの計算とは、初期値0 ppmの中に、表-11に示したCODの負荷量を連続的に投入して、その拡散状況を見たものである。また、塩分計算とは、初期値34%の塩分の中に、表-3に示した流量の淡水流入を連続的に行った場合の塩分濃度の計算を実施したものである。

図-29に示すのは、単層モデルでのCODの拡散計算の10潮汐めと20潮汐めの等濃度曲線を示したものである。また図-30に示すのは、現地観測より得られ

表-11 CODの投入負荷量

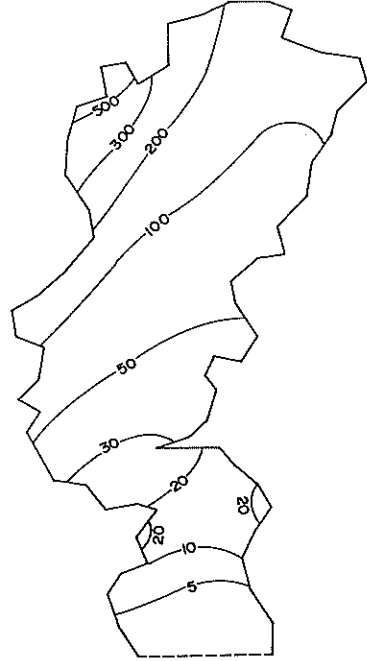
番号	節点	負荷量 g/s	番号	節点	負荷量 g/s
1	17	3.53	20	123	0.91
2	23	32.5	21	124	106.0
3	28	13.3	22	131	85.2
4	34	32.8	23	132	38.2
5	42	0.9	24	138	12.1
6	51	34.2	25	139	231.0
7	58	4.06	26	140	59.6
8	59	0.36	27	142	126.0
9	68	29.9	28	147	37.6
10	77	24.7	29	148	88.9
11	79	25.5	30	150	88.9
12	84	0.12	31	151	2.88
13	86	57.6	32	156	7.74
14	87	10.2	33	164	29.0
15	96	85.4	34	165	25.9
16	102	28.7	35	167	0.73
17	103	96.6	36	169	52.8
18	109	58.6	37	172	29.9
19	117	20.4	総負荷量		1,506





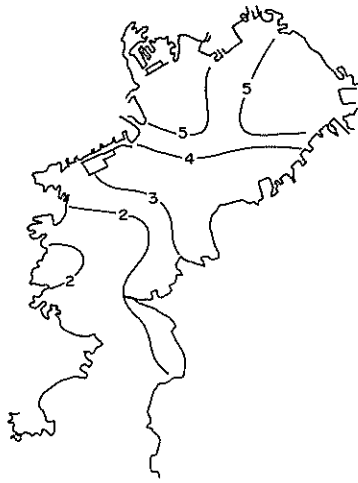
単層 COD 10 tide (ppb)

図-29(a) 濃度分布図(単層モデル, COD, 10 潮汐目, ppb)



単層 COD 20 tide (ppb)

図-29(b) 濃度分布図(単層モデル, COD, 20 潮汐目, ppb)



上層



下層

図-30 CODの濃度分布図(現地データ, ppm, 左:上層, 右:下層)

た東京湾の上層と下層のCODの濃度分布である。計算結果は、初期値0 ppmのところへわずか20 潮汐間の投入結果であるので、総負荷量2,600 tonにすぎず、これ

これは東京湾全体の平均濃度に換算すると約0.13 ppmに相当する。したがって、計算結果は現地での濃度に比べて、かなり低い濃度となっているが、東京港から横浜

港にかけての神奈川県寄りに高い濃度分布を示すパターンは現地でのCODの濃度分布のパターンとよく似ているものと思われる。

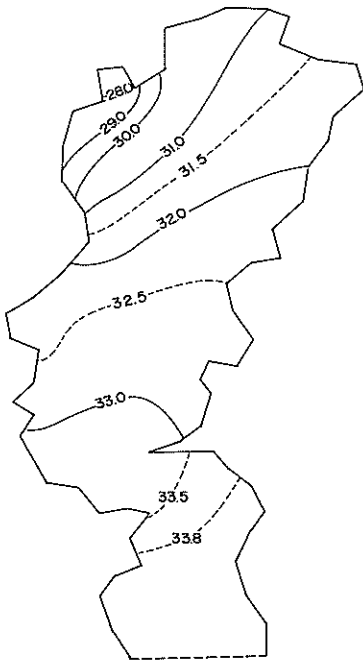
次に、図-31に単層モデルでの塩分の平面分布の計算結果を示す。また、図-32には現地調査より得られた冬期の塩分分布を示す。どちらの分布とも、淡水流入量の多い東京港周辺で、かなり低い塩分の分布を示していること、および神奈川県側の方が千葉県側よりも低いという、よく似た分布を示している。

同様な計算を2レベルモデルについても行った。上層の厚さは潮流計算と同様に5mである。CODの負荷、および河川水の投入は、すべて上層のみに行っている。図-33に、2レベルモデルでのCODの濃度分布の計算結果を示す。濃度分布のパターンは、単層の結果と類似している。上層の濃度は、下層の濃度の1.5~2倍程度の値となっている。ここで、上下層の混合係数として $\alpha = 1.0 \times 10^{-5} \text{ m/s}$ と小さい値を用いているのに、図-28に示す一様流中の結果よりも上下層間で濃度差が小さいのは、鉛直流が上下の混合に大きな役割を果たしているためと考えられる。

塩分についても2レベルモデルによって計算を実施

した。その結果の50潮汐目の濃度分布を図-34に示す。また、現地での夏期の塩分の上下層の濃度分布を図-35に示す。単層の結果と同様に、東京港から横浜港までの神奈川県側で低く、千葉県側で高い塩分分布となっている。これは、現地での塩分の分布の傾向と一致している。しかし、夏期の塩分は湾奥において、非常に低い値を示していること、また湾口においても上層では31%と若干低い値であることを考えると、これらの分布を精度良く再現するためには、湾口での境界濃度の与え方を工夫するとともに、更に長時間にわたって計算をする必要があるであろう。

2層の塩分計算において、上下の混合係数 $\alpha$ の影響を調べたものを図-36に示す。これは、荒川河口から湾奥部の中央へ向かった節点での上下層での濃度差を、 $\alpha = 0.0$ ,  $\alpha = 1.0 \times 10^{-5} \text{ m/s}$ ,  $\alpha = 1.0 \times 10^{-4} \text{ m/s}$ の3ケースについて比較したものである。当然のことながら、混合係数が大きいほど鉛直混合が促進されて、他のケースと比べて、上層では濃度が低く、下層では濃度が高い結果となっている。図-36の結果は、計算開始後10潮汐目の値であるので、まだ定常状態に達していない。DISPER-22のケースについてのみ、50潮汐まで計算



単層 塩分 %。50 Tide

図-31 塩分分布図(単層モデル, 50潮汐目, 単位%)

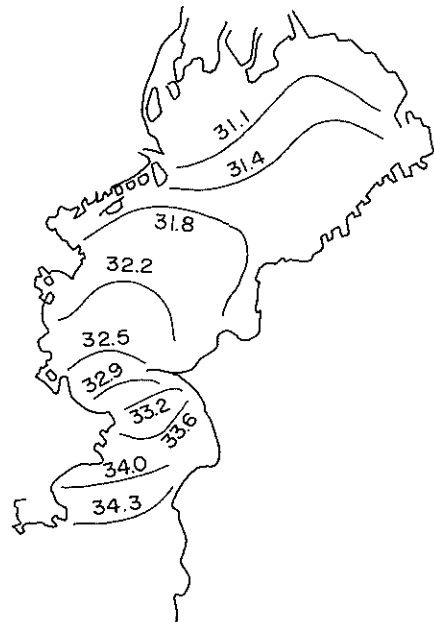


図-32 冬期の塩分分布図(現地データ, 単位%)

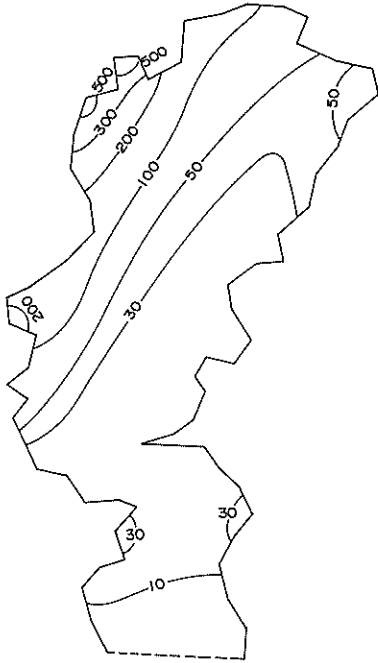


図-33(a) 濃度分布図(二層モデル, COD, 上層, 10 潮汐目, ppb)

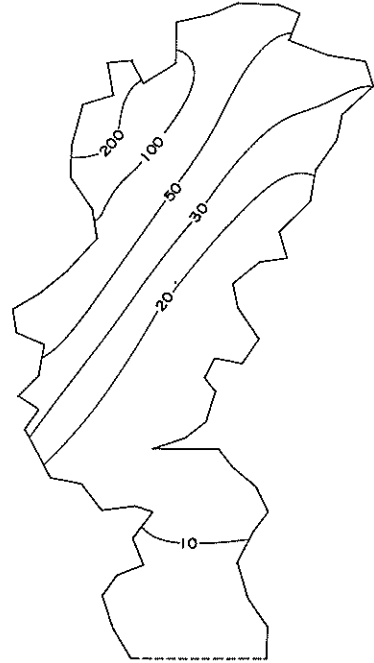


図-33(b) 濃度分布図(二層モデル, COD, 下層, 10 潮汐目, ppb)

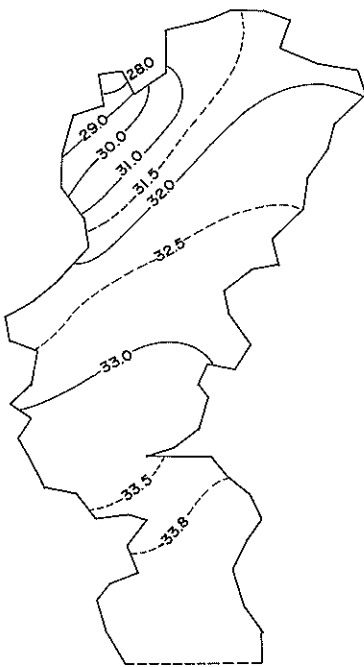


図-34(a) 塩分分布図(二層モデル, 上層, 50 潮汐目, %)

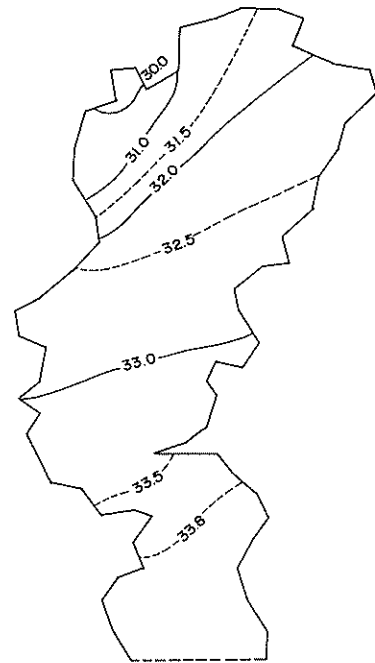


図-34(b) 塩分分布図(二層モデル, 下層, 50 潮汐目, %)

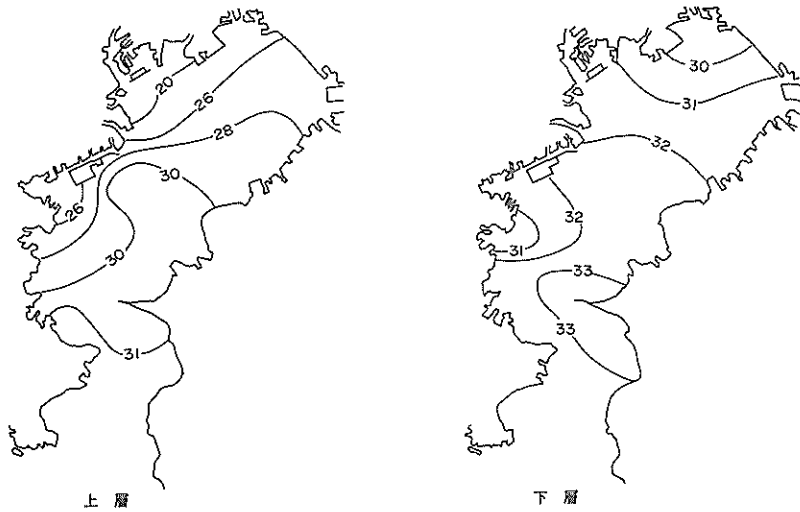


図-35 夏期の塩分分布図(現地データ, 単位%)

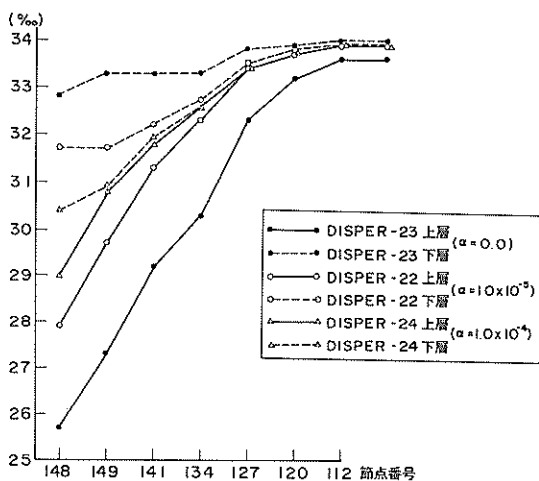


図-36 上下層の塩分濃度差(鉛直混合係数の大きさによる比較)

を実施しているので、河口周辺での濃度の経時変化をみたものを図-37に示す。50潮汐め付近になると、どの節点においても濃度の減少傾向は鈍くなっているが、まだ定常状態に達しているとは言えない。しかし、図-35の夏期の上下層の塩分分布図と比較すると、現地データの方が上下の塩分濃度差が大きいことがわかる。

このように、上下層間での鉛直混合は、2レベルモデルのように鉛直流速を考慮した場合は、冬期においては上下層の混合係数による鉛直混合を考慮する必要があるが、夏期の成層期には、鉛直流による鉛直混合のみで十分なようである。これは、本モデルにおける鉛直流で

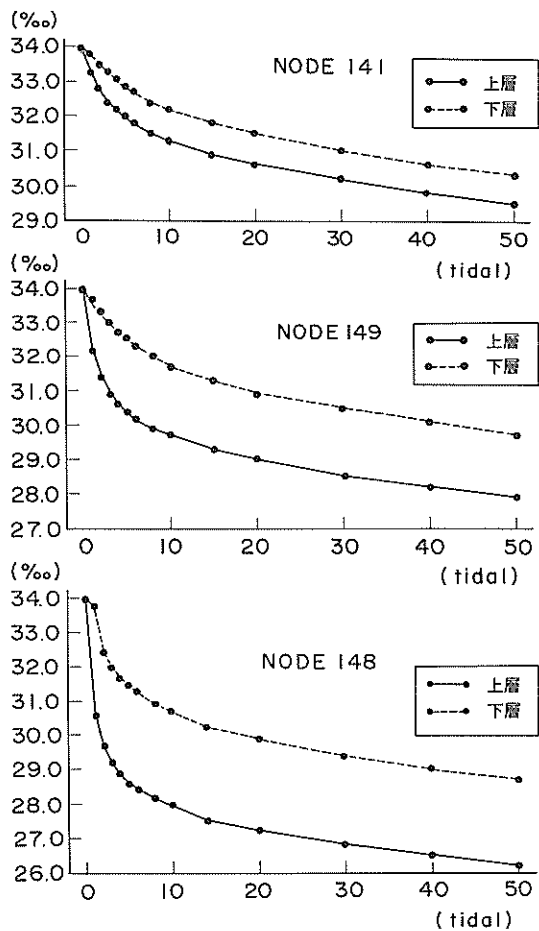


図-37 塩分濃度の経時変化(二層モデル, DISPER-22,  $\alpha = 1.0 \times 10^{-5} \text{ m/s}$ )

の物質輸送が、上下層間で完全混合を考慮しているために、鉛直拡散を若干過大評価しているものと考えられる。

以上みてきたように本計算においては、保存性の物質と仮定したCODの拡散と塩分の拡散とを数値実験的に行ったのみにすぎない。拡散計算においては、水平・鉛直の拡散係数の大きさ、開境界条件の与え方、負荷の与え方、および上層厚さなどによっても結果は変化すると思われ、まだ詳細な吟味が必要である。また、CODの計算を行うには、生産とか自浄作用などの生物的、化学的作用を考慮に入れる計算が必要なこと、また塩分計算を行う際には、上下層の密度分布による鉛直混合の大きさの程度、密度変化が流れに及ぼす影響などを考慮する必要があるであろう。これらに関しては、今後の検討課題である。

## 5. まとめ

有限要素法を用いて、二層の潮流計算と物質及び塩分の拡散計算を実施した。本資料においては、いくつかの変数を変化させた場合の数値計算を行ったにすぎないが、ここで明らかになったことを以下に箇条書きにして示す。

潮流計算については、

- (i): 開境界において  $M_2$  潮の水位振動を与えた場合の表層の水位変動は、単層および二層モデルともほとんど同じ結果が得られ、現地での  $M_2$  潮の潮位の調和定数をよく再現している。
  - (ii): 潮流に関しても、単層および二層モデルとも現地での  $M_2$  潮の潮流楕円をほぼ満足している。
  - (iii): 2レベルモデルの上層の流速は、下層の流速に比べてかなり早く、位相は30分～1時間程度遅れている。しかし、上下層の平均流速は、単層の結果とほぼ一致する。
  - (iv): 河川流出による流れへの影響は、河口付近においてはかなり強いが、河口から離れるにしたがって弱くなる。
  - (v): 風による影響は、上層(5m厚)に対しては、3cm/s(10 knotの風に対して)の変化がみられた。下層は、上層の流れと逆方向を向き、その大きさは層厚に逆比例している。
  - (vi): 鉛直流速は、全般的には上潮時に上昇流、下潮時に下降流となっている。その大きさは、最大でも0.5mm/s以下と小さい。地形が複雑な浦賀水道では、流れが遮られるところでは上昇流が、背後には下降流が生じている。
- 一様流の拡散計算に関しては、
- (vii): 有限要素法による拡散解は、理論解とほぼ一致する。

すなわち、数値拡散は生じない。

(viii): Peclet数が大きいと、拡散解は不安定となる。

東京湾での拡散計算に関しては、

- (ix): CODの拡散結果は、東京港から横浜港の神奈川側で高く、千葉県側で低い分布となっている。これは、現地と比べると、濃度の値は小さいが拡がりのパターンはよく似ている。
- (x): 塩分分布の計算結果は、淡水流入量の多い東京港から横浜港付近で低い値を示している。これも、現地での分布と傾向はよく似ている。
- (xi): 鉛直流は、上下層間の鉛直混合として作用する。したがって、夏期の成層期の塩分計算においては、上下層の鉛直混合が若干過大評価されている。

以上、上層の厚さを5mと仮定した場合の2レベルモデルでの潮流計算、拡散計算を実施した。今後は、これらの計算手法を用いて、より現地に近い現象を再現するとともに、本計算で用いた未知の係数、未知の条件などについても検討する予定である。なお、本計算に用いた計算機はNECのACOS-800IIおよびACOS-1000である。また、本計算プログラムはMITで開発されたCAFEおよびDISPERのモデルを2レベルモデルにプログラム改良したものである。

(1984年4月27日受付)

## 参考文献

- 1) たとえば、川原睦人: 水理解析と有限要素法, 1977年度水工学に関する夏期研修会講義集, 土木学会水理委員会, 1977.7, pp. A-2-1~A-2-12.
- 2) 村上和男: 有限要素法による潮汐流の数値計算, 港湾技研資料, No. 404, 1981.12, 95 p.
- 3) Leendertse, J. J.: A three-dimensional model for estuaries and coastal seas, Vol. 1, Principles of computation, The Rand Corporation, R-1417 - OWRR, 1973.
- 4) 堀江 毅: 沿岸海域の水の流れと物質の拡散に関する水理学的研究, 港湾技研資料, No. 360, 1980.12, 222 p.
- 5) 堀江 毅・細川恭史: 海域における物質循環数値モデルの水質支配要因について, 港湾技術研究所報告, 第22巻3号, 1983.9, pp. 159~205.
- 6) 村上和男他: 東京湾口における水質汚染実態調査一その1一, 港湾技研資料, No. 455, 1983.6, 73 p.

7) Wang, J. D. and J. J. Connor : Mathematical modeling of near coastal circulation, TR200, R. M. Parsons Laboratory for Water Resources and Hydrodynamics, M. I. T., 1975, 272 p.

8) たとえば, Connor, J. J. and C. A. Brebbia : Finite element techniques for fluid flow, Butterworth & Co. 1976. (邦訳として, 奥村敏恵監訳, 流体解析への有限要素法の応用, サイエンスライブラリー情報電算機=37, サイエンス社, 1978)

9) Christodoulou, G. C., J. J. Connor and B. R. Pearce : Mathematical modeling of dispersion in stratified waters, TR219, R. M. Parsons Laboratory for water Resources and Hydrodynamics, M. I. T., 1976, 308 p.

10) 金子安雄 : 2層流境界面抵抗係数の一例, 第13回海岸工学講演会講演集, pp. 263~267, 昭和41年。

11) たとえば, Van Dorn, W. : Wind stress on an artificial pond, Journal of Marine Research, Vol. 12, N. 3, 1953.

12) 光易 恒 : 海面に及ぼす風の応力, 1983年度水工学に関する夏期研修会, 土木学会水理委員会, B-1-1~B-1-17, 1963.

13) 運輸省第二港湾建設局・横須賀港工事事務所 : 東京湾潮流調査報告書, 1979. 9.

14) 運輸省港湾技術研究所 : 東京湾潮流調査報告書, 1983. 12.

15) たとえば, 柏村正和 : 河川水の海上への拡がり, 1975年度水工学に関する夏期研修会, 土木学会水理委員会, B-7-1~B-7-20, 1975.

16) 長島秀樹・岡崎守良 : 冬季における東京湾の流況と海況, 沿岸海洋研究ノート, 第16巻2号, pp. 76~86, 1979.

17) 村上和男・森川雅行・坂口達也 : 恒流に及ぼす風と淡水流入量の影響—泉南沖データ(1978~1981)による検討—, 港湾技術研究所報告, 第21巻4号, 1982. 12, pp. 3~39.

18) たとえば, Bella, D. A. and W. J. Grenny : Finite-difference convection errors, Proc. of ASCE, SA6, 1970, pp. 1361~1375.

19) たとえば, Christie I., D. F. Griffiths, A. R. Mitchell and O. C. Zienkiewicz : Finite Element Method for second order differential equations with significant first derivatives,

Int'l Jour, for Numerical Method in Engineering, Vol. 10, 1976, pp. 1389~1396.

記号一覧

- $A$  : 三角形要素の面積
- $a_i$  : 三角形要素の定数 ( $= x_k - x_j$ )
- $b_i$  : 三角形要素の定数 ( $= y_j - y_k$ )
- $A_i$  : 三角形要素の定数 ( $= \frac{1}{2}(x_j y_k - x_k y_j)$ )
- $A^i$  : 要素  $i$  の面積
- $a_0, a_1, a_2$  : 吹送流の係数
- $c$  : 濃度
- $c^*$  : 境界濃度
- $C_D$  : 風の抗力係数
- $c''$  : 濃度の断面平均からの偏差
- $E_{hxx}, E_{hxy}, E_{hyy}$  : 水平混合係数
- $E_{xx}, E_{xy}, E_{yy}$  : 水平拡散係数
- $E_{xx}^d, E_{xy}^d, E_{yy}^d$  : 分散係数テンソル
- $E_x$  : 縦分散係数
- $e$  : 要素
- $f$  : コリオリの力
- $f_b$  : 海底摩擦係数
- $f_i$  : 内部抵抗係数
- $F_i$  : 内部フルード数
- $F_p$  : 圧力
- $F_{xx}, F_{xy}, F_{yy}$  : 内部応力
- $g$  : 重力加速度
- $h_{(1)}$  : 内部境界面の水位
- $h_{(2)}$  : 海底面の水位
- $H_{(1)}$  : 上層厚さ
- $H_{(2)}$  : 下層厚さ
- $k$  : 物質の減衰係数
- $k_i$  : 拡散係数にかかる係数
- $l$  : 代表長さ
- $L$  : 渦の代表径
- $M$  : 物質の投入負荷量
- $M_2$  : 主太陰半日周潮
- $n$  : マニングの粗度係数
- $p$  : 圧力
- $P^s$  : 大気圧
- $P$  : 負荷ベクトル
- $P_e$  : Peclet 数
- $P_x, P_y$  : 荷重ベクトル
- $q_x, q_y$  : 線流量
- $Q_x, Q_y$  : 拡散フラックス
- $Q'_x, Q'_y$  : 乱流拡散フラックス

$q_I$  : 流入負荷量  
 $\bar{q}_n, \bar{q}_s$  : 境界での線流量の直交成分と接線成分  
 $Q_n^*$  : 境界での拡散フラックス  
 $R$  : 物質の負荷, 生産, 減衰を表す項  
 $R_i$  : Richardson数  
 $R_i$  : 重み付き残差  
 $R_e$  : Reynolds数  
 $S_F$  : 圧力境界  
 $S_q$  : 流量境界  
 $t$  : 時間  
 $u$  :  $x$ 方向の流速  
 $\bar{u}$  :  $x$ 方向の平均流速  
 $u''$  : 流速の断面平均値からの偏差  
 $u_*$  : 摩擦速度  
 $v$  :  $y$ 方向の流速  
 $\bar{v}$  :  $y$ 方向の平均流速  
 $w$  : 鉛直流速  
 $w_s$  : 沈降速度  
 $w_e$  : エントレインメント速度  
 $W_x, W_y$  : 風速  
 $W_{10}$  : 海面上10mの風速  
 $x, y, z$  : 直交座標系  
 $\alpha$  : 上下層の交換係数  
 $\alpha_t$  : タイムステップに関する比例係数  
 $\alpha_{nx}, \alpha_{ny}$  : 方向余弦  
 $\varepsilon$  : 乱流拡散係数  
 $\varepsilon_z$  : 鉛直拡散係数  
 $\rho$  : 密度  
 $\eta$  : 表面水位  
 $\lambda$  : 分散係数に関する比例定数  
 $\phi$  : 緯度  
 $\omega$  : 地球の自転角速度  
 $\tau_x^s, \tau_y^s$  : 表面の接線せん断応力  
 $\tau_x^i, \tau_y^i$  : 内部境界面でのせん断応力  
 $\tau_x^b, \tau_y^b$  : 海底摩擦せん断力  
 $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yy}$  : せん断応力  
 $\Delta s$  : 要素間距離  
 $\Delta t$  : タイムステップ  
 $\Delta h, \Delta q_x, \Delta q_y, \Delta w$  : 重み関係  
 $\xi_i$  : 要素の三角形座標系  
 $\phi$  : 要素内の関数ベクトル  
(1) : 上層を意味するサフィックス  
(2) : 下層を意味するサフィックス  
 $\sim$  : マトリックスを意味する記号  
 $\prime$  : 偏微分を意味する記号

付録 A 潮流方程式の有限要素法定式化

潮流の基本方程式の重み付き残差法による定式化は、弱形式化された形で上層に対して、

$$\int_{\Omega} (\eta_{,t} + q_{x,z}^{(1)} + q_{y,y}^{(1)} - q_I^{(1)} - \frac{\rho_{(2)}}{\rho_{(1)}} w) dh d\Omega = 0 \quad \dots\dots\dots (A-1)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \{ \{ q_{x,t}^{(1)} + (\bar{u}_{(1)} q_x^{(1)})_{,x} + (\bar{v}_{(1)} q_y^{(1)})_{,y} - f q_y^{(1)} \\ & + \frac{1}{\rho_{(1)}} (\tau_x^s - \tau_x^i) - \frac{P^s}{\rho_{(1)}} \eta_{,x} - \frac{\rho_{(2)}}{\rho_{(1)}} w \bar{u}_{(2)} \} \Delta q_x \\ & - \{ (F_P^{(1)} - F_{xx}^{(1)}) \Delta q_{x,x} - F_{yz}^{(1)} \Delta q_{x,y} \} \} dA \\ & + \int_{S_F} \alpha_{nz} F_P^{*(1)} \Delta q_x dS + \int_{S_q} \{ \{ \alpha_{nz} q_n^{(1)} - \alpha_{ny} q_s^{(1)} \\ & - q_x^{(1)*} \} \Delta q_x - \{ \alpha_{nz} (F_{zz}^{(1)} - F_P^{(1)}) + \alpha_{ny} F_{yz}^{(1)} \} \\ & \Delta q_x \} dS = 0 \quad \dots\dots\dots (A-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \{ \{ q_{y,t}^{(1)} + (\bar{v}_{(1)} q_x^{(1)})_{,x} + (\bar{u}_{(1)} q_y^{(1)})_{,y} + f q_x^{(1)} \\ & + \frac{1}{\rho_{(1)}} (\tau_y^s - \tau_y^i) - \frac{P^s}{\rho_{(1)}} \eta_{,y} + \frac{\rho_{(2)}}{\rho_{(1)}} w \bar{v}_{(2)} \} \Delta q_y \\ & - \{ -F_{xy}^{(1)} \Delta q_{y,x} + (F_P^{(1)} - F_{yy}^{(1)}) \Delta q_{y,y} \} \} d\Omega \\ & + \int_{S_F} \alpha_{ny} F_P^* \Delta q_y dS + \int_{S_q} \{ \{ \alpha_{ny} q_n^{(1)} + \alpha_{nz} q_s^{(1)} \\ & - q_y^{(1)*} \} \Delta q_y - \{ \alpha_{nz} F_{zy}^{(1)} + \alpha_{ny} (F_{yy}^{(1)} - F_P^{(1)}) \} \\ & \Delta q_y \} dS = 0 \quad \dots\dots\dots (A-3) \end{aligned}$$

で与えられる。下層に対しても同様に、

$$\int_{\Omega} (q_{x,z}^{(2)} + q_{y,y}^{(2)} + w - q_I^{(2)}) dh d\Omega = 0 \quad \dots\dots\dots (A-4)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \{ \{ q_{x,t}^{(2)} + (\bar{u}_{(2)} q_x^{(2)})_{,x} + (\bar{v}_{(2)} q_y^{(2)})_{,y} - f q_y^{(2)} \\ & + \frac{1}{\rho_{(2)}} (\tau_x^i - \tau_x^b) - \frac{\rho_{(1)}}{\rho_{(2)}} g H_{(2)} \eta_{,x} + w \bar{u}_{(2)} \} \Delta q_x \\ & - \{ (F_P^{(2)} - F_{zz}^{(2)}) \Delta q_{x,x} - F_{yz}^{(2)} \Delta q_{x,y} \} \} d\Omega \\ & + \int_{S_F} \alpha_{zz} F_P^{*(2)} \Delta q_x dS + \int_{S_q} \{ \{ \alpha_{nz} q_n^{(2)} - \alpha_{ny} q_s^{(2)} \\ & - q_x^{*(2)} \} \Delta q_x - \{ \alpha_{nz} (F_{zz}^{(2)} - F_P^{(2)}) + \alpha_{ny} F_{yz}^{(2)} \} \\ & \Delta q_x \} dS = 0 \quad \dots\dots\dots (A-5) \end{aligned}$$

$$\Delta q_x \} dS = 0 \quad \dots\dots\dots (A-5)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \{ \{ q_{y,t}^{(2)} + (\bar{v}_{(2)} q_x^{(2)})_{,x} + (\bar{u}_{(2)} q_y^{(2)})_{,y} + f q_x^{(2)} \\ & + \frac{1}{\rho_{(2)}} (\tau_y^i - \tau_y^b) - \frac{\rho_{(1)}}{\rho_{(2)}} g H_{(2)} \eta_{,y} + w \bar{v}_{(2)} \} \Delta q_y \\ & - \{ -F_{xy}^{(2)} \Delta q_{y,x} + (F_P^{(2)} - F_{yy}^{(2)}) \Delta q_{y,y} \} \} d\Omega \\ & + \int_{S_F} \alpha_{ny} F_P^{*(2)} \Delta q_y dS + \int_{S_q} \{ \{ \alpha_{ny} q_n^{(2)} + \alpha_{nz} q_s^{(2)} \\ & - q_y^{*(2)} \} \Delta q_y - \{ \alpha_{nz} F_{zy}^{(2)} + \alpha_{ny} (F_{yy}^{(2)} - F_P^{(2)}) \} \\ & \Delta q_y \} dS = 0 \quad \dots\dots\dots (A-6) \end{aligned}$$

で与えられる。ここで、 $\bar{\rho}$ は $\rho_{(2)}$ と仮定している。また、これらの式中において、

$$F_{zz}^{(1)} = \int_{-h(1)}^{\eta} \left( \frac{\tau_{zz}}{\rho} - u'^2 \right) dz = E_{zz} \frac{\partial}{\partial x} q_x^{(1)} \quad \dots\dots\dots (A-7)$$

$$F_{yy}^{(1)} = \int_{-h(1)}^{\eta} \left( \frac{\tau_{yy}}{\rho} - v'^2 \right) dz = E_{yy} \frac{\partial}{\partial y} q_y^{(1)} \quad \dots\dots\dots (A-8)$$

$$\begin{aligned} F_{zy}^{(1)} &= F_{yz}^{(1)} = \int_{-h(1)}^{\eta} \left( \frac{\tau_{zy}}{\rho} - u'v' \right) dz \\ &= E_{zy} \left( \frac{\partial}{\partial y} q_x^{(1)} + \frac{\partial}{\partial x} q_y^{(1)} \right) \quad \dots\dots\dots (A-9) \end{aligned}$$

$$F_P^{(1)} = \frac{1}{\rho_{(1)}} \int_{-h(1)}^{\eta} P dz - \frac{1}{2} g H_{(1)}^2 = \frac{P_s}{\rho_{(1)}} h_{(1)} + g h_{(1)} \eta \quad \dots\dots\dots (A-10)$$

$$F_{zz}^{(2)} = \int_{-h(2)}^{-h(1)} \left( \frac{\tau_{zz}}{\rho} - u'^2 \right) dz = E_{zz} \frac{\partial}{\partial x} q_x^{(2)} \quad \dots\dots\dots (A-11)$$

$$F_{yy}^{(2)} = \int_{-h(2)}^{-h(1)} \left( \frac{\tau_{yy}}{\rho} - v'^2 \right) dz = E_{yy} \frac{\partial}{\partial y} q_y^{(2)} \quad \dots\dots\dots (A-12)$$

$$\begin{aligned} F_{zy}^{(2)} &= \int_{-h(2)}^{-h(1)} \left( \frac{\tau_{zy}}{\rho} - u'v' \right) dz = E_{zy} \left( \frac{\partial}{\partial y} q_x^{(2)} \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial x} q_y^{(2)} \right) \quad \dots\dots\dots (A-13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_P^{(2)} &= \frac{1}{\rho_{(2)}} \int_{-h(2)}^{-h(1)} P dz - \left( \frac{P_i}{\rho_{(2)}} H_{(2)} + \frac{1}{2} g H_{(2)}^2 \right) \\ &= g H_{(1)} \eta_{(2)} + g H_{(2)} \eta_{(2)} = 0 \quad \dots\dots\dots (A-14) \end{aligned}$$

で定義されるものである。また、



$$\tau_z^b = \frac{f_b}{8} \rho_{(2)} \bar{u}_{(2)} \sqrt{\bar{u}_{(2)}^2 + \bar{v}_{(2)}^2} \quad \dots\dots\dots (A-15)$$

$$\tau_y^b = \frac{f_b}{8} \rho_{(2)} \bar{v}_{(2)} \sqrt{\bar{u}_{(2)}^2 + \bar{v}_{(2)}^2} \quad \dots\dots\dots (A-16)$$

$$\tau_z^i = \frac{f_i}{8} \rho_{(1)} (\bar{u}_{(1)} - \bar{u}_{(2)}) \sqrt{(\bar{u}_{(1)} - \bar{u}_{(2)})^2 + (\bar{v}_{(1)} - \bar{v}_{(2)})^2} \quad \dots\dots\dots (A-17)$$

$$\tau_y^i = \frac{f_i}{8} \rho_{(1)} (\bar{v}_{(1)} - \bar{v}_{(2)}) \sqrt{(\bar{u}_{(1)} - \bar{u}_{(2)})^2 + (\bar{v}_{(1)} - \bar{v}_{(2)})^2} \quad \dots\dots\dots (A-18)$$

$$\tau_z^s = \rho_a C_D W_x \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \quad \dots\dots\dots (A-19)$$

$$\tau_y^s = \rho_a C_D W_y \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \quad \dots\dots\dots (A-20)$$

で定義される。いま、計算領域を数多くの三角形に分割した場合に、これらの変数は、おのおのの三角形の頂点の値の一次結合で表されるとすると、その三角形内での任意の点での流速、水位などの変数は

$$\eta = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3 = \phi \underline{\eta}^e \quad \dots\dots\dots (A-21)$$

$$q_x = \xi_1 q_{x_1} + \xi_2 q_{x_2} + \xi_3 q_{x_3} = \phi q_x^e \quad \dots\dots\dots (A-22)$$

$$q_y = \xi_1 q_{y_1} + \xi_2 q_{y_2} + \xi_3 q_{y_3} = \phi q_y^e \quad \dots\dots\dots (A-23)$$

⋮

で表すことができる。また重み関数についても同様に、

$$\Delta h = \xi_1 \Delta h_1 + \xi_2 \Delta h_2 + \xi_3 \Delta h_3 = \phi \Delta h^e \quad \dots\dots\dots (A-24)$$

$$\Delta q_x = \xi_1 \Delta q_{x_1} + \xi_2 \Delta q_{x_2} + \xi_3 \Delta q_{x_3} = \phi \Delta q_x^e \quad \dots\dots\dots (A-25)$$

$$\Delta q_y = \xi_1 \Delta q_{y_1} + \xi_2 \Delta q_{y_2} + \xi_3 \Delta q_{y_3} = \phi \Delta q_y^e \quad \dots\dots\dots (A-26)$$

と書くことができる。ここに、 $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  は正規化された三角形座標である。また、マトリックス  $\phi$  は

$$\phi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3] \quad \dots\dots\dots (A-27)$$

で定義されるものである。いま、

$$\begin{aligned} \xi_1 &= (x_1, y_1), & \xi_2 &= (x_2, y_2), \\ \xi_3 &= (x_3, y_3) & & \dots\dots\dots (A-28) \end{aligned}$$

の時に、直交座標系  $x, y$  から三角形座標系  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$

への変換は、

$$\xi_i = \frac{1}{2A} (2A_i + b_i x + a_i y) \quad \dots\dots\dots (A-29)$$

で与えられる。ここに、

$$a_i = x_k - x_j \quad \dots\dots\dots (A-30)$$

$$b_i = y_j - y_k \quad \dots\dots\dots (A-31)$$

$$2A_i = x_j y_k - x_k y_j \quad \dots\dots\dots (A-32)$$

$$A = \frac{1}{2} (b_1 a_2 - b_2 a_1) \quad \dots\dots\dots (A-33)$$

である。(  $i, j, k$  ) は三角形の頂点を反時計廻りに ( 1, 2, 3 ) の順に循環させたものである。また、 $A$  は三角形の面積である。

この基準三角形内での微分および積分は次のように行うことができる。

$$\frac{\partial}{\partial x} q_x = \frac{\partial}{\partial \xi_i} q_x \frac{\partial \xi_i}{\partial x} = \sum_{i=1}^3 \frac{b_i}{2A} q_{x_i}^e \quad \dots\dots\dots (A-34)$$

また、

$$\begin{aligned} \int_A q_y dA &= 2A \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} q_y d\xi_2 d\xi_1 \\ &= \frac{A}{3} (q_{y_1}^e + q_{y_2}^e + q_{y_3}^e) \quad \dots\dots\dots (A-35) \end{aligned}$$

となる。なお、三角形要素内の積分は、次の積分公式を用いると便利である。

$$\int_A \xi_1^i \xi_2^j \xi_3^k dA = \frac{i! \cdot j! \cdot k!}{(i+j+k+2)!} \cdot 2A \quad \dots\dots\dots (A-36)$$

このような表現式を用いて、上層での連続の式(A-1)、運動方程式(A-2)、(A-3)の有有限要素近似を行う。まず、積分範囲を数多くの三角形に分割する。この任意の三角形内では、基本方程式内の各変数は式(A-21)~(A-23)のように一次式で近似できるものとし、また重み関係として、式(A-18)~(A-20)を用いて代入すると、おのおのの三角形に対する近似式が次のように得られる。

$$\begin{aligned} \int_A (\phi \Delta h^e)^T \{ (\phi \underline{\eta}^e)_{,t} + (\phi q_x^{(1)e})_{,z} + (\phi q_y^{(1)e})_{,y} \\ - (\phi q_x^{(1)e}) - \frac{\rho_{(2)}}{\rho_{(1)}} (\phi w^e) \} dA = 0 \quad \dots\dots\dots (A-37) \end{aligned}$$

ここで、形状関数  $\phi$  は場所のみの関数であって時間の関数ではないので、

$$(\phi \underline{\eta}^e)_{,t} = \phi \cdot \underline{\eta}^e_{,t} \quad \dots\dots\dots (A-38)$$

および、

$$(\underline{\phi} \underline{q}_z^{(1)e})_{,z} = \underline{\phi}_{,z} \underline{q}_z^{(1)e} \quad \dots\dots\dots (A-39)$$

$$(\underline{\phi} \underline{q}_y^{(1)e})_{,y} = \underline{\phi}_{,y} \underline{q}_y^{(1)e} \quad \dots\dots\dots (A-40)$$

となる。これらの表現式を用い、計算領域全体にわたって積分すると、

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\eta_{,t} + q_{z,x}^{(1)} + q_{y,y}^{(1)} - q_I^{(1)} - \frac{\rho_{(2)}}{\rho_{(1)}} w) \Delta h \, d\Omega \\ &= \sum_{i=1}^{NMEL} (\Delta h^e)^T \int_{A_i} (\underline{\phi}_i)^T \{ \underline{\phi} \eta_{,t}^e + \underline{\phi}_{,z} q_z^{(1)e} + \underline{\phi}_{,y} q_y^{(1)e} \\ & \quad - \underline{\phi} q_I^{(1)e} - \frac{\rho_{(2)}}{\rho_{(1)}} \underline{\phi} w^e \} \, dA \quad \dots\dots\dots (A-41) \end{aligned}$$

と表される。ここに、NMELは要素総数である。これを簡単なマトリックス形式で表すと次のようになる。

$$\underline{M} \underline{\eta}_{,t} + \underline{F}_z \underline{q}_z^{(1)} + \underline{F}_y \underline{q}_y^{(1)} - \underline{M} \underline{q}_I^{(1)} - \frac{\rho_{(2)}}{\rho_{(1)}} \underline{M} w = 0 \quad \dots\dots\dots (A-42)$$

ここに、要素*i*での係数マトリックスは

$$\begin{aligned} \underline{M}^i &= \int_A \underline{\phi}^T \underline{\phi} \, dA = \int_A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} [\xi_1, \xi_2, \xi_3] \, dA \\ &= \int_A \begin{bmatrix} \xi_1^2 & \xi_1 \xi_2 & \xi_1 \xi_3 \\ \xi_2 \xi_1 & \xi_2^2 & \xi_2 \xi_3 \\ \xi_3 \xi_1 & \xi_3 \xi_2 & \xi_3^2 \end{bmatrix} \, dA = \frac{A^i}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ & \quad \dots\dots\dots (A-43) \end{aligned}$$

で与えられる。同様にして

$$\begin{aligned} \underline{F}_z^i &= \int \underline{\phi}^T \cdot \underline{\phi}_{,z} \, dA = \int \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \frac{1}{2A^i} [b_1, b_2, b_3] \, dA \\ &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (A-44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{F}_y^i &= \int \underline{\phi}^T \cdot \underline{\phi}_{,y} \, dA = \int \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \frac{1}{2A^i} [a_1, a_2, a_3] \, dA \\ &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (A-45) \end{aligned}$$

である。

運動方程式に対しても同様に、*x*方向に対しては、

$$\begin{aligned} & (\Delta \underline{q}_z)^T \int_{\Omega} (\underline{\phi}^T) \{ (\underline{\phi} \underline{q}_z^{(1)})_{,t} + (\underline{\phi}_{,z} \underline{c}_{zz}^{(1)}) + (\underline{\phi}_{,y} \underline{c}_{zy}^{(1)}) \\ & \quad - f(\underline{\phi} \underline{q}_y^{(1)}) + (\underline{\phi} \underline{T}_x^s) - (\underline{\phi} \underline{T}_z^i) - \frac{1}{\rho_{(1)}} (\underline{\phi} P^s \underline{\phi}_{,z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \underline{\eta}) \} \, dA - (\Delta \underline{q}_z)^T \int_{\Omega} (\underline{\phi}_{,z}^T) \{ \frac{1}{\rho_{(1)}} \underline{\phi} P^s \underline{\phi} (h_{(1)} + \underline{\eta}) \\ & \quad + g \underline{\phi} h_{(1)} \underline{\phi} \underline{\eta} - E_{kzz}^i \underline{\phi}_{,z} \underline{q}_z^{(1)e} \} \, dA + (\Delta \underline{q}_z)^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\underline{\phi}_{,y}^T) \{ E_{kzy} (\underline{\phi}_{,y} \underline{q}_z^{(1)} + \underline{\phi}_{,z} \underline{q}_y^{(1)}) \} \, dA + (\Delta \underline{q}_z)^T \\ & \int_{S_F} \alpha_{nz} \underline{\phi}^T \{ g \underline{\phi} h_{(1)} \underline{\phi} \underline{\eta}^* + \frac{1}{\rho_{(1)}} \underline{\phi} P^s \underline{\phi} (h_{(1)}^* \\ & \quad + \underline{\eta}^*) \} \, dS - (\Delta \underline{q}_z)^T \int_{S_q} [\alpha_{nz} \underline{\phi}^T E_{kzz} \underline{\phi}_{,z} \underline{q}_z^{(1)} \\ & \quad - \alpha_{nz} \underline{\phi}^T \{ g \underline{\phi} h_{(1)} \underline{\phi} \underline{\eta} - \frac{1}{\rho_{(1)}} \underline{\phi} P^s \underline{\phi} (h_{(1)} + \underline{\eta}) \} \\ & \quad + \alpha_{nz} E_{kzy} \underline{\phi}^T (\underline{\phi}_{,z} \underline{q}_y^{(1)} + \underline{\phi}_{,y} \underline{q}_z^{(1)})] \, dS = 0 \\ & \quad \dots\dots\dots (A-46) \end{aligned}$$

が得られ、*y*方向に対しては、

$$\begin{aligned} & (\Delta \underline{q}_y)^T \int_{\Omega} (\underline{\phi}^T) \{ (\underline{\phi} \underline{q}_y^{(1)})_{,t} + (\underline{\phi}_{,z} \underline{c}_{zy}^{(1)}) \\ & \quad + (\underline{\phi}_{,y} \underline{c}_{yy}^{(1)}) + f(\underline{\phi} \underline{q}_z^{(1)}) + (\underline{\phi} \underline{T}_y^s) - (\underline{\phi} \underline{T}_y^i) \\ & \quad - \frac{1}{\rho_{(1)}} (\underline{\phi} P^s \underline{\phi}_{,y} \underline{\eta}) \} \, dA + (\Delta \underline{q}_y)^T \int_{\Omega} (\underline{\phi}_{,y}^T) \\ & \quad \{ E_{kzy} (\underline{\phi}_{,y} \underline{q}_z^{(1)} + \underline{\phi}_{,z} \underline{q}_y^{(1)}) \} \, dA - (\Delta \underline{q}_y)^T \\ & \int_{\Omega} (\underline{\phi}_{,y}^T) \{ \frac{1}{\rho_{(1)}} \underline{\phi} P^s \underline{\phi} (h_{(1)} + \underline{\eta}) + g \underline{\phi} h_{(1)} \underline{\phi} \underline{\eta} \\ & \quad - E_{kyy} \underline{\phi}_{,y} \underline{q}_y^{(1)} \} \, dA + (\Delta \underline{q}_y)^T \int_{S_F} \alpha_{ny} \underline{\phi}^T \\ & \quad \{ g \underline{\phi} h_{(1)} \underline{\phi} \underline{\eta}^* + \frac{1}{\rho_{(1)}} \underline{\phi} P^s \underline{\phi} (h_{(1)}^* + \underline{\eta}^*) \} \, dS \\ & \quad - (\Delta \underline{q}_y)^T \int_{S_q} [\alpha_{ny} \underline{\phi}^T E_{kyy} \underline{\phi}_{,y} \underline{q}_y^{(1)} - \alpha_{ny} \underline{\phi}^T \\ & \quad \{ g \underline{\phi} h_{(1)} \underline{\phi} \underline{\eta} - \frac{1}{\rho_{(1)}} \underline{\phi} P^s \underline{\phi} (h_{(1)} + \underline{\eta}) \} \\ & \quad + \alpha_{nz} E_{kzy} \underline{\phi}^T (\underline{\phi}_{,z} \underline{q}_y^{(1)} + \underline{\phi}_{,y} \underline{q}_z^{(1)})] \, dS = 0 \\ & \quad \dots\dots\dots (A-47) \end{aligned}$$

が得られる。ここに、

$$\underline{c}_{zz}^{(1)} = \frac{q_z^{(1)} q_z^{(1)}}{H_{(1)}} \quad \dots\dots\dots (A-48)$$

$$\underline{c}_{zy}^{(1)} = \frac{q_z^{(1)} q_y^{(1)}}{H_{(1)}} \quad \dots\dots\dots (A-49)$$

$$\underline{c}_{yy}^{(1)} = \frac{q_y^{(1)} q_y^{(1)}}{H_{(1)}} \quad \dots\dots\dots (A-50)$$

$$T_x^s = \frac{\tau_x^s}{\rho_{(1)}} = \frac{\rho_a}{\rho_{(1)}} C_D W_x \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \quad \dots\dots (A-51)$$

$$T_y^s = \frac{\tau_y^s}{\rho_{(1)}} = \frac{\rho_a}{\rho_{(1)}} C_D W_y \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \quad \dots\dots (A-52)$$

$$T_x^i = \frac{\tau_x^i}{\rho_{(1)}} = \frac{f_i}{8} (u_{(1)} - u_{(2)}) \sqrt{(u_{(1)} - u_{(2)})^2 + (v_{(1)} - v_{(2)})^2} \quad \dots\dots (A-53)$$

$$T_y^i = \frac{\tau_y^i}{\rho_{(1)}} = \frac{f_i}{8} (v_{(1)} - v_{(2)}) \sqrt{(u_{(1)} - u_{(2)})^2 + (v_{(1)} - v_{(2)})^2} \quad \dots\dots (A-54)$$

である。式 (A-46), (A-47) を前と同様にマトリックスの形で示すと,

$$\underline{M} \underline{q}_{x,t}^{(1)} - \underline{G}^{(1)T} \underline{\eta} + \underline{E}_{h_{xz}} \underline{q}_x^{(1)} + \underline{E}_{h_{yz}} \underline{q}_y^{(1)} - f \underline{M} \underline{q}_y^{(1)} = \underline{P}_x^{(1)} \quad \dots\dots (A-55)$$

$$\underline{M} \underline{q}_{y,t}^{(1)} - \underline{G}^{(1)T} \underline{\eta} + \underline{E}_{h_{xz}} \underline{q}_x^{(1)} + \underline{E}_{h_{yz}} \underline{q}_y^{(1)} + f \underline{M} \underline{q}_x^{(1)} = \underline{P}_y^{(1)} \quad \dots\dots (A-56)$$

となる。

これらの式において,

$$\underline{M}^i = \int \underline{\phi}^T \underline{\phi} dA = \frac{A_i}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (A-57)$$

$$\underline{G}^{(1)T} = \frac{1}{\rho_{(1)}} \int \underline{\phi}^T \underline{\phi} P^s \underline{\phi}_{,z} dA = 0 \quad (\text{大気圧一定}) \quad \dots\dots (A-58)$$

$$\begin{aligned} \underline{E}_{h_{xz}} &= \int \{ \underline{E}_{h_{xz}} \underline{\phi}_{,z}^T \underline{\phi}_{,z} + \underline{E}_{h_{yz}} \underline{\phi}_{,y}^T \underline{\phi}_{,z} \} dA \\ &= \frac{E_{h_{xz}}}{4A^2} \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ b_2 b_1 & b_2^2 & b_2 b_3 \\ b_3 b_1 & b_3 b_2 & b_3^2 \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{E_{h_{yz}}}{4A^2} \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} \quad \dots\dots (A-59) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{E}_{h_{yz}} &= \int \underline{E}_{h_{yz}} \underline{\phi}_{,y}^T \underline{\phi}_{,z} dA \\ &= \frac{E_{h_{yz}}}{4A^2} \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} \quad \dots (A-60) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{E}_{h_{yy}} &= \int \{ \underline{E}_{h_{xy}} \underline{\phi}_{,z}^T \underline{\phi}_{,y} + \underline{E}_{h_{yy}} \underline{\phi}_{,y}^T \underline{\phi}_{,y} \} dA \\ &= \frac{E_{h_{xy}}}{4A^2} \begin{bmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 & b_1 a_3 \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 & b_2 a_3 \\ b_3 a_1 & b_3 a_2 & b_3 a_3 \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{E_{h_{yy}}}{4A^2} \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_2 a_1 & a_2^2 & a_2 a_3 \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & a_3^2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots (A-61) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\underline{P}_x^{(1)} &= \int \underline{\phi}^T \underline{\phi}_{,z} dA c_{xz}^{(1)} + \int \underline{\phi}^T \underline{\phi}_{,y} dA c_{zy}^{(1)} \\ &\quad + \int \underline{\phi}^T \underline{\phi} dA T_x^s - \int \underline{\phi}^T \underline{\phi} dA T_x^i \\ &\quad - g \int \underline{\phi}_{,z}^T \underline{\phi} h_{(1)} \underline{\phi} \underline{\eta} dA \\ &\quad + \alpha_{nz} \int_{S_F} \underline{\phi}^T g \underline{\phi} h_{(1)} \underline{\phi} \underline{\eta}^* dS \quad \dots\dots (A-62) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\underline{P}_y^{(1)} &= \int \underline{\phi}^T \underline{\phi}_{,z} dA c_{xy}^{(1)} + \int \underline{\phi}^T \underline{\phi}_{,y} dA c_{yy}^{(1)} \\ &\quad + \int \underline{\phi}^T \underline{\phi} dA T_y^s - \int \underline{\phi}^T \underline{\phi} dA T_y^i \\ &\quad - g \int \underline{\phi}_{,y}^T \underline{\phi} h_{(1)} \underline{\phi} \underline{\eta} dA \\ &\quad + \alpha_{ny} \int_{S_F} \underline{\phi}^T g \underline{\phi} h_{(1)} \underline{\phi} \underline{\eta}^* dS \quad \dots\dots (A-63) \end{aligned}$$

である。

下層に対しても同様に,

$$\underline{F}_x \underline{q}_x^{(2)} + \underline{F}_y \underline{q}_y^{(2)} - \underline{M} \underline{q}_t^{(2)} + \underline{M} \underline{w} = 0 \quad \dots (A-64)$$

$$\underline{M} \underline{q}_{x,t}^{(2)} + \underline{E}_{h_{xz}} \underline{q}_x^{(2)} + \underline{E}_{h_{yz}} \underline{q}_y^{(2)} - f \underline{M} \underline{q}_y^{(2)} = \underline{P}_x^{(2)} \quad \dots\dots (A-65)$$

$$\underline{M} \underline{q}_{y,t}^{(2)} + \underline{E}_{h_{xz}} \underline{q}_x^{(2)} + \underline{E}_{h_{yz}} \underline{q}_y^{(2)} + f \underline{M} \underline{q}_x^{(2)} = \underline{P}_y^{(2)} \quad \dots\dots (A-66)$$

と書き表すことができる。ここに,

$$\begin{aligned} -\underline{P}_x^{(2)} &= \int \underline{\phi}^T \underline{\phi}_{,z} dA c_{xz}^{(2)} + \int \underline{\phi}^T \underline{\phi}_{,y} dA c_{zy}^{(2)} \\ &\quad + \int \underline{\phi}^T \underline{\phi} dA T_x^i - \int \underline{\phi}^T \underline{\phi} dA T_x^b \\ &\quad - \frac{\rho_{(1)}}{\rho_{(2)}} g \int \underline{\phi}_{,z}^T \underline{\phi} h_{(2)} \underline{\phi}_{,z} \underline{\eta} dA \\ &\quad + \alpha_{nz} \int_{S_F} \underline{\phi}^T \frac{\rho_{(1)}}{\rho_{(2)}} g \underline{\phi} h_{(2)} \underline{\phi} \underline{\eta}^* dS \quad \dots\dots (A-67) \\ -\underline{P}_y^{(2)} &= \int \underline{\phi}^T \underline{\phi}_{,z} dA c_{xy}^{(2)} + \int \underline{\phi}^T \underline{\phi}_{,y} dA c_{yy}^{(2)} \\ &\quad + \int \underline{\phi}^T \underline{\phi} dA T_y^i - \int \underline{\phi}^T \underline{\phi} dA T_y^b \\ &\quad - \frac{\rho_{(1)}}{\rho_{(2)}} g \int \underline{\phi}_{,z}^T \underline{\phi} h_{(2)} \underline{\phi}_{,y} \underline{\eta} dA \\ &\quad + \alpha_{ny} \int_{S_F} \underline{\phi}^T \frac{\rho_{(1)}}{\rho_{(2)}} g \underline{\phi} h_{(2)} \underline{\phi} \underline{\eta}^* dS \quad \dots\dots (A-68) \end{aligned}$$

である。

付録 B 拡散方程式の有限要素法定式化

拡散方程式の重み付き残差法による定式化は、弱形式化された形で上層に対して、

$$\int_{\Omega} \left\{ H_{(1)} \frac{\partial c_{(1)}}{\partial t} + q_x^{(1)} \frac{\partial c_{(1)}}{\partial x} + q_y^{(1)} \frac{\partial c_{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} Q_{x(1)} + \frac{\partial}{\partial y} Q_{y(1)} - R_{(1)} \right\} \Delta W dA + \int_{S_q} (Q_{\pi(1)}^* - Q_{\pi(1)}) \Delta W dA = 0 \quad \dots\dots (B-1)$$

また、下層に対して

$$\int_{\Omega} \left\{ H_{(2)} \frac{\partial c_{(2)}}{\partial t} + q_x^{(2)} \frac{\partial c_{(2)}}{\partial x} + q_y^{(2)} \frac{\partial c_{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} Q_{x(2)} + \frac{\partial}{\partial y} Q_{y(2)} - P_{(2)} \right\} \Delta W dA + \int_{S_q} (Q_{\pi(2)}^* - Q_{\pi(2)}) \Delta W dA = 0 \quad \dots (B-2)$$

と表わせる。ここに、

$$Q_{x(1)} = - \left( E_{xx} H_{(1)} \frac{\partial c_{(1)}}{\partial x} + E_{xy} H_{(1)} \frac{\partial c_{(1)}}{\partial y} \right) \quad \dots\dots (B-3)$$

$$Q_{y(1)} = - \left( E_{xy} H_{(1)} \frac{\partial c_{(1)}}{\partial x} + E_{yy} H_{(1)} \frac{\partial c_{(1)}}{\partial y} \right) \quad \dots\dots (B-4)$$

$$Q_{x(2)} = - \left( E_{xx} H_{(2)} \frac{\partial c_{(2)}}{\partial x} + E_{xy} H_{(2)} \frac{\partial c_{(2)}}{\partial y} \right) \quad \dots\dots (B-5)$$

$$Q_{y(2)} = - \left( E_{xy} H_{(2)} \frac{\partial c_{(2)}}{\partial x} + E_{yy} H_{(2)} \frac{\partial c_{(2)}}{\partial y} \right) \quad \dots\dots (B-6)$$

$$P_{(1)} = - w_s \frac{c_{(1)}^+ c_{(2)}}{2} + w \frac{c_{(2)}^- c_{(1)}}{2} - c_{(1)} q_I^{(1)} - \alpha (c_{(2)} - c_{(1)}) - k H_{(1)} c_{(1)} + R_{(1)} \dots (B-7)$$

$$P_{(2)} = w_s \frac{c_{(1)} + c_{(2)}}{2} + w \frac{c_{(2)}^- c_{(1)}}{2} - c_{(2)} q_I^{(2)} + \alpha (c_{(2)} - c_{(1)}) - k H_{(2)} c_{(2)} + R_{(2)} \dots (B-8)$$

である。

潮流の場合と同様に、計算領域を三角形の有限要素に分割し、この三角形内での流速（線流量）、濃度、及び水深は三角形の節点値での一次関数によって与えられるとすると、

$$c = \xi_1 c_1 + \xi_2 c_2 + \xi_3 c_3 = \phi c^e \quad \dots\dots (B-9)$$

$$H = \xi_1 H_1 + \xi_2 H_2 + \xi_3 H_3 = \phi H^e \quad \dots\dots (B-10)$$

$$q_x = \xi_1 q_{x1} + \xi_2 q_{x2} + \xi_3 q_{x3} = \phi q_x^e \quad \dots (B-11)$$

$$q_y = \xi_1 q_{y1} + \xi_2 q_{y2} + \xi_3 q_{y3} = \phi q_y^e \quad \dots (B-12)$$

$$w = \xi_1 w_1 + \xi_2 w_2 + \xi_3 w_3 = \phi w^e \quad \dots\dots (B-13)$$

$$q_I = \xi_1 q_{I1} + \xi_2 q_{I2} + \xi_3 q_{I3} = \phi q_I^e \quad \dots (B-14)$$

$$\Delta W = \xi_1 \Delta W_1 + \xi_2 \Delta W_2 + \xi_3 \Delta W_3 = \phi \Delta W^e \quad \dots\dots (B-15)$$

で与えられる。これらの諸量を式 (B-1) に代入し、おのおのの三角形について積分して計算領域全体にわたって重ね合わせると、上層に対しては

$$\sum_{i=1}^{NMEL} (\Delta W)^T \left[ \int_A \phi^T \phi H_{(1)}^e \phi_{,x} dA c_{(1)}, \right. \\ + \int_A \phi^T \phi q_x^{(1)} \phi_{,x} dA c_{(1)} + \int_A \phi^T \phi q_y^{(1)} \phi_{,y} dA c_{(1)} \\ + w_s \int \phi^T \phi dA \left( \frac{c_{(1)}^+ c_{(2)}}{2} \right) - \int \phi^T \phi w \phi dA \left( \frac{c_{(2)}^- c_{(1)}}{2} \right) \\ + \int \phi^T \phi q_I^{(1)} \phi dA c_{(1)} + \alpha \int \phi^T \phi dA (c_{(1)} - c_{(2)}) \\ + k H \int \phi^T \phi dA c_{(1)} - \int \phi^T \phi dA R_{(1)} \\ - \int \phi_{,x}^T (E_{xx} \phi H_{(1)} \phi_{,x} + E_{xy} \phi H_{(1)} \phi_{,y}) dA c_{(1)} \\ - \int \phi_{,y}^T (E_{xy} \phi H_{(1)} \phi_{,x} + E_{yy} \phi H_{(1)} \phi_{,y}) dA \\ \left. + \int_{S_q} \phi^T \phi dS Q_{\pi(1)}^* \right] = 0 \quad \dots\dots (B-16)$$

となる。同様に下層に対しても、

$$\sum_{i=1}^{NMEL} (\Delta W)^T \left[ \int \phi^T \phi H_{(2)}^e \phi dA c_{(2)}, \right. \\ + \int_A \phi^T \phi q_x^{(2)} \phi_{,x} dA c_{(2)} + \int \phi^T \phi q_y^{(2)} \phi_{,y} dA c_{(2)} \\ - w_s \int \phi^T \phi dA \left( \frac{c_{(1)}^+ c_{(2)}}{2} \right) - \int \phi^T \phi w \phi dA \left( \frac{c_{(2)}^- c_{(1)}}{2} \right) \\ + \int \phi^T \phi q_I^{(2)} \phi dA c_{(2)} - \alpha \int \phi^T \phi dA (c_{(1)} - c_{(2)}) \\ \left. + k H_{(2)} \int \phi^T \phi dA c_{(2)} - \int \phi^T \phi dA R_{(2)} \right]$$

$$-\int \phi_{,z}^T (E_{zz} \phi_{H(2)} \phi_{,z} + E_{zy} \phi_{H(2)} \phi_{,y}) dA c_{(2)}$$

$$-\int \phi_{,y}^T (E_{zy} \phi_{H(2)} \phi_{,z} + E_{yy} \phi_{H(2)} \phi_{,y}) dA$$

$$\int_{S_q} \phi_b^T \phi dS Q_{n(2)}^b = 0 \quad \dots\dots\dots (B-17)$$

となる。ここに、 $\bar{H}$ は要素内の平均水深を示し、NMELは要素の総数である。これらを、マトリックスで簡単に表すと、

$$\begin{aligned} & \underline{M}_{c(1)} c_{(1),t} + \underline{A}_{(1)} c_{(1)} + \underline{K}_{(1)} c_{(1)} + \underline{D}_{(1)} c_{(1)} \\ & + \underline{E}_{(1)} (c_{(1)} - c_{(2)}) + \underline{E}_{(1)}^* = \underline{S}_{(1)} - \underline{F}_{(1)}^b \dots (B-18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \underline{M}_{c(2)} c_{(2),t} + \underline{A}_{(2)} c_{(2)} + \underline{K}_{(2)} c_{(2)} + \underline{D}_{(2)} c_{(2)} \\ & + \underline{E}_{(2)} (c_{(2)} - c_{(1)}) + \underline{E}_{(2)}^* = \underline{S}_{(2)} - \underline{F}_{(2)}^b \dots (B-19) \end{aligned}$$

となる。更に整理すると、

$$(\underline{M}_{c(i)} \frac{dc_{(i)}}{dt} - \underline{P}_{(i)} + \underline{F}_{(i)}^b) = 0 \quad \dots\dots (B-20)$$

と書き表すことができる。ここに、

$$\begin{aligned} -\underline{P}_{(1)} &= \underline{A}_{(1)} c_{(1)} + \underline{K}_{(1)} c_{(1)} + \underline{D}_{(1)} c_{(1)} \\ &+ \underline{E}_{(1)} (c_{(1)} - c_{(2)}) + \underline{E}_{(1)}^* - \underline{S}_{(1)} \quad \dots\dots (B-21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\underline{P}_{(2)} &= \underline{A}_{(2)} c_{(2)} + \underline{K}_{(2)} c_{(2)} + \underline{D}_{(2)} c_{(2)} \\ &+ \underline{E}_{(2)} (c_{(2)} - c_{(1)}) + \underline{E}_{(2)}^* - \underline{S}_{(2)} \quad \dots\dots (B-22) \end{aligned}$$

である。これらの式において、

$$\underline{M}_c^i = \frac{A_i}{60} \begin{bmatrix} 6H_1 + 2H_2 + 2H_3, & 2H_1 + 2H_2 + H_3, & 2H_1 + H_2 + 2H_3 \\ 2H_1 + 2H_2 + H_3, & 2H_1 + 6H_2 + 2H_3, & H_1 + 2H_2 + 2H_3 \\ 2H_1 + H_2 + 2H_3, & H_1 + 2H_2 + 2H_3, & 2H_1 + 2H_2 + 6H_3 \end{bmatrix} \quad \dots\dots (B-23)$$

$$(\underline{A} c)^i = \int_{A_i} \phi^T \phi q_{z,x} \phi_{,z} dA c$$

$$= \frac{A_i}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{x_1}^i \\ q_{x_2}^i \\ q_{x_3}^i \end{bmatrix} \frac{1}{2A_i} b c$$

$$+ \frac{A_i}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{y_1}^i \\ q_{y_2}^i \\ q_{y_3}^i \end{bmatrix} \frac{1}{2A_i} a c$$

$$= \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{x_1}^i \\ q_{x_2}^i \\ q_{x_3}^i \end{bmatrix} (b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3)$$

$$+ \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{y_1}^i \\ q_{y_2}^i \\ q_{y_3}^i \end{bmatrix} (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3)$$

..... (B-24)

$$\begin{aligned} -(\underline{K} c)^i &= \int_{A_i} \phi_{,z}^T (E_{zz} \phi_{H(2)} \phi_{,z} + E_{zy} \phi_{H(2)} \phi_{,y}) dA c \\ &+ \int_{A_i} \phi_{,y}^T (E_{zy} \phi_{H(2)} \phi_{,z} \\ &+ E_{yy} \phi_{H(2)} \phi_{,y}) dA c \end{aligned}$$

$$= \frac{E_{zz}}{12A_i} \begin{bmatrix} b_1 (H_1 + H_2 + H_3) \\ b_2 (H_1 + H_2 + H_3) \\ b_3 (H_1 + H_2 + H_3) \end{bmatrix} (b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3)$$

$$+ \frac{E_{zy}}{12A_i} \begin{bmatrix} b_1 (H_1 + H_2 + H_3) \\ b_2 (H_1 + H_2 + H_3) \\ b_3 (H_1 + H_2 + H_3) \end{bmatrix} (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3)$$

$$+ \frac{E_{yy}}{12A_i} \begin{bmatrix} a_1 (H_1 + H_2 + H_3) \\ a_2 (H_1 + H_2 + H_3) \\ a_3 (H_1 + H_2 + H_3) \end{bmatrix} (b_1 c_2 + b_2 c_2 + b_3 c_3)$$

$$+ \frac{E_{yy}}{12A_i} \begin{bmatrix} a_1 (H_1 + H_2 + H_3) \\ a_2 (H_1 + H_2 + H_3) \\ a_3 (H_1 + H_2 + H_3) \end{bmatrix} (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3)$$

..... (B-25)

$$-\underline{D}^i = k \bar{H}^i \int \phi^T \phi dA = \frac{A_i}{12} k \bar{H}^i \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

..... (B-26)

$$\underline{E}_{(1)} = \frac{1}{2} \int_{A_i} \phi^T w \phi dA - \alpha \int_{A_i} \phi^T \phi dA$$

$$= \frac{A_i}{120} \begin{bmatrix} 6w_1 + 2w_2 + 2w_3 & 2w_1 + 2w_2 + w_3 \\ 2w_1 + 2w_2 + w_3 & 2w_1 + 6w_2 + 2w_3 \\ 2w_1 + w_2 + 2w_3 & w_1 + 2w_2 + 2w_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2w_1 + w_2 + 2w_3 \\ w_1 + 2w_2 + 2w_3 \\ 2w_1 + 2w_2 + 6w_3 \end{bmatrix} - \frac{A_i}{12} \alpha \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

..... (B-27)

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_{(2)} &= -\frac{1}{2} \int \tilde{\phi}^T \tilde{\phi} \tilde{w} \tilde{\phi} dA - \alpha \int \tilde{\phi}^T \tilde{\phi} dA \\
&= -\frac{A_i}{120} \begin{bmatrix} 6w_1 + 2w_2 + 2w_3 & 2w_1 + 2w_2 + w_3 \\ 2w_1 + 2w_2 + w_3 & 2w_1 + 6w_2 + 2w_3 \\ 2w_1 + w_2 + 2w_3 & w_1 + 2w_2 + 2w_3 \end{bmatrix} \\
&\quad \begin{bmatrix} 2w_1 + w_2 + 2w_3 \\ w_1 + 2w_2 + 2w_3 \\ 2w_1 + 2w_2 + 6w_3 \end{bmatrix} - \frac{A_i}{12} \alpha \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\
&\quad \dots\dots\dots (B-28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{E}^* &= -w_s \int_{A_i} \tilde{\phi}^T \tilde{\phi} dA \frac{c_{(1)} + c_2}{2} \\
&= -w_s \frac{A_i}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (c_{(1)} + c_{(2)})_1 \\ (c_{(1)} + c_{(2)})_2 \\ (c_{(1)} + c_{(2)})_3 \end{bmatrix} \\
&\quad \dots\dots\dots (B-29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{S}^i &= \int_{A_i} \tilde{\phi}^T \tilde{\phi} \tilde{Q}_I \tilde{\phi} dA c \\
&= \frac{A_i}{60} \begin{bmatrix} 6Q_{I_1} + 2Q_{I_2} + 2Q_{I_3} & 2Q_{I_1} + 2Q_{I_2} + Q_{I_3} \\ 2Q_{I_1} + 2Q_{I_2} + Q_{I_3} & 2Q_{I_1} + 6Q_{I_2} + 2Q_{I_3} \\ 2Q_{I_1} + Q_{I_2} + 2Q_{I_3} & Q_{I_1} + 2Q_{I_2} + 2Q_{I_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \\
&\quad \dots\dots\dots (B-30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{F}^{bi} &= \int_{S_q} \tilde{\phi}^{iT} \tilde{\phi}^b dS \tilde{Q}_n^{be} \\
&= \frac{l_i}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tilde{Q}_n^{be} \quad \dots\dots\dots (B-31)
\end{aligned}$$

である。ここに、 $l_i$  は三角形の辺の長さである。

港湾技研資料 No. 495

1984・9

編集兼発行人 運輸省港湾技術研究所

発行所 運輸省港湾技術研究所  
横須賀市長瀬3丁目1番1号

印刷所 株式会社 東京プリント

Published by the Port and Harbour Research Institute  
Nagase, Yokosuka, Japan.