

港 湾 技 研 資 料

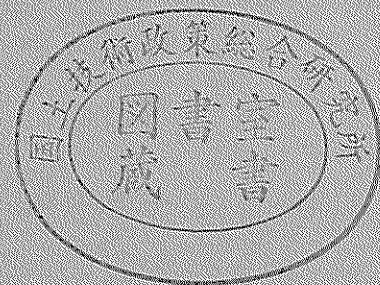
TECHNICAL NOTE OF
THE PORT AND HARBOUR RESEARCH INSTITUTE
MINISTRY OF TRANSPORT, JAPAN

No. 404 Dec. 1981

有限要素法による潮汐流の数値計算

村 上 和 男

運輸省港湾技術研究所



目 次

| | |
|-------------------------------|----|
| 要 旨 | 3 |
| 1. ま え が き | 3 |
| 2. 潮流の基本方程式 | 4 |
| 2.1 潮流の基礎方程式 | 4 |
| 2.2 境界条件 | 8 |
| 3. ガラーキン法による定式化 | 9 |
| 4. 有限要素法 | 10 |
| 5. 逐次時間積分法と計算のフローチャート | 13 |
| 5.1 逐次時間積分法とリナンバリング | 13 |
| 5.2 計算のフローチャート | 14 |
| 6. 潮汐流の計算例 | 15 |
| 6.1 く(矩)形湾における長波の計算 | 15 |
| 6.2 東京湾における潮流計算 | 22 |
| 7. 潮流計算における差分法と有限要素法の比較 | 40 |
| 8. ま と め | 47 |
| 参 考 文 献 | 48 |
| 付 録 | 49 |

Numerical Simulations on Tidal Currents by means of Finite Element Method

Kazuo MURAKAMI*

Synopsis

This paper describes the numerical simulations of tidal current using Finite Element Method. In this paper, rectangular basin and Tokyo Bay are simulated in order to investigate the characteristics of the finite element technique, and to examine the influence of some parameters such as bottom friction, horizontal eddy viscosity, etc. on tidal current.

The comparison of Finite Element and Finite Difference techniques is carried out in case of Tokyo Bay. Both results agree well with the tidal current field survey data in Tokyo Bay.

If numbers of finite elements (or grids) in each technique are almost same, Finite Difference Method is cheaper and more stable than Finite Element Method. However, Finite Element Method has a great advantage of that the method has a flexibility to express the configuration. That is, the boundary configuration of finite element model is more accurate, and an interested area of the computation by the method can be divided to any small elements arbitrary. In this way, the computational cost of Finite Element Method becomes equivalent to the cost of Finite Difference Method.

* Chief of Marine Diffusion Laboratory, Marine Hydrodynamics Division

有限要素法による潮汐流の数値計算

村上 和 男*

要 旨

有限要素法を用いて潮汐流の計算を実施した。ここでは、簡単な地形のく(矩)形湾と実海域の東京湾とを例に取り上げ、有限要素法のもつ特性、および数値モデルの持つ各種パラメータの計算結果に及ぼす影響等について考察した。さらに、東京湾については差分法(ここではADI法)による計算も実施し、有限要素法と差分法との比較検討を行った。

計算結果は、どちらの手法においてもおおむね現地観測結果を良く表現しているものと思われる。同程度の要素数(格子数)の計算では、差分法の方が計算時間が短かくてすみ、かつ安定である。しかしながら、有限要素法の方が地形表現において、より便利でかつ正確である。このことは、有限要素法においては、ある領域についてのみ要素を細かく分割することが可能であり、詳細な計算をする際に計算時間においても差分法と対抗できることを示している。

1. まえがき

有限要素法(Finite Element Method)による流体解析が、最近、急速に発展している。もともと、有限要素法は構造解析を中心に発展してきた数値計算法であって、ある系の有するポテンシャルエネルギー最小の原理が、この解析法の根本となっている。鷺津¹⁾によれば、有限要素法の最初は、Turner et al.による飛行機の翼の剛性計算の解析法に関してJournal of Aeronautical Scienceに発表された1956年の論文²⁾であるとされている。

流体解析に関して有限要素法が用いられるようになったのは、1960年代後半から1970年代の初頭にかけてである。1970年代において、有限要素法を流体力学に应用する努力は目覚ましく、国際会議もOden, Zienkiewicz, Gallagher, Taylorらが中心となった“有限要素法の流体力学への応用(Finite Element Methods in Flow Problems)”，およびBrebber, Gray, Pinderらが中心となった“水資源問題に関する有限要素法の応用(Finite Elements in Water Resources)”と題する会議が開催されている。

流体解析、例えば長波、潮流、高潮、津波計算のような場合、あるいは拡散問題などについて古くから差分法による計算がよく用いられてきた。差分法は、基礎とな

る微分方程式を有限な差分式に直して解く近似解法であり、潮流計算においてはLeendertse, J.J.³⁾によって開発されたADI法(Alternating Direction Implicit Method)が最も一般に用いられている。筆者らもこのADI法を用いて、潮流および物質拡散の計算⁴⁾を実行してきた。

差分法による地形表現が一般的に正方形格子であるために、斜めの地形に対して階段状の表現になり、不自然な形となる。また、埋立地の流れに及ぼす影響を調べる場合に、正方格子の場合には、対象領域のみを細かく分割することはできないことに加え、正確な地形表現も無理である。大メッシュと小メッシュの計算を連結して計算する例⁵⁾もあるが、その境界では流速及び水位の接続が若干の不連続となっている。また、最近では、堀口ら⁶⁾による不等長格子網による計算が実施されているが、これとても地形表現の単位は長方形、あるいは正方形であり、問題点は依然として残る。

有限要素法による地形表現は、任意の三角形要素あるいは四角形要素によるもので、差分法に比べて、かなり忠実にできる。また、要素の大きさも、興味を中心付近では細かく、その他では粗く分割することが可能であり、それらを不連続なく接続が可能であるので、精度の良い

* 海洋水理部海水汚染水理研究室長

計算結果を得ることができるのみならず計算時間の短縮を図ることも可能である。このような観点から、有限要素法の潮流計算への応用が Wang & Connor⁷⁾、あるいは川原ら⁸⁾によって進められてきた。潮流解析においては、一般に重み付き残差法の一つであるガラーキン法による有限要素近似が用いられている。これは、微分方程式から変分法に直す過程において、試験関数を重み関数として荷重平均したもので、詳しくは後で述べる。

埋立、あるいは港湾構造物の建設などに伴う流れの変化、物質拡散、高潮、津波などへの影響を調べる場合に、比較的細かい形で、正確な地形表現が要求される。このような要求を満たす方法としての有限要素法をここでとりあげ、潮流計算を実施し、この方法の持つ特徴についての検討を行った。また、差分法との比較として、筆者が以前から用いていた ADI 法による潮流計算を実施し、両者のモデルの持つ特性について考察を行った。なお、ここで用いたモデルは、有限要素法については Wang & Connor⁷⁾、ADI法については金子ら⁴⁾の方法によっている。

本論文の構成は、1. にまえがき、2. に潮流の基礎方程式、3. ガラーキン法による定式化、4. に有限要素法、5. に逐次時間積分、6. に潮汐流の計算例、7. に差分法 (ADI法) との比較、8. にまとめとなっている。なお、巻末の付録には有限要素法の基礎となるべき事項、および計算結果のベクトル図を示す。

2. 潮流の基本方程式

2.1 潮流の基礎方程式⁷⁾

潮流を表す基礎方程式は質量保存の法則を表す連続の式と、Newton の第二法則より得られる水平および鉛直方向の運動方程式とにより構成される。いま直交座標系を図-1のように設定する。 x 軸および y 軸は平均海面上に、 z 軸は鉛直上方にとるものとする。

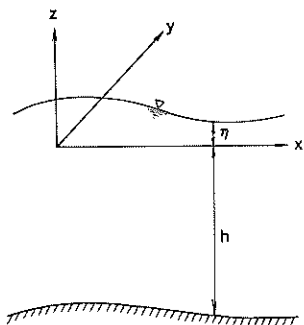


図-1 座標系

ここで、図-2に示すような微小六面体 ($\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$) を考える。この六面体に入出入りする物質の保存則より連続の式は

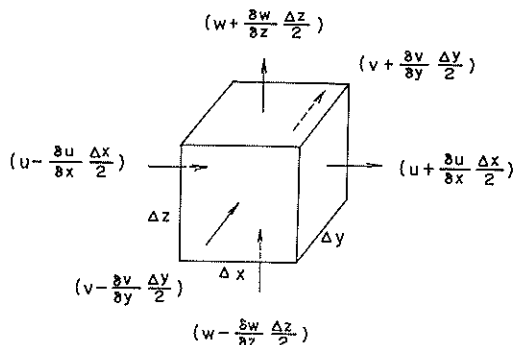


図-2 微小六面体

$$\rho_{,t} + (\rho u)_{,x} + (\rho v)_{,y} + (\rho w)_{,z} = e \quad (2.1)$$

と表すことができる。ここにおいて、

x, y, z : 直交座標系

u, v, w : それぞれ x, y, z 方向の流速

ρ : 流体の密度

e : 単位容積あたりの質量の変化率

を表す。式 (2.1) 中のサフィックスのカンマ印は偏微分であることを示す。したがって、たとえば

$$F_{,x} = \frac{\partial F}{\partial x} \quad (2.2)$$

となる。また右辺の e は内部流入 (source)、内部流出 (sink) がなければゼロとなる。

次に、微小六面体に作用する力の釣り合いから、3成分の運動方程式は次のように表せる。

x 成分

$$\begin{aligned} & (\rho u)_{,t} + (\rho u^2)_{,x} + (\rho uv)_{,y} + (\rho uw)_{,z} - \rho f_v \\ & = -P_{,x} + \tau_{xx,x} + \tau_{yx,y} + \tau_{zx,z} + \rho m_x \end{aligned} \quad (2.3)$$

y 成分

$$\begin{aligned} & (\rho v)_{,t} + (\rho uv)_{,x} + (\rho v^2)_{,y} + (\rho vw)_{,z} + \rho f_u \\ & = -P_{,y} + \tau_{xy,x} + \tau_{yy,y} + \tau_{zy,z} + \rho m_y \end{aligned} \quad (2.4)$$

z成分

$$\begin{aligned} & (\rho w)_{,t} + (\rho u w)_{,x} + (\rho v w)_{,y} + (\rho w^2)_{,z} \\ & + 2\rho w_x v - 2\rho w_y u \\ & = -P_{,z} - \rho g + \tau_{xz,z} + \tau_{yz,y} + \tau_{zz,z} \end{aligned} \quad (2.5)$$

となる。ここにおいて

- P : 圧力
- g : 重力加速度
- $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yy}, \tau_{yz}, \tau_{zz}$: 内部せん断力
- m_x, m_y : 流入・流出 (e) にともなう力
- f : コリオリ係数 ($=2\omega \sin \phi$)
- ω_x, ω_y : 地球自転にともなう力

である。内部せん断力 τ_{ij} は、粘性せん断力と乱流レイノルズ応力の合力として表される。

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}^v - \rho \langle u_i' u_j' \rangle \quad (2.6)$$

$i, j = x, y, z$

ここにおいて

- τ_{ij}^v : 粘性せん断力
- u_i' : 流れの乱れ成分
- $\langle \rangle$: 時間平均操作

を表わす。

エスチャリーあるいは湾などの沿岸海域を考えた場合には、鉛直方向のスケールに比べて水平スケールが大きい。したがって、鉛直流速あるいは水深変化の項などは小さいと考えられる。いま、例として典型的な内湾の大きさの尺度を次のように考える。

$$\begin{aligned} O(u) &= 50 \text{ cm/s} \quad (1 \text{ knot}) \\ O(w) &= 0.5 \text{ cm/s} \\ O(l) &= 10^4 \text{ m} \quad (10 \text{ km}) \\ O(h) &= 10^2 \text{ m} \quad (100 \text{ m}) \\ O(t) &= 2 \times 10^4 \text{ s} \quad (\text{約 } 6 \text{ 時間}) \\ O(f) &= 10^{-4} / \text{s} \end{aligned}$$

これらから、式(2.3)の左辺の各項のオーダーを考えると、

$$\begin{aligned} \frac{O(u)}{O(t)} &= \frac{0.5 \text{ (m/s)}}{2 \times 10^4 \text{ (s)}} = 2.5 \times 10^{-5} \text{ (m/s}^2\text{)} \\ \frac{O(u^2)}{O(l)} &= \frac{(0.5)^2 \text{ (m}^2\text{/s}^2\text{)}}{10^4 \text{ (m)}} = 2.5 \times 10^{-5} \text{ (m/s}^2\text{)} \\ \frac{O(uw)}{O(h)} &= \frac{0.5 \times 0.005 \text{ (m}^2\text{/s}^2\text{)}}{100 \text{ (m)}} = 2.5 \times 10^{-5} \text{ (m/s}^2\text{)} \end{aligned}$$

$$O(fv) = 10^{-4} \times 0.5 \text{ (m/s}^2\text{)} = 5 \times 10^{-5} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

となる。したがって、水平方向の運動方程式においては、だいたいにおいて各項とも同じオーダーの値となる。

しかしながら、鉛直方向の運動方程式(2.6)においては、重力加速度 g (9.8 m/s^2) の項が他の項(たとえば $O(w_{,t}) = 2.5 \times 10^{-7} \text{ m/s}^2$) に比べて圧倒的に大きいために、静水圧分布

$$P_{,z} = -\rho g \quad (2.7)$$

がよく用いられる。

潮汐流のように水平運動が鉛直運動に比べて卓越している場合には、基礎方程式を鉛直方向に積分し、二次元的な流れとして取扱われることが多い。このことは、流速などの水理要素として水深方向の平均値を用いることに相当している。

式(2.1)を水深方向に積分すると次のようになる。

$$\begin{aligned} & \int_{-h}^{\eta} \rho_{,t} dz + \int_{-h}^{\eta} (\rho u)_{,x} dz + \int_{-h}^{\eta} (\rho v)_{,y} dz \\ & + \int_{-h}^{\eta} (\rho w)_{,z} dz = \int_{-h}^{\eta} e dz \end{aligned} \quad (2.8)$$

この式において、ライプニッツの法則を用いて積分と微分の順序を変換する。すなわち、積分の上下限が変数の場合には

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \int_A^B f(x,t) dt = \int_A^B \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dt \\ & + f(x,B) \frac{\partial B}{\partial x} - f(x,A) \frac{\partial A}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.9)$$

のように表現される。したがって、式(2.8)は次式となる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} \rho dz - \rho \Big|_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} \rho u dz - \rho u \Big|_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ & + \rho u \Big|_{-h} \frac{\partial(-h)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} \rho v dz - \rho v \Big|_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ & + \rho v \Big|_{-h} \frac{\partial(-h)}{\partial y} + \rho w \Big|_{\eta} - \rho w \Big|_{-h} = \int_{-h}^{\eta} e dz \quad (2.10) \end{aligned}$$

となる。

自由表面においては力学的条件として

$$\left[\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} - w \right]_{z=\eta} = 0 \quad (2.11)$$

が成立する。また、海底面においても同様に

$$\left[u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + w \right]_{z=-h} = 0 \quad (2.12)$$

が成立する。これらの式を式(2.10)に代入すると

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} \rho dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} \rho u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} \rho v dz = \int_{-h}^{\eta} e dz \quad (2.13)$$

となる。ここで、 H, q_x, q_y, q_t を次のように定義する。

$$H = \int_{-h}^{\eta} dz \quad (2.14)$$

$$q_x = \int_{-h}^{\eta} u dz \quad (2.15)$$

$$q_y = \int_{-h}^{\eta} v dz \quad (2.16)$$

$$q_t = \int_{-h}^{\eta} e dz \quad (2.17)$$

これらを用いて式(2.13)を書き直すと

$$(\rho H)_{,t} + (\rho q_x)_{,x} + (\rho q_y)_{,y} = \rho q_t \quad (2.18)$$

となる。

同様に、運動方程式(2.3), (2.4)についても水深方向に積分する。

$$\begin{aligned} & \int_{-h}^{\eta} (\rho u)_{,t} dz + \int_{-h}^{\eta} (\rho u^2)_{,x} dz + \int_{-h}^{\eta} (\rho uv)_{,y} dz \\ & + \int_{-h}^{\eta} (\rho uw)_{,z} dz - \int_{-h}^{\eta} \rho f v dz + \int_{-h}^{\eta} P_{,x} dz \\ & - \int_{-h}^{\eta} (\tau_{xx,x} + \tau_{yx,y}) dz - \int_{-h}^{\eta} \tau_{xz,z} dz \\ & - \int_{-h}^{\eta} \rho m_x dz = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

積分と微分の順序を変換すると、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} (\rho u) dz - \rho u \Big|_{-h}^{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} (\rho u^2) dz \\ & - \rho u^2 \Big|_{-h}^{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + (\rho u^2) \Big|_{-h}^{\eta} \frac{\partial(-h)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} (\rho uv) dz \\ & - (\rho uv) \Big|_{-h}^{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + (\rho uv) \Big|_{-h}^{\eta} \frac{\partial(-h)}{\partial y} + (\rho vw) \Big|_{-h}^{\eta} \\ & - (\rho uw) \Big|_{-h}^{\eta} - \rho f q_y + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} P dz - P \Big|_{-h}^{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ & + P \Big|_{-h}^{\eta} \frac{\partial(-h)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} \tau_{xx} dz + \tau_{xx} \Big|_{-h}^{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ & - \tau_{xx} \Big|_{-h}^{\eta} \frac{\partial(-h)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} \tau_{yx} dz + \tau_{yx} \Big|_{-h}^{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ & - \tau_{yx} \Big|_{-h}^{\eta} \frac{\partial(-h)}{\partial y} - (\tau_{xz}) \Big|_{-h}^{\eta} + (\tau_{xz}) \Big|_{-h}^{\eta} \int_{-h}^{\eta} \rho m_x dz \\ & = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

となる。

ここにおいて、表面におけるせん断応力は

$$\begin{aligned} (\tau_x^s + P^s \eta_{,x})_{z=\eta} &= [P \eta_{,x} - \tau_{xx} \eta_{,x} - \tau_{yx} \eta_{,y} \\ & - \tau_{zx}]_{z=\eta} \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} (\tau_y^s + P^s \eta_{,y})_{z=\eta} &= [P \eta_{,y} - \tau_{xy} \eta_{,x} - \tau_{yy} \eta_{,y} \\ & - \tau_{zy}]_{z=\eta} \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} -P^s - \tau_x^s \eta_{,x} + \tau_y^s \eta_{,y} &= [-P - \tau_{xz} \eta_{,x} - \tau_{yz} \eta_{,y} \\ & + \tau_{zz}]_{z=\eta} \end{aligned} \quad (2.23)$$

と表すことができる。この関係を図-3に示す。

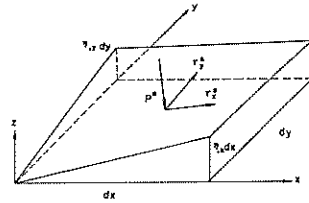


図-3 表面における応力

また同様に、海底面におけるせん断力は

$$\tau_x^b - P^b h_{,x} = [- (P - \tau_{xx}) h_{,x} + \tau_{yx} h_{,y} + \tau_{zx}]_{z=-h} \quad (2.24)$$

$$\tau_y^b - P^b h_{,y} = [- \tau_{xy} h_{,x} - (P - \tau_{yy}) h_{,y} + \tau_{zy}]_{z=-h} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} -P^b - \tau_x^b h_{,x} - \tau_y^b h_{,y} &= [-P + \tau_{xz} h_{,x} + \tau_{yz} h_{,y} \\ & + \tau_{zz}]_{z=-h} \end{aligned} \quad (2.26)$$

となる。

ここで、 $F_{xx}', F_{yx}', \bar{m}_x$ を次のように定義する。

$$\rho F_{xx}' = \int_{-h}^{\eta} \tau_{xx} dz \quad (2.27)$$

$$\rho F_{yx}' = \int_{-h}^{\eta} \tau_{yx} dz \quad (2.28)$$

$$\bar{m}_x = \int_{-h}^{\eta} m_x dz \quad (2.29)$$

したがって、式(2.20)は次のように書き直される。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\rho q_x) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} (\rho u^2) dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} (\rho uv) \\ & - \rho f q_y + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} P dz - \frac{\partial}{\partial x} (\rho F_{xx}') - \frac{\partial}{\partial y} (\rho F_{yx}') \end{aligned}$$

$$-\tau_x^s + \tau_x^b - \rho \bar{m}_x - P^s \frac{\partial H}{\partial x} - P^b \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

(2.30)

ここにおいて、サフィックス S は自由表面を、また b は海底面を表す。したがって、式(2.30)に示す τ_x^s 、 τ_x^b は

τ_x^s : 風による接線せん断力

τ_x^b : 海底摩擦せん断力

を表す。

次に、密度の場所的・時間的変化は小さいものと仮定すると、ブーンネスク近似より、すべての項の密度 ρ は一定値 ρ_0 によって置き換えることができる。したがって、圧力項は次のように表される。

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{\eta} P dz &= P^s H + \frac{1}{2} \rho_0 g (\eta + h)^2 \\ &= P^s H + \frac{1}{2} \rho_0 g h^2 + \rho_0 g \eta h + \frac{1}{2} \rho_0 g \eta^2 \\ &= \frac{1}{2} \rho_0 g h^2 + \rho_0 F_p \end{aligned} \quad (2.31)$$

これを式(2.30)に代入し、さらに全体を ρ_0 で割ると、 x 方向の運動方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (q_x) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} uv dz - f q_y \\ + \frac{\partial}{\partial x} (F_p - F_{xx}') - \frac{\partial}{\partial y} (F_{yx}') + \frac{\tau_x^s - \tau_x^b}{\rho_0} - \bar{m}_x \\ - \frac{P^s}{\rho_0} \frac{\partial H}{\partial x} - g \eta \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

y 方向の運動方程式についても同様に次のように書ける。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (q_y) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} uv dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} v^2 dz + f q_x \\ - \frac{\partial}{\partial x} (F_{xy}') + \frac{\partial}{\partial y} (F_{yy}') + \frac{\tau_y^s - \tau_y^b}{\rho_0} - \bar{m}_y \\ - \frac{P^s}{\rho_0} \frac{\partial H}{\partial y} - g \eta \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

ここにおいて、

$$\rho F_{xy}' = \rho F_{yx}' = \int_{-h}^{\eta} \tau_{yx} dz \quad (2.34)$$

$$\rho F_{yy}' = \int_{-h}^{\eta} \tau_{yy} dz \quad (2.35)$$

$$\bar{m}_y = \int_{-h}^{\eta} m_y dz \quad (2.36)$$

である。式(2.18)、式(2.30)および式(2.33)を前の記述法に従って表すと、

$$H_{,t} + q_{x,x} + q_{y,y} = q_t \quad (2.37)$$

$$q_{x,t} + (\bar{u} q_x)_{,x} + (\bar{v} q_y)_{,y} - f q_y + (F_p - F_{xx})_{,x}$$

$$- F_{yx,y} + \frac{1}{\rho_0} (\tau_x^s - \tau_x^b) - \bar{m}_x - \frac{1}{\rho_0} P^s H_{,x} - g \eta h_{,x}$$

$$= 0 \quad (2.38)$$

および

$$q_{y,t} + (\bar{v} q_x)_{,x} + (\bar{v} q_y)_{,y} + f q_x - F_{xy,x} + (F_p - F_{yy})_{,y}$$

$$+ \frac{1}{\rho_0} (\tau_y^s - \tau_y^b) - \bar{m}_y - \frac{1}{\rho_0} P^s H_{,y} - g \eta h_{,y} = 0$$

(2.39)

となる。

式(2.38)、式(2.39)の中に含まれる海底摩擦および表面の風による接線応力は、経験的に次のように表現される。

まず、海底面における接線応力は、流速の関数として次式となる。

$$\tau_x^b = C_f \rho (q_x^2 + q_y^2)^{1/2} \frac{q_x}{H^2} \quad (2.40)$$

$$\tau_y^b = C_f \rho (q_x^2 + q_y^2)^{1/2} \frac{q_y}{H^2} \quad (2.41)$$

ここで、 C_f は摩擦係数であり、次のように与えられる。

$$C_f = \frac{1}{8} f_{DW} \quad (\text{Darcy-Weisbach}) \quad (2.42)$$

$$C_f = g/C^2 \quad (\text{Chezy}) \quad (2.43)$$

$$C_f = \frac{n^2 g}{H^{1/3}} \quad (\text{Manning}) \quad (2.44)$$

海域においては一般に乱流状態であるので、マニングによる公式(2.44)を用いると、水深 $H=20\text{m}$ 、 $n=0.025$ において、 $C_f=0.0023$ となる。この値は式(2.44)からもわかるように、水深 H の $-1/3$ 乗であるので、水深の深い所では小さくなる。

次に、風による表面での接線応力について述べる。海上 10m の高度での風速を W とした時、水表面に生じる接線応力は、一般に次のように与えられる。

$$\tau_x^s = \rho_{air} C_D \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \cdot W_x \quad (2.45)$$

$$\tau_y^s = \rho_{air} C_D \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \cdot W_y \quad (2.46)$$

ここに、 C_D は風における抵抗係数で、一般に 0.0026 が用いられる。しかし、この値は風速によっても異なる値で、Wang & Connor⁷⁾ は図-4のように整理している。

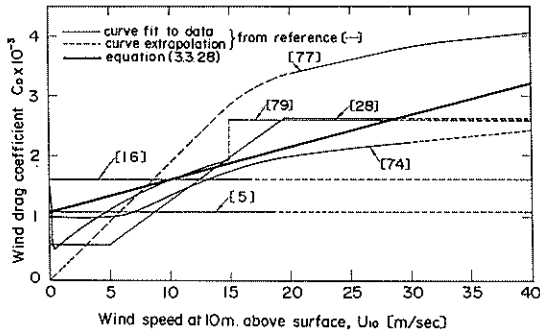


図-4 風の抗力係数(式番号, 参考文献は原論文)⁷⁾

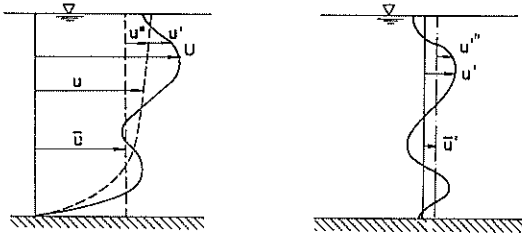


図-5 流速の乱れ成分

また、内部応力としての F_{xx}' , F_{xy}' , F_{yy}' は、流れの乱れ成分の平均化作用によって派生する項で、次のように考えることができる。いま、図-5のように流速成分を考えると、瞬間的な流速値は次式となる。

$$\begin{aligned} U &= u + u' = \bar{u} + \bar{u}' + u'' + u'' \\ V &= v + v' = \bar{v} + \bar{v}' + v'' + v'' \end{aligned} \quad (2.47)$$

ここにおいて

- U, V : 流速の瞬間値
- u, v : 流速の時間平均値
- \bar{u}, \bar{v} : 流速の断面平均値
- u', v' : 流速の流れ成分 ($u' = U - u$)
- u'', v'' : 流速の断面平均からの偏差 ($u'' = u - \bar{u}$)
- \bar{u}', \bar{v}' : 乱れ成分の断面平均
- u''', v''' : 乱れ成分の鉛直方向の偏差 ($u''' = u' - \bar{u}'$)

である。

運動方程式を統計的な平均値を用いて表現する場合に、これらの乱れ成分は見掛けの粘性応力として働く。いま、流速 U, V の積を時間的および空間的にした場合に次のように表される。

$$\begin{aligned} U \cdot V &= (\bar{u} + \bar{u}' + u'' + u''') (\bar{v} + \bar{v}' + v'' + v''') \\ &= \bar{u} \bar{v} + \bar{u} \bar{v}' + \bar{u} v'' + \bar{u} v'' + \bar{u}' \bar{v} + \bar{u}' \bar{v}' + \bar{u}' v'' \\ &\quad + \bar{u}' v'' + u'' \bar{v} + u'' \bar{v}' + u'' v'' + u'' v'' + u'' v'' \\ &\quad + u'' \bar{v}' + u'' v'' + u'' v'' \end{aligned} \quad (2.48)$$

これを、時間的および空間的に平均操作をほどこすと

$$\langle UV \rangle = \bar{u} \bar{v} + \bar{u}' \bar{v}' + \overline{u'' v''} + \overline{u''' v'''} \quad (2.49)$$

となる。したがって、運動方程式中の慣性項は

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{\eta} \langle UV \rangle dz &= \frac{q_x q_y}{H} + \int_{-h}^{\eta} (\langle u' v' + u'' v'' \rangle \\ &\quad + u''' v''') dz \end{aligned} \quad (2.50)$$

と表わされる。右辺第2項の積分によって示されている項が、レイノルズ応力、あるいは水平混合項と呼ばれるものである。これによって、式(2.27), (2.28), (2.34), (2.35)に示される F_{ij} は、式(2.50)を用いて、

$$\begin{aligned} F_{ij} &= \int_{-h}^{\eta} \{ \tau_{ij}'' / \rho_0 - \langle u'_i u'_j \rangle + \langle u''_i u''_j \rangle \\ &\quad - u'''_i u'''_j \} dz \quad i, j = x, y \end{aligned} \quad (2.51)$$

と表せる。これを、運動量輸送理論と同様な記法で、

$$F_{ij} = E_{ij} \left(\frac{\partial q_j}{\partial x_i} + \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \right) \quad i, j = x, y \quad (2.52)$$

と表す。ここにおいて、 E_{ij} は水平混合に関する係数マトリックスである。水平混合係数については、まだ不明確な点が多く⁹⁾、その値も定かではない。しかしながら、一般には水平渦動粘性係数は次式で与えられるといわれている。

$$E_{xx} = E_{yy} = \alpha l^{4/3} \quad (2.53)$$

ここに、

α : 係数 (0.02~0.05)

l : 渦の規模

である。ここで、 l の値は長さの次元をもつ変数であって、潮流計算のような数値計算においては、格子の長さを代表長さとしてすることが多い。

2.2 境界条件

前節で述べた方程式(2.37)~(2.39)を数值的に解く際に、必要な境界条件を設定しなければならない。いま、対象領域として図-6に示すような沿岸域を模式的に考える。図中の S_p は圧力、すなわち水位を与える境界であり、 S_q は流量を与える境界である。境界上

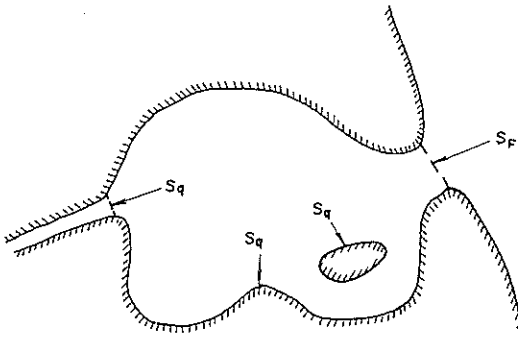


図-6 境界条件

S_q において,

$$q_n = \alpha_{nx} q_x + \alpha_{ny} q_y = q_n^* \quad (2.54)$$

$$q_s = -\alpha_{nx} q_x + \alpha_{ny} q_y = q_s^* \quad (2.55)$$

である。ここにおいて,

q_n : 境界に垂直方向の流量

q_s : 境界に接線方向の流量

を表す。また, α_{nx}, α_{ny} はそれぞれの方向余弦で,

$$\alpha_{nx} = \cos(n, x), \alpha_{ny} = \cos(n, y) \quad (2.56)$$

で表される。式(2.54), (2.55)の*印は既知の与えられた値であることを示す。一般に, 陸岸境界においては, 境界を横切る流束はないとされ, また河川がある場合には, その点に流量が設定される。

外洋に面した開境界においては境界条件として圧力を次のように与える。

$$\begin{aligned} F_{nn} &= -F_p + \alpha_{nx}^2 F_{xx} + \alpha_{ny}^2 F_{yy} + 2\alpha_{nx}\alpha_{ny} F_{xy} \\ &= F_{nn}^* \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} F_{ns} &= (\alpha_{nx}^2 - \alpha_{ny}^2) F_{xy} + \alpha_{nx}\alpha_{ny} (F_{yy} - F_{xx}) \\ &= F_{ns}^* \end{aligned} \quad (2.58)$$

一般に接線方向の力は無視されることが多い。したがって, $F_{ns}^* = 0$ として処理される。また, F_{nn}^* についても開境界における流速分布を正確に知ることは至難のことであるので, 一般には圧力境界としては水位によるものが用いられる。

3. ガラーキン法による定式化

潮汐流の問題を有限要素法で解くために, 連続の式(2.37)および運動方程式(2.38), (2.39)を境界条件式(2.54)~(2.58)を用いてガラーキン近似による有限要素定式化を行う。

ガラーキン(Galerkin)法とは, 重み付き残差法¹¹⁾のひとつであって重み関数として試験関数を用いて重み付き平均を行うものである。

連続の式に対する重み関数を ΔH , 運動方程式に対する重み関数を $\Delta q_x, \Delta q_y$ とすると, これらの方程式は次のように書き表される。

$$\int_{\Omega} \{ H_{,t} + q_{x,x} + q_{y,y} - q_t \} \Delta H \, dA = 0 \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \{ q_{x,t} + (\bar{u} q_x)_{,x} + (\bar{v} q_y)_{,y} - f q_y + (F_p - F_{xx})_{,x} \\ - F_{yx,y} + \frac{1}{\rho_0} (\tau_x^s - \tau_x^b) - \bar{m}_x - \frac{1}{\rho_0} P^s H_{,x} \\ - q \eta h_{,x} \} \Delta q_x \, dA = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \{ q_{y,t} + (\bar{v} q_x)_{,x} + (\bar{v} q_y)_{,y} + f q_x - F_{xy,x} \\ + (F_p - F_{yy})_{,y} + \frac{1}{\rho_0} (\tau_y^s - \tau_y^b) - \bar{m}_y - \frac{1}{\rho_0} P^s H_{,y} \\ - g \eta h_{,y} \} \Delta q_y \, dA = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

ここで弱形式化¹⁰⁾(Weak Form)を行う。弱形式化とは, 境界条件を部分的に満足するだけでよく, かつ連続条件を緩和した基準関数を用いての重み付き残差法の定式化である。したがって, 重み付き残差法の誤差の測度として本来は

$$\text{誤差の測度} = \langle \varepsilon, w \rangle = \int_{\Omega} \{ L(u) - p \} w \, dv \quad (3.4)$$

であるが, 弱形式化することにより誤差の測度に境界条件の項が加えられる。いま, 自然境界条件として

$$\frac{dy}{dx} = f \quad \text{at } x=0 \quad (3.5)$$

とすると, 誤差の測度は

$$\langle \varepsilon, w \rangle = \int_{\Omega} \{ L(u) - P \} w \, dv + \left(f - \frac{du}{dx} \right) w \Big|_{x=1} \quad (3.6)$$

と表せる。これは, 重み付き残差の見積りに境界条件での誤差をも含んで見積ることを意味している。したがって, 得られる解は基本境界条件は満足するが, 自然境界条件は必ずしも満足するとは限らない。こうすることによって, 基本方程式の微係数の次数を下げることで

きる。

この弱形式化を式(3.2)および式(3.3)に適用する。すなわち、 x 方向の運動方程式は

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \{ q_{x,t} + (\bar{u} q_x)_{,x} + (\bar{v} q_y)_{,y} - f q_y \\ & + \frac{1}{\rho_0} (\tau_x^s - \tau_x^b) - \bar{m}_x - \frac{1}{\rho_0} P^s H_{,x} - g \eta h_{,x} \\ & + (F_p - F_{xx})_{,x} - F_{yx,y} \} \triangle q_x dA \\ & + \int_{S_F} \{ \alpha_{nx} (F_{xx} - F_p) + \alpha_{ny} F_{yx} - F_{nx}^* \} \triangle q_x dS \\ & + \int_{S_q} \{ \alpha_{nx} q_n - \alpha_{ny} q_s - q_x^* \} \triangle q_x dS = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

となる。ここにおいて、

Ω : 計算領域

S_F : 圧力境界 (開境界)

S_q : 流量境界 (陸岸境界あるいは河川)

を表す。

境界での圧力および流量は図-7より、

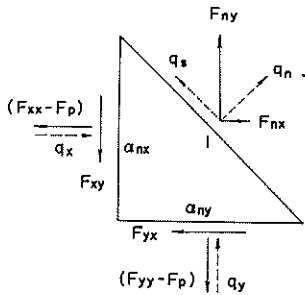


図-7 境界条件の取り扱い

$$F_{nx} = \alpha_{nx} (F_{xx} - F_p) + \alpha_{ny} F_{yx} \quad (3.8)$$

$$F_{ny} = \alpha_{nx} F_{xy} + \alpha_{ny} (F_{yy} - F_p) \quad (3.9)$$

$$q_x = \alpha_{nx} q_n - \alpha_{ny} q_s \quad (3.10)$$

$$q_y = \alpha_{nx} q_s + \alpha_{ny} q_n \quad (3.11)$$

となる。いま、式(3.7)の第一項の圧力の部分に部分積分を行うと次のように表される。

$$\int_{\Omega} \{ (F_p - F_{xx})_{,x} - F_{yx,y} \} \triangle q_x dA$$

$$= \int_{\Omega} \{ \alpha_{nx} (F_p - F_{xx}) \triangle q_x - \alpha_{ny} F_{yx} \triangle q_x \} dS$$

$$- \int_{\Omega} \{ (F_p - F_{xx}) \triangle q_{x,x} - F_{yx} \triangle q_{x,y} \} dA$$

(3.12)

ここにおいて、 $\bar{\Omega}$ は計算領域 Ω の潤辺を表す。式(3.12)を式(3.7)に代入すると、最終的に次の形の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \{ q_{x,t} + (\bar{u} q_x)_{,x} + (\bar{v} q_y)_{,y} - f q_y \\ & + \frac{1}{\rho_0} (\tau_x^s - \tau_x^b) - \bar{m}_x - \frac{1}{\rho_0} P^s H_{,x} - g \eta h_{,x} \\ & - \{ (F_p - F_{xx}) \triangle q_{x,x} - F_{yx} \triangle q_{x,y} \} \} dA \\ & - \int_{\bar{\Omega} - S_F} \{ \alpha_{nx} (F_{xx} - F_p) + \alpha_{ny} F_{yx} \} \triangle q_x dS \\ & - \int_{S_F} F_{nx}^* \triangle q_x dS + \int_{S_q} \{ \alpha_{nx} q_n - \alpha_{ny} q_s - q_x^* \} \\ & \triangle q_x dS = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

y 方向の運動方程式についても同様に

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \{ q_{y,t} + (\bar{u} q_x)_{,x} + (\bar{v} q_y)_{,y} + f q_x \\ & + \frac{1}{\rho_0} (\tau_y^s - \tau_y^b) - \bar{m}_y - \frac{1}{\rho_0} P^s H_{,y} - \rho g h_{,y} \} \triangle q_y \\ & - \{ -F_{xy} \triangle q_{y,x} + (F_p - F_{yy}) \triangle q_{y,y} \} dA \\ & - \int_{\bar{\Omega} - S_F} \{ \alpha_{nx} F_{xy} + \alpha_{ny} (F_{yy} - F_p) \} \triangle q_y dS \\ & - \int_{S_F} F_{ny}^* \triangle q_y dS + \int_{S_q} \{ \alpha_{ny} q_n + \alpha_{nx} q_s - q_y^* \} \\ & \triangle q_y dS = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

となる。ここにおいて、 $\bar{\Omega} - S_F = S_q$ である。

なお、巻末の付録A.1に、一次元の微分方程式の近似解を4つの重み付き残差法(選点法, 最小自乗法, モーメント法, ガラーキン法)によって求めた例を示す。また、弱形式の例として、拡張されたガラーキン法についての近似解例をA.2に示す。

4. 有限要素法^{12), 13)}

有限要素法とは解析領域を三角形あるいは四角形の有限要素に分割し、そのおのおのの要素に対する近似解にそれぞれ局所化された関数を適用し、それらを重ね合わせて全体の近似解を求める方法である。

いま計算領域を三角形に分割することにする。三角形要素内の流速・水位は、その三角形の節点での値によって一次関数によって表されるとすると、任意の点での流速および水位は次のようになる。

$$q_x = \xi_1 Q_{x_1}^e + \xi_2 Q_{x_2}^e + \xi_3 Q_{x_3}^e = \phi Q_x^e \quad (4.1)$$

$$q_y = \xi_1 Q_{y_1}^e + \xi_2 Q_{y_2}^e + \xi_3 Q_{y_3}^e = \phi Q_y^e \quad (4.2)$$

$$H = \xi_1 H_1^e + \xi_2 H_2^e + \xi_3 H_3^e = \phi H^e \quad (4.3)$$

ここにおいて、

ξ_1, ξ_2, ξ_3 : 正規化された三角形座標

(図-8参照)

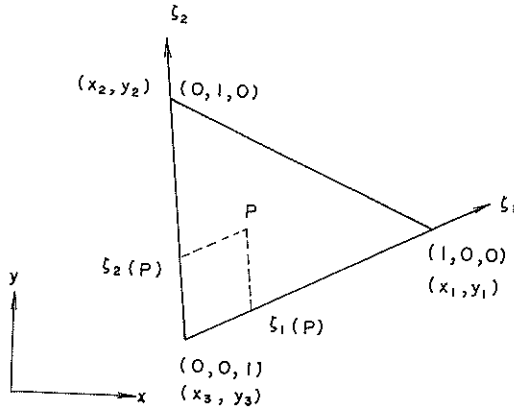


図-8 正規化された三角形座標

e : おのおのの変数の節点値であることを示す記号

\sim : マトリックスを示す記号

である。また、マトリックス ϕ は

$$\phi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3] \quad (4.4)$$

である。直交座標系 x, y から三角形座標系 ξ_1, ξ_2 の変換は

$$\xi_i = \frac{1}{2A} (2A_i + b_i x + a_i y) \quad (4.5)$$

によって与えられる。ここにおいて、

$$a_i = x_k - x_j \quad (4.6)$$

$$b_i = y_j - y_k \quad (4.7)$$

$$2A_i = x_j y_k - x_k y_j \quad (4.8)$$

$$A = \frac{1}{2} (b_1 a_2 - b_2 a_1) \quad (4.9)$$

である。 (i, j, k) は三角形の接線を反時計廻りに順番付けた $(1, 2, 3)$ を循環させたものである。

三角形要素内の微分および積分は次のようにして行う。

$$\frac{\partial}{\partial x} q_x = \frac{\partial}{\partial \xi_i} q_x \frac{\partial \xi_i}{\partial x} = \sum_{i=1}^3 \frac{b_i}{2A} Q_{x_i}^e \quad (4.10)$$

および

$$\begin{aligned} \int_A q_y dA &= 2A \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} q_y d\xi_2 d\xi_1 \\ &= \frac{A}{3} (Q_{y_1}^e + Q_{y_2}^e + Q_{y_3}^e) \end{aligned} \quad (4.11)$$

となる。三角形要素内の積分公式は

$$\int_A \xi_1^i \xi_2^j \xi_3^k dA = \frac{i! j! k!}{(i+j+k+2)!} \cdot 2A \quad (4.12)$$

で与えられる。

以上のような表現法を用いて連続の式 (3.1) および運動方程式 (3.13), (3.14) の有限要素近似を行う。まず方程式 (3.1) に式 (4.1) ~ 式 (4.3) を代入すると、

$$\begin{aligned} \int_A (\phi \Delta H^e)^T \{ (\phi H^e)_{,t} + (\phi Q_x^e)_{,x} + (\phi Q_y^e)_{,y} \\ - (\phi Q_t^e) \} dA = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

となる。いまここに、

$$\Delta H = \phi \Delta H^e \quad (4.14)$$

$$Q_t = \phi Q_t^e \quad (4.15)$$

である。形状関数 ϕ は場所のみの関数であり時間の関数ではない。したがって、変数 H は

$$H = \phi H^e = \phi(x, y) \cdot H^e(t) \quad (4.16)$$

と与えられる。したがって、式 (4.13) における時間微分の項は、次のように与えられる。

$$(\phi H^e)_{,t} = \phi \cdot H^e_{,t} \quad (4.17)$$

また、 x, y による微分は、たとえば

$$(\phi Q_x^e)_{,x} = \phi_{,x} Q_x^e \quad (4.18)$$

となる。これらのことを考慮すると、式 (4.13) は

$$(\Delta H^e)^T \int_A \phi^T (\phi H^e_{,i} + \phi_{,x} Q_x^e + \phi_{,y} Q_y^e - \phi Q_i^e) dA = 0 \quad (4.19)$$

となる。これを計算領域全体 Ω にわたって積分するには、おのおのの要素を重ね合わせればよい。すなわち、

$$\int_{\Omega} \{H_{,i} + q_{x,x} + q_{y,y} - q_i\} \Delta H dA = \sum_{i=1}^{NMELE} (\Delta H^e)^T \int_{A_i} \phi^T \{ \phi H^e_{,i} + \phi_{,x} Q_x^e + \phi_{,y} Q_y^e - \phi Q_i^e \} dA = 0 \quad (4.20)$$

となる。ここにおいて、NMELEは総要素数である。式(4.20)を簡単な形に記すと次のようになる。

$$\sum_{i=1}^{NMELE} (\Delta H^e)^T (M_h^i H_{,i} + F_x^i Q_x^e + F_y^i Q_y^e - M_i^i Q_i^e) dA = 0 \quad (4.21)$$

これを、全体マトリックスの形で表すと、

$$M_h H_{,i} + F_x Q_x + F_y Q_y - M_i Q_i = 0 \quad (4.22)$$

となる。これらの式において

$$M_h^i = \int_{A_i} \phi^T \cdot \phi dA = \frac{A_i}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$F_x^i = \int_{A_i} \phi^T \phi_{,x} dA = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$F_y^i = \int_{A_i} \phi^T \phi_{,y} dA = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

である。

運動方程式についても同様に行う。

$$\int_{\Omega} [\{ q_{x,i} + (\bar{u} q_x)_{,x} + (\bar{u} q_y)_{,y} - f q_y + \frac{1}{\rho_0} (\tau_x^s - \tau_x^b) - \bar{m}_x - \frac{1}{\rho_0} P^s H_{,x} - g \eta h_{,x} \} \Delta q_x - \{ (F_p - F_{xx}) \Delta q_{x,x} - F_{yx} \Delta q_{x,y} \}] dA - \int_{S_q} \{ \alpha_{nx} (F_{xx} - F_p) + \alpha_{ny} F_{yx} \} \Delta q_x dS - \int_{S_f} F_{nx}^* \Delta q_x dS + \int_{S_q} \{ \alpha_{nx} q_n - \alpha_{ny} q_s - q_x^* \}$$

$\Delta q_x dS$

$$= \sum_{i=1}^{NMELE} (\Delta q_x^i)^T \left[\int_{A_i} \{ \phi^T \phi Q_{x,i} + \phi^T \phi_{,x} C_{xx} + \phi^T \phi_{,y} C_{xy} - f \phi^T \phi Q_{y,i} + \phi^T \phi T_x^s - C_f \phi^T \phi T_x^b - \phi^T \phi M_x - \frac{1}{\rho_0} \phi^T \phi P^s \phi_{,x} H - g \phi^T \phi \eta \phi_{,x} h - \phi_{,x}^T (g \phi h \phi \eta + \frac{1}{2} g \phi \eta \phi \eta + \frac{1}{\rho_0} \phi P^s \phi H) + \phi_{,x}^T E_{xx} \phi_{,x} Q_x + \phi_{,y}^T E_{yx} (\phi_{,x} Q_y + \phi_{,y} Q_x) \} dA + \int_{S_{q_i}} \{ -\alpha_{nx} \phi^T E_{xx} \phi_{,x} Q_x + \alpha_{nx} \phi^T (g \phi h \phi \eta + \frac{1}{2} g \phi \eta \phi \eta + \frac{1}{\rho_0} \phi P^s \phi H) - \alpha_{ny} E_{yx} \phi^T (\phi_{,y} Q_x + \phi_{,x} Q_y) \} ds + \int_{S_f} \alpha_{nx} \phi^T \{ g \phi h \phi \eta^* + \frac{1}{2} g \phi \eta^* \phi \eta^* + \frac{1}{\rho_0} \phi P^s \phi H^* \} ds \right] \quad (4.26)$$

となる。いま、外力項、非線型項および境界積分の項を右辺の荷重項とする。また、水深変化は小さいと仮定すると、式(4.26)は次のように表すことができる。

$$(\Delta q_x^e)^T \int_{A_i} \{ \phi^T \phi Q_{x,i} - f \phi^T \phi Q_{y,i} - g \phi^T \phi \eta^e + \phi_{,x} h^e + E_{xx}^i \phi_{,x}^T \phi_{,x} Q_x^e + E_{yx}^i \phi_{,y}^T (\phi_{,x} Q_y^e + \phi_{,y} Q_x^e) \} dA = -(\Delta q_x^e)^T \int_{A_i} \{ \phi^T \phi_{,x} C_{xx}^e + \phi^T \phi_{,y} C_{xy}^e + \phi^T \phi T_x^s - C_f^i \phi^T \phi T_x^b - \phi^T \phi M_x^e - \frac{1}{\rho_0} \phi^T \phi P^s \phi_{,x} H^e - g \phi_{,x}^T \phi \eta^e \phi_{,x} h^e - \frac{1}{2} g \phi_{,x}^T \phi \eta^e \phi \eta^e - \frac{1}{\rho_0} \phi_{,x}^T \phi P^s \phi_{,x} H^e \} dA + (\Delta q_x^e)^T \int_{S_{q_i}} \{ \alpha_{nx} \phi^T E_{xx}^i \phi_{,x} Q_x^e - \alpha_{nx} \phi^T (g \phi h^e \phi \eta^e - \frac{1}{2} g \phi \eta^e \phi \eta^e - \frac{1}{\rho_0} \phi P^s \phi_{,x} H^e) + \alpha_{ny} E_{yx}^i \phi^T (\phi_{,y} Q_x^e + \phi_{,x} Q_y^e) \} ds - (\Delta q_x^e)^T \int_{S_{f_i}} \alpha_{nx} \phi^T \{ g \phi h^e$$

$$\phi \underline{\eta}^{*e_i} + \frac{1}{2} g \phi \underline{\eta}^{*e_i} \phi \underline{\eta}^{*e_i} + \frac{1}{\rho_0} \phi P^s e_i \phi H^{*e_i} \} ds \quad (4.27)$$

これらの式において,

$$C_{ij} = \frac{q_i q_j}{H} \quad i, j = x, y \quad (4.28)$$

$$\frac{\tau_x^s}{\rho_0} = \phi \underline{T}_x^s \quad (4.29)$$

$$(q_x^2 + q_y^2)^{1/2} \frac{q_x}{H^2} = \phi \underline{T}_x^b \quad (4.30)$$

である。式(4.27)を簡単な形に書き直すと,

$$\begin{aligned} (\Delta q_x^{e_i})^T \{ \underline{M}^i \underline{Q}_{x,i}^{e_i} - f \underline{M}^i \underline{Q}_y^{e_i} - (\underline{G}_x^i)^T \underline{\eta}^{e_i} + \underline{E}_{xx}^i \underline{Q}_x^{e_i} \\ + \underline{E}_{yx}^i \underline{Q}_y^{e_i} \} = (\Delta q_x^{e_i})^T \underline{P}_x^{e_i} \end{aligned} \quad (4.31)$$

となる。ここにおいて,

$$\underline{E}_{xx}^k = \int_{A_k} \{ \underline{E}_{xx}^k \phi_{yx}^T \phi_{yx} + \underline{E}_{yx}^k \phi_{yx}^T \phi_{yx} \} dA \quad (4.32)$$

$$\underline{E}_{yx}^k = (\underline{E}_{xy}^k)^T = \int_{A_k} \underline{E}_{yx}^k \phi_{yx}^T \phi_{yx} dA \quad (4.33)$$

である。また、 $P_x^{e_i}$ は式(4.27)の右辺である。

y 方向についても同様に表すと,

$$\begin{aligned} (\Delta q_y^{e_i})^T \{ \underline{M}^i \underline{Q}_{y,i}^{e_i} + f \underline{M}^i \underline{Q}_x^{e_i} - (\underline{G}_y^i)^T \underline{\eta}^{e_i} + \underline{E}_{xy}^i \underline{Q}_x^{e_i} \\ + \underline{E}_{yy}^i \underline{Q}_y^{e_i} \} = (\Delta q_y^{e_i})^T \underline{P}_y^{e_i} \end{aligned} \quad (4.34)$$

となる。ここにおいて,

$$\underline{E}_{yy}^k = \int_{A_k} \{ \underline{E}_{yy}^k \phi_{yx}^T \phi_{yx} + \underline{E}_{xy}^k \phi_{yx}^T \phi_{yx} \} dA \quad (4.35)$$

である。

これらの方程式を計算領域全体にわたって重ね合わせると,

$$\underline{M} \underline{Q}_{x,t} - \underline{G}_x^T \underline{\eta} + \underline{E}_{xx} \underline{Q}_x + \underline{E}_{yx} \underline{Q}_y - f \underline{M} \underline{Q}_y = \underline{P}_x \quad (4.36)$$

$$\underline{M} \underline{Q}_{y,t} - \underline{G}_y^T \underline{\eta} + \underline{E}_{xy} \underline{Q}_x + \underline{E}_{yy} \underline{Q}_y + f \underline{M} \underline{Q}_x = \underline{P}_y \quad (4.37)$$

となる。

$$\underline{G}_x^i = \int_{A_i} g \phi^T(\phi h) \phi_{yx} dA$$

$$= \frac{g}{2 A_i} \underline{M}^i \begin{bmatrix} h_1 a_1 & h_1 a_2 & h_1 a_3 \\ h_2 a_1 & h_2 a_2 & h_2 a_3 \\ h_3 a_1 & h_3 a_2 & h_3 a_3 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

$$\underline{G}_y^i = \int_{A_i} g \phi^T(\phi h) \phi_{yx} dA$$

$$= \frac{g}{2 A_i} \underline{M}^i \begin{bmatrix} h_1 b_1 & h_1 b_2 & h_1 b_3 \\ h_2 b_1 & h_2 b_2 & h_2 b_3 \\ h_3 b_1 & h_3 b_2 & h_3 b_3 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

である。

有限要素法の基本的な考え方について、巻末の付録(A.3)において、一次元での問題を例に簡単に説明する。

5. 逐次時間積分法と計算のフローチャート

5.1 逐次時間積分法とリランバリング

有限要素法によって解くべき方程式は、式(4.22)の連続の式および式(4.36)、式(4.37)の運動方程式である。また、境界条件式としては(2.54)、(2.55)、および(2.57)、(2.58)である。これらの方程式を時間的に解く際に、水位と流速が1/2ステップ異ったレベルの値を用いたSPLIT-TIME method⁷⁾が採用された。この方法は、差分法においても利用されている方法¹⁴⁾である。この方法は、連続の式および運動方程式を簡単に次のように表すと、

$$\underline{M}_1 \underline{\eta}_{,t} + \underline{G} \underline{Q} = \underline{P}_H \quad (5.1)$$

$$\underline{M}_2 \underline{Q}_{,t} - \underline{G}^T \underline{\eta} = \underline{P}_Q - \underline{E}_Q - \underline{C} \underline{Q} \quad (5.2)$$

となる。これらの式において、水位 $\underline{\eta}$ に対しては $t_{n-\frac{1}{2}}$ 、 $t_{n-\frac{1}{2}}$ のタイムレベルを用い、流量 \underline{Q} に対しては t_n 、 t_{n+1} のタイムレベルを用いると、式(5.1)、式(5.2)は次のように展開できる。

$$\begin{aligned} \underline{M}_1 (\underline{\eta}_{n+\frac{1}{2}} - \underline{\eta}_{n-\frac{1}{2}}) + \Delta t \underline{G} \underline{Q}_n = \Delta t \underline{P}_H (t_n, \\ \underline{\eta}_{n-\frac{1}{2}}, \underline{Q}_n) \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \underline{M}_2 (\underline{Q}_{n+1} - \underline{Q}_n) - \Delta t \underline{G}^T \underline{\eta}_{n+\frac{1}{2}} = \Delta t \underline{P}_Q (t_{n+\frac{1}{2}}, \\ \underline{\eta}_{n+\frac{1}{2}}, \underline{Q}_n) - \Delta t (\underline{E} + \underline{C}) \underline{Q}_n \end{aligned} \quad (5.4)$$

初期条件として、 $\underline{\eta}_{n-\frac{1}{2}}$ 、 \underline{Q}_n を与えて、式(5.3)、式(5.4)を交互に解けば、計算領域内の水位・流速を時間的に求めることが可能となる。

タイムステップに関する安定条件は、もしコリオリ項および水平混合項を無視した場合には無条件安定となる。しかしながら、実際には無条件安定とはならず、次式が経験的に与えられている。

$$\Delta t < \frac{\alpha_l \Delta S}{\sqrt{2gh}} = \alpha_l \Delta t_{cr} \quad (5.5)$$

ここに、 α_l は係数でWang⁷⁾らの経験によれば、約1.5が最大である。ここにおいて、 Δt_{cr} は差分法において有名なCourant-Friedrichs-Lewyの安定条件式である。有限要素法の安定条件の考え方については、付録A.4に詳しく示す。

次に、多元一次の連立方程式を求める場合のバンドマトリックスについて述べる。

式(5.3)、および式(5.4)の未知数にかかる係数マトリックスはそれぞれ対称であり、かつその行列式が正の値を取ることから、これらの連立多元方程式はコレスキー法¹⁵⁾(付録A・5参照)を用いて解くことができる。一般に、係数マトリックス M_1, M_2 は節点の数が N 個の場合には、 $N \times N$ 、又は $2N \times 2N$ の正方行列である。しかし、これらのマトリックスは対角線の近くに集中しており、他の多くは0となっている。したがって、計算機の記憶容量を節約する意味において、また計算時間を短縮する意味にもおいて、バンドマトリックスの形がよく用いられる。これは、隣り合う節点の節点番号の差の中で最も大きい値をバンド幅にとれば、それ以上離れた番号での係数因子は総てゼロであるところから、係数マトリックスの形を $N \times M$ (M :バンド幅)にとることで十分である。例えば、く(矩)形湾について考えると、本来 $N \times N$ ($189 \times 189 = 35721$)の係数マトリックスは、バンド幅 $M = 9$ であるので $N \times M$ ($189 \times 9 = 1701$)とわずか $1/21$ の大きさでよいことになる。く(矩)形湾のように地形が単純な場合には、どのように節点番号を付ければ最小のバンド幅が取れるかは容易に推察できるが、地形が複雑な場合にはやっかいな仕事となる。特に、埋立などによる地形の一部改変のような場合に、初めから番号付けを行うことは非常に大変な仕事である。そこで、計算機の中でリナンバリング¹⁶⁾をし、バンド幅が最小になるように再び節点番号を割り付けるプログラムを作成した。この過程は計算の前処理として行われる。リナンバリングについての詳しい説明は、付録A.6において行う。

5.2 計算のフローチャート

以上述べたことにより、潮流計算を行う際の基本方程式の近似解法としての連立方程式が示された。この連立方程式を所定の初期条件、境界条件の下で解くことが、

本計算の主要な目的である。

本節において、実際に有限要素法を用いて潮流計算を実施する手順について簡単に述べる。図-9に、そのフローチャートを示す。

(1) 計算目的・計算対象の決定

何を目的として計算を実施するか、例えば東京湾において、埋立等による地形変化が生じた場合の潮流の変化を知りたい場合、またはある港に防波堤を建設した場合の水質の変化を知りたい等々。

(2) 現地データの収集および選択

計算目的、計算対象が決まったならば、それに関する気象・海象データを収集する。本計算において最も必要なデータは、地形データ、境界条件となる潮位データ、河川流入データ、それに潮流データである。これらのデータを考慮して以下の作業も決定される。また、潮位・潮流は潮汐周期により時々刻々変化するものであるから、計算目的によって、どんな現象(例えば大潮、平均潮)を再現するかを選択する。

(3) 計算領域の決定

計算目的および現地のデータを基礎にして計算領域を決定する。境界条件の多少の変化が対象海域に大きな変化を与えないように、比較的遠くに境界を設定するのが望ましい。

(4) 計算領域を有限要素に分割

(3)で決められた計算領域を任意の三角形の有限要素にて分割する。ここで注意することは、三角形の形状をあまり扁平なものにしないこと、隣接する三角形の面積の大きさをあまり変化させないこと、さらに潮流の流線を考慮して分割すること等があげられる。また、陸岸境界においては、鋭角な境界は避けることが望ましい。

(5) 節点番号、要素番号の割り付け

各節点、各要素に番号付け(ナンバリング)を行う。節点番号については、未知数の係数マトリックスを作る際に、そのバンド幅が最小になることが望ましい。一般的には、手作業においてバンド幅を最小にすることは困難であるので、リナンバリングを行う。要素番号については任意でよい。なお、各要素を構成する3つの節点番号を反時計廻りに記す。

(6) 節点座標および水深の読み込み

各節点の座標を設定する必要がある。これは、正方形(あるいは長方形)が配列されている差分法にはない作業であって、比較的大変な仕事である。節点の水深は、差分法と同様の作業で、海図あるいは等深浅図が用いられる。

(7) データカードの作成

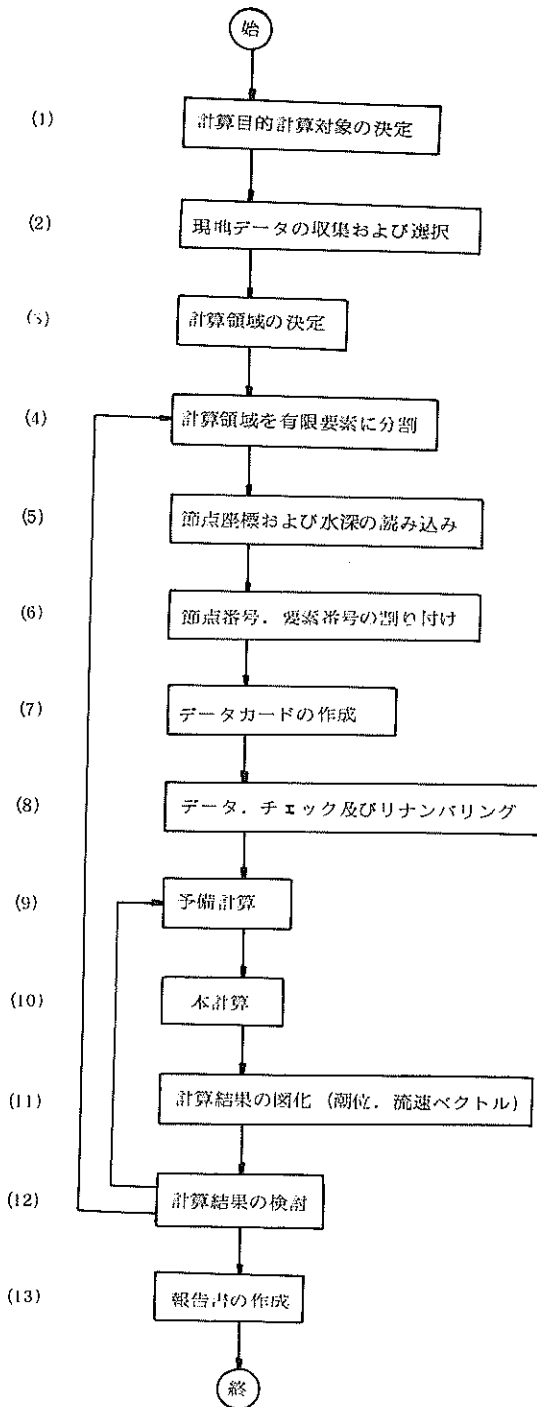


図-9 計算手順のフローチャート

(5), (6)において行なわれた節点番号, 節点座標, 要素番号, 要素構成番号およびその他のデータカードを作成する。

(8) データチェック, およびリナンバリング

節点番号, 要素番号が正確に付けられているかどうかのチェックを行うとともに, マトリックスのバンド幅を最小にするようにリナンバリングを行う。この作業において, 要素構成番号を時計廻りにした場合などがデータのミスとして指摘される。この時点において, 三角形要素の配列図を自動図化すると, その他のデータエラー (座標の読み間違い) が判明する。なお, マトリックスのバンド幅に余裕がある場合には, この作業は省略してもよい。

(9) 予備計算

総てのデータが正しく用いられているかをチェックするために, 予備計算を行う。この際にも, (8)で行ったデータのチェック機能は含まれている。

(10) 本計算

すべての準備が整ったところで, 本計算を実施する。周期的に定常となるには3~4潮汐間の計算が必要である。図-10には, 本プログラムのフローチャートを示す。このフローチャートに示すルーチンの繰り返しにより, 時間的に積分を実行し, 3潮汐あるいは4潮汐間の計算を継続する。

(11) 計算結果の図化

潮位変化および流速ベクトルをドラフターにより図化する。ラインプリンターに打ち出された結果からも, 大体の流況パターンは類推されるが, ベクトル図さらに, 潮流のホドグラフなどを書くと, 計算結果が非常にわかりやすいものとなる。

(12) 計算結果の検討

ラインプリンターに打ち出された結果および自動図化されたベクトル図などを見て, 計算結果の検討を行う。この際に, 現地観測結果をどの程度再現しているか, 計算結果が周期的に定常状態になっているかが判断基準となる。

(13) 報告書の作成

以上の結果を踏まえて報告書を作成する。

6. 潮汐流の計算例

6.1 <矩>形湾における長波の計算

潮汐流の基礎方程式(2.37), 式(2.38), 式(2.38)は, 周期が12時間, あるいは24時間と比較的長い潮汐現象のみならず, 10分~30分という津波のような周期の波に対しても適用される。したがって, こ

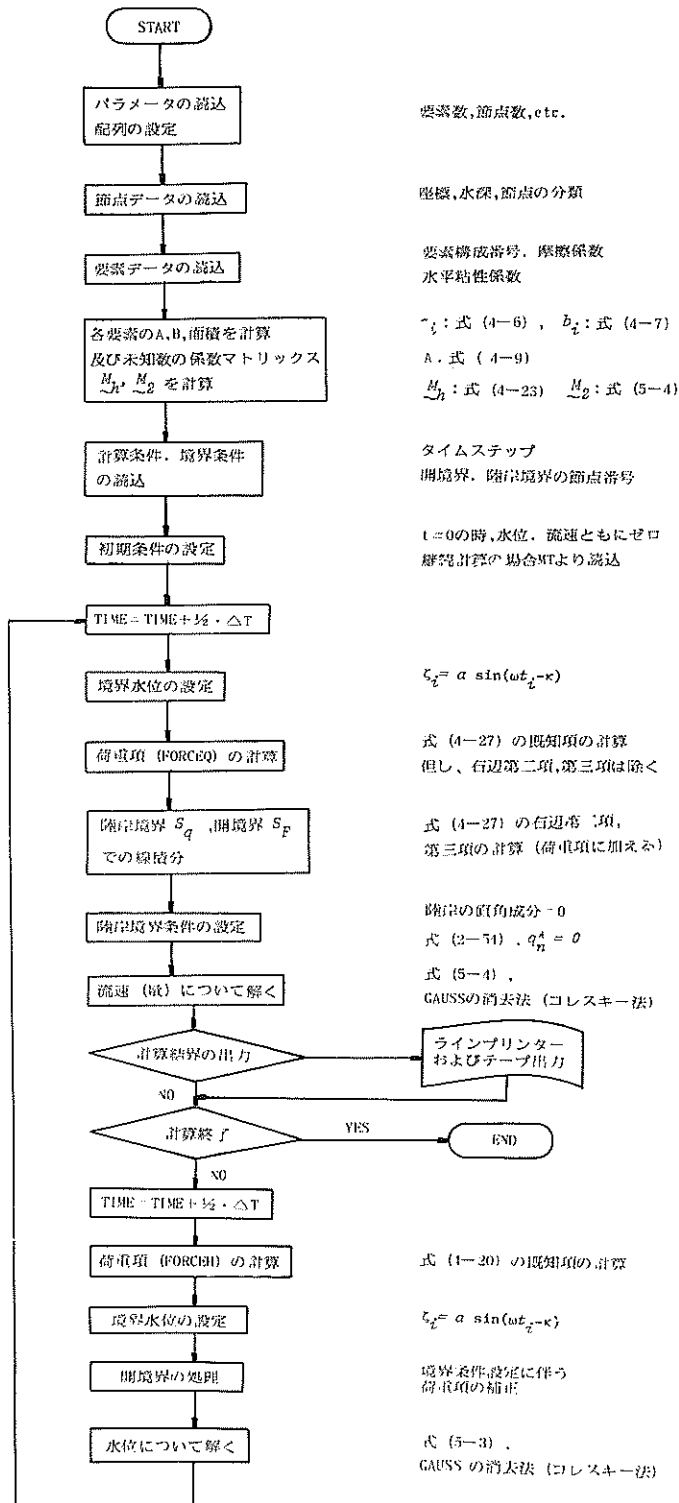


図-10 計算プログラムのフローチャート

ここでは比較的簡単な計算例として、地形をく(矩)形湾にとり、長波の計算を実施し、計算プログラムの検証、および各種パラメーターの役割を調べた。

く(矩)形湾を節点数189、要素数312の三角形の有限要素に分割した。この要素分割図を図-11に示す。いま、この三角形の辺の長さを1500mと仮定すると、このく(矩)形湾は長さ41km、幅9kmの東京湾規模の内湾となる。いま、水深30mと一様にし、湾口において振幅1m、周期10分または20分の長波が侵入した場合の湾内の長波の伝播について考える。

表-1に、今回行ったく(矩)形湾での長波の計算ケースを示す。長波の周期、計算のタイムステップ、水平渦動粘性項、海底摩擦項などの大きさを変化させ、また慣性項の有無、三角形要素の配列の変化などが計算結果に与える影響を試算によって調べた。

計算ケース1としては、周期10分、振幅1mの波に対し、タイムステップ30秒、 $E_{xx}=E_{yy}=100\text{m}^2/\text{s}$ 、 $E_{xy}=50\text{m}^2/\text{s}$ 、 $f=0.002$ 、慣性項を含む場合についてである。これらの値は、海底摩擦係数については、式(2.44)の水深30m、マンニグの粗度係数 $n=0.025$ に相当し、

$$f = \frac{n^2 g}{h^{1/3}} = \frac{(0.025)^2 \cdot 9.8}{30^{1/3}} \approx 0.002 \quad (6.1)$$

となる。また、水平渦動粘性係数に対しては、節点間の距離の平均を約1.5kmとすると、式(2.53)より、

$$E_{xx} = E_{yy} = \alpha l^{4/3} = 0.125 \times (150000)^{4/3} \\ \approx 10^6 \text{ cm}^2/\text{s} = 100 \text{ m}^2/\text{s} \quad (6.2)$$

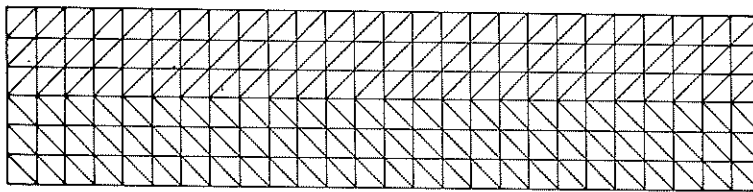
となる。

タイムステップについては、式(5.5)に与えられた条件式において、 α_l の値に若干の余裕をもたせて、 $\alpha_l = 0.7$ とした場合、

$$\Delta t < \frac{\alpha_l \cdot \Delta S}{\sqrt{2gh}} = \frac{0.7 \times 1060}{\sqrt{2 \times 9.8 \times 30}} = 30.6 \text{ 秒} \quad (6.3)$$

となる。したがって、 $\Delta t=30$ 秒とおいた。

ケース1の結果を、図-12に示す。この図は、計算開始後2100秒の時の水位を示し、実線で示すのが計算波形であり、破線で示すのが正弦波形である。この図より、波の峰が波速 $c = \sqrt{gh}$ にしたがって伝播していく



波の進行方向

図-11 要素分割図

表-1 く(矩)形湾における長波の計算ケース

| ケース番号 | 周期 | タイムステップ | $E_{xx}=E_{yy}$ | E_{xy} | f | 慣性項 |
|-------|----|---------|-----------------|----------|-------|-----|
| 1 | 10 | 30 | 100 | 50 | 0.002 | 有 |
| 2 | 20 | 30 | 100 | 50 | 0.002 | 有 |
| 3 | 20 | 30 | 100 | 50 | 0.01 | 有 |
| 4 | 20 | 30 | 100 | 50 | 0.1 | 有 |
| 5 | 10 | 30 | 100 | 50 | 0.01 | 有 |
| 6 | 20 | 30 | 1000 | 1000 | 0.002 | 有 |
| 7 | 20 | 30 | 1 | 1 | 0.002 | 有 |
| 8 | 10 | 30 | 1000 | 1000 | 0.002 | 有 |
| 9 | 20 | 40 | 100 | 50 | 0.002 | 有 |
| 10 | 20 | 60 | 100 | 50 | 0.002 | 有 |
| 11 | 20 | 10 | 100 | 50 | 0.002 | 有 |
| 12 | 20 | 30 | 100 | 50 | 0.002 | 無 |
| 13 | 20 | 30 | 100 | 50 | 0.01 | 有 |

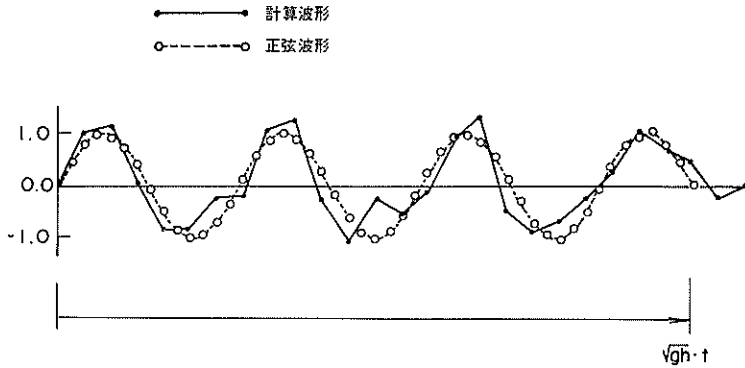


図-1 2 長波の伝播(ケース1)

ようすがわかる。しかし、波形は凹凸が激しく、あまりきれいな形とはいえない。これは、波の諸元を考えた場合に、

周期 $T = 600$ 秒
 振幅 $a = 1$ m
 波速 $c = \sqrt{gh} \approx 17.2$ m/s
 波長 $L = c \cdot T \approx 10300$ m

であり、1波長間に含まれる三角形要素の節点がわずか7つしかないためによるものと考えられる。

ケース2は、前と同様のパラメータを使って、周期を

20分にした場合である。図-13(a)に、計算開始後1800秒の結果を示す。周期を2倍にしたことにより、波長が2倍になり、1波長間に含まれる節点が約14個となったために、計算波形がかなり滑らかになっている。波の峰および波の谷の所で、正弦曲線と若干の相違が見られるが、長波の基本式には、非線型項および粘性項も含んでいるものであり、これらの影響が出たものであると考えられる。

流速についても、ほぼ同様ながいえる。図-13(b)に中心線上の流速分布を、計算結果を実線で、正弦曲

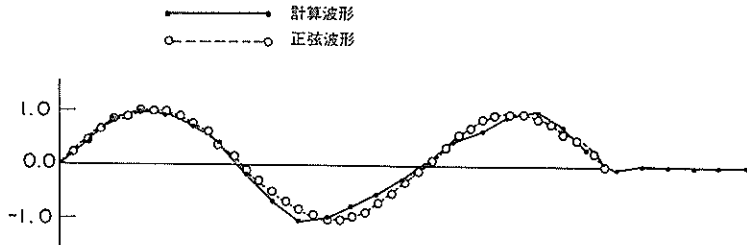


図-1 3(a) 長波の伝播(ケース2)

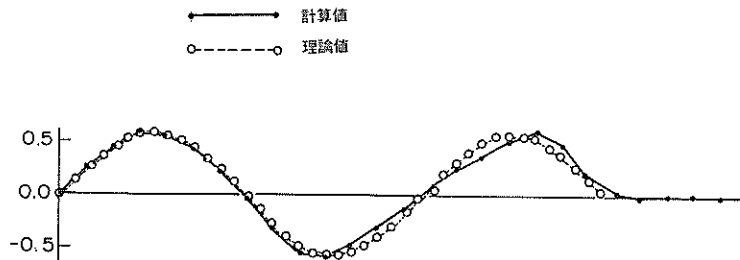


図-1 3(b) 長波の流速分布(ケース2)

線を破線で示す。長波における流速分布は、波高分布が式(6.4)で与えられた場合に、式(6.5)となる。

$$\zeta = a \sin k(x - ct) \quad (6.4)$$

$$u = \frac{ac}{h} \sin k(x - ct) \quad (6.5)$$

式(6.5)に、次の諸元を与え、ケース2の計算結果と比較すると、水位の場合とほぼ同じ偏り方をした分布となった。

$$a = 1 \text{ m}$$

$$h = 30 \text{ m}$$

$$c = \sqrt{gh} \doteq 17.15 \text{ m/s}$$

$$k = \frac{2\pi}{\sqrt{gh} \cdot T} \doteq 6.11 \times 10^{-4} / \text{m}$$

以上に示した周期10分の波と、周期20分の波を基本的なケースとして、表-1に示すごとく、計算におけるパラメーターを変化させたものの結果を以下に示す。まず、海底摩擦係数についての考察を行う。ケース3として、 $f=0.01$ にした場合の結果、および、ケース4として $f=0.1$ にした場合の結果をケース2の結果と比較しながら図-14(a)に示す。ケース3の場合には、第1波めの波高に若干の減衰がみられるが、第2波めには、ほとんど影響がない。しかし、ケース4については、第1波

めの波高が半分に減衰している。以上のことより、海底摩擦係数は流れの運動エネルギーを減衰せしめる効果があることがわかる。特に、 $f=0.1$ では、その効果が非常に大きい。これは、式(2.40)、式(2.41)における表現式が流速の二乗となっていることから予想された結果である。周期10分の波についても、同様の検討を行う。ケース5は、 $f=0.01$ の場合である。図-14(b)に、ケース1とケース5の結果を比較して示す。わずかの波高の減衰がみられる程度で、その傾向は周期20分の波の場合と同様である。

つぎに、水平渦動粘性(混合)係数の影響について考察する。この項は、K.T.Tee¹⁷⁾、宝田¹⁸⁾が指摘しているように、恒流(潮汐残差流)の強さ、および渦の大きさに影響し、潮汐流の平均流場を再現するものとして重要な係数である。周期20分の波に対して、水平渦動粘性係数を $1000 \text{ m}^2/\text{s}$ にした場合(ケース6)、および $1 \text{ m}^2/\text{s}$ にした場合(ケース7)の結果を図-15(a)に示す。ケース6の波高が、ほかに比べて若干減少するほかは、ほとんど影響がない。これに対して、ケース8の周期10分の波に対する水平混合項の影響は、図-15(b)に示すごとく、非常に大きいことがわかる。これは、水平混合項は、水平方向に流速差があった場合に始めて有効に作用するものであって、一様な流速分布をしている海域では、その

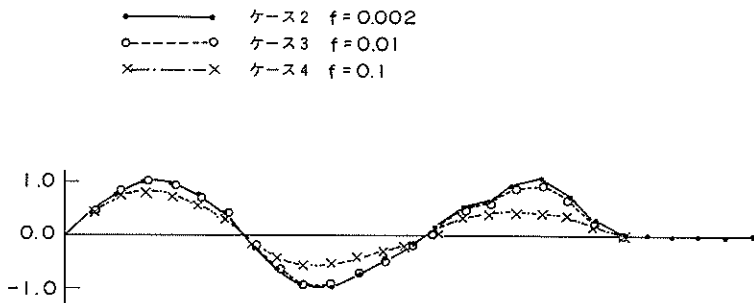


図-14(a) 海底摩擦係数の影響 ($T=20$ 分)

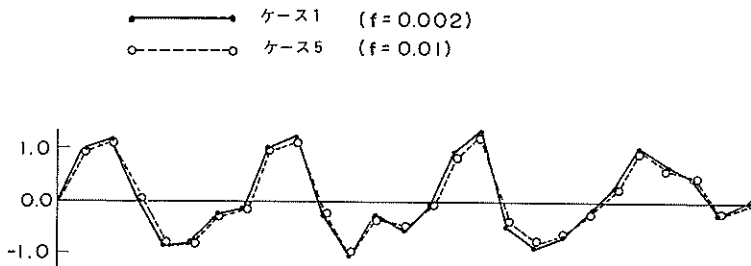


図-14(b) 海底摩擦係数の影響 ($T=10$ 分)

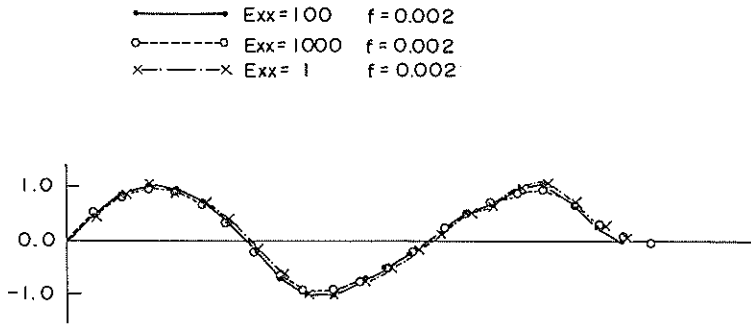


図-15(a) 水平渦動粘性係数の影響 ($T=20$ 分)

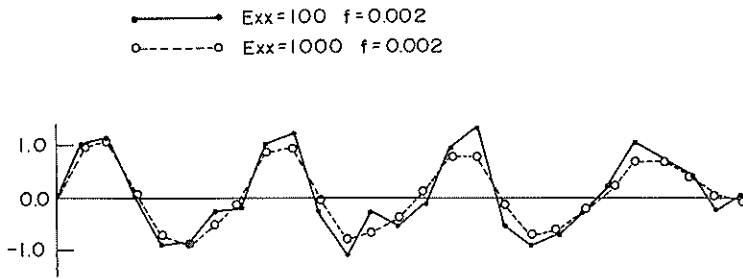


図-15(b) 水平渦動粘性係数の影響 ($T=10$ 分)

影響が小さい。したがって、ケース1の周期10分の結果のように、波形が非常にひずんでおり、かつ横方向にも凹凸があるような場合には、水平方向の流速勾配も大きく、ゆえに、水平混合項の影響が大きくなるものと考えられる。このことは、水平混合項が地形性の渦流の大きさに関与すること、さらに、計算の不安定性を是正する役割を持つことなど、非常に重要な項であることがわかる。

次に、計算のタイムステップの影響について検討する。タイムステップの大きさは、計算時間に直接関係あり、

なるべく大きくとることが望ましい。しかしながら、あまり大きいタイムステップをとり過ぎると、計算に不安定が生じる。ケース9に $\Delta t=40$ s、ケース10に $\Delta t=60$ s、ケース11に $\Delta t=10$ sについて計算を実施した。これらの比較を図-16に示す。この図より、 $\Delta t=10$ s ~ 60 sについての結果は、ほとんど変化ないことがわかる。しかしながら、 $\Delta t=100$ sについての計算は不安定であった。以上のことより、式(5.5)に示される係数 α_t の値が1.4まで安定であったことを示す。ただし、タ

- Δ $\Delta t=10$ s
- \bullet $\Delta t=30$ s
- \circ $\Delta t=40$ s
- \times $\Delta t=60$ s
- $\Delta t=100$ s (発散)

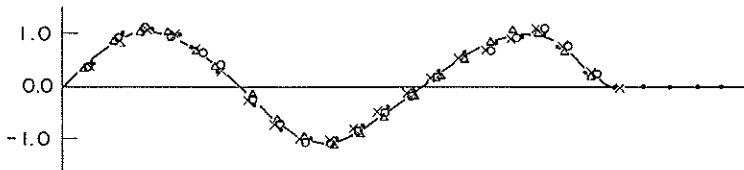


図-16 タイムステップによる影響

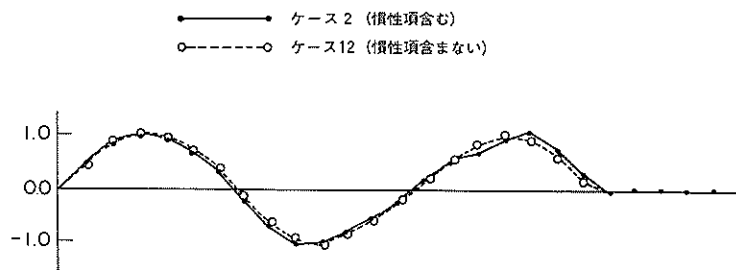


図-17 慣性項による影響

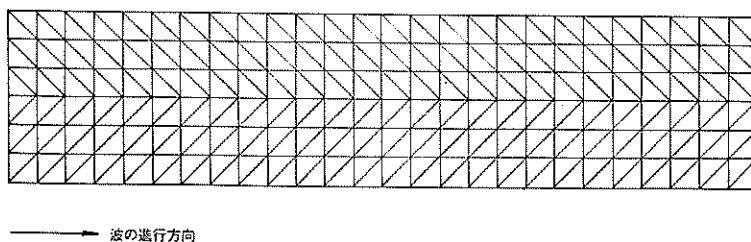
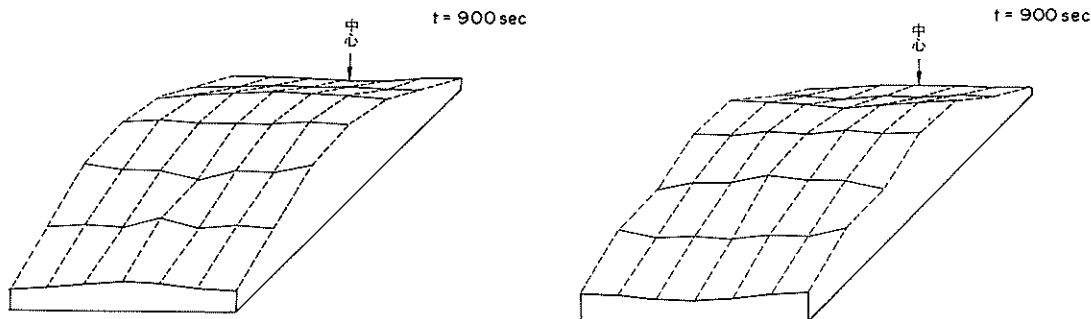


図-18 要素分割図(図-9を90°回転させたもの)



(a) ケース3(図-11の配置による)

(b) ケース13(図-18の配置による)

図-19 三角形要素の配列による影響

イムステップの大きさは、地形形状、海底摩擦係数、水平渦動粘性係数の大きさにも影響されるであろうし、明確な基準は与えられない。

つづいて、慣性項(移流項)を無視した場合の結果を図-17に示す。移流項を含んだ場合のケース2の結果と、ほとんど変化ないことから、く(矩)形湾における長波の計算には、慣性項の効果は非常に小さいことがわかる。しかし、この項は、潮汐残差流の形成要因であるといわれており、これについては、6.2の東京湾を計算例に取り上げた項において述べる。

最後に、同じ計算領域において、三角形要素の配列を変えた場合の影響について考察する。三角形による要素分割を図-11に示すものよりも90°回転させて、図-18に示すようにした。図-11の配置による計算結果(ケース3)、および図-18の配置による計算結果(ケース13)を比較したものを図-19に示す。図-19は、平均水面を基準とした波形の一部を立体的に示したもので、波高の横方向の分布が逆対称となっている。すなわち、(a)で中心線上の波高が、(b)では両端の波高となっている。このように、有限要素法においては、三角形

要素の配列の仕方によって、結果に若干の相違が生じることに注意を要する。ただし、その差は、そう大きなものではない。

以上、長波の波高分布の結果より、数値計算に用いられた種々のパラメーターの影響を調べた。ここで求められた結果を要約すると、海底摩擦係数は、波の運動エネルギーを減衰させる効果が大きいのにに対し、水平混合係数は、波高分布が滑らかな場合（すなわち、水平方向の流速勾配が小さい）には、その効果が小さい。移流項の影響は、ほとんどない。 $\alpha_f = 1.4$ 以下に対しては、タイムステップの影響がないことなどが明らかにされた。また、三角形の有限要素の配列によっても、解に若干の相違があることが示された。

6.2 東京湾における潮流計算

有限要素法のプログラムを東京湾の潮流計算に適用した。潮流とは、太陽又は月の引力によって誘起された海面の昇降運動に伴う海水の流動現象であり¹⁹⁾、その周

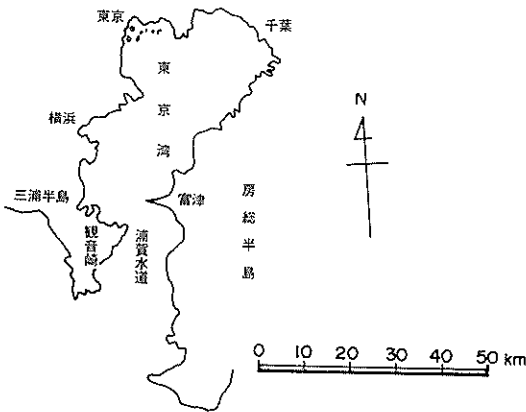


図-20 東京湾

期は約半日、あるいは約1日と非常に長い。この現象は、周囲が陸上に囲まれた閉塞性の強い内湾においては、流れの最も大きな要因であり、物質の循環・拡散現象を論ずる際には最も重要な項目である。

東京湾は、図-20に示すごとく、奥行約50km、幅約

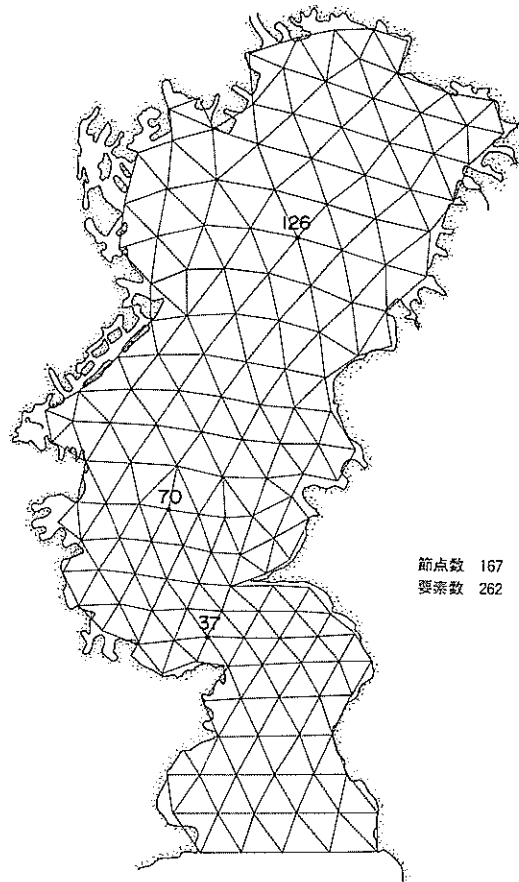


図-21 要素分割図

表-2 東京湾周辺の潮汐の調和定数^{19), 20)}

| | K_1 | | O_1 | | M_2 | | S_2 | | 潮型 指数 |
|---|-------|----------|-------|----------|-------|----------|-------|----------|----------|
| | H | κ | H | κ | H | κ | H | κ | |
| 館 | 2.2 | 1.61 | 1.8 | 1.56 | 3.6 | 1.47 | 1.8 | 1.74 | 0.74 |
| 岩 | 2.3 | 1.79 | 1.7 | 1.57 | 3.5 | 1.52 | 1.7 | 1.74 | 0.77 |
| 井 | 2.5 | 1.78 | 1.8 | 1.58 | 4.5 | 1.49 | 2.1 | 1.80 | 0.65 |
| 富 | 2.6 | 1.82 | 1.9 | 1.61 | 5.1 | 1.55 | 2.5 | 1.86 | 0.59 |
| 千 | 2.4.6 | 1.8.4.4 | 1.8.6 | 1.6.6.6 | 5.0.1 | 1.6.2.4 | 2.3.9 | 1.9.3.0 | 0.5.8 |
| 東 | 2.1.6 | 1.7.5.3 | 1.6.7 | 1.5.8.5 | 3.5.6 | 1.4.1.3 | 1.6.3 | 1.7.1.9 | 0.7.4 |
| 布 | 2.2 | 1.8.2 | 1.8 | 1.7.0 | 4.5 | 1.6.6 | 1.9 | 1.9.8 | 0.6.3 |
| 霊 | 2.4.9 | 1.7.9.7 | 1.9.3 | 1.6.0.2 | 4.6.7 | 1.5.5.2 | 2.2.7 | 1.8.5.1 | 0.6.4 |
| 岸 | 2.4.1 | 1.7.9.4 | 1.8.8 | 1.6.0.0 | 4.2.8 | 1.5.3.0 | 2.0.7 | 1.8.2.5 | 0.6.8 |
| 横 | 2.4 | 1.7.6 | 2.0 | 1.6.3 | 3.8 | 1.5.1 | 1.8 | 1.7.8 | 0.7.9 |
| 須 | 2.3.4 | 1.7.8.0 | 1.8.2 | 1.5.8.4 | 3.5.8 | 1.4.8.0 | 1.7.0 | 1.7.6.8 | 0.7.9 |
| 浦 | 2.2 | 1.7.7 | 1.8 | 1.5.9 | 3.8 | 1.4.6 | 1.7 | 1.7.1 | 0.7.3 |
| 久 | 2.2.9 | 1.8.0.1 | 1.7.9 | 1.6.0.9 | 3.5.2 | 1.5.2.6 | 1.6.7 | 1.8.1.8 | 0.7.9 |
| 城 | | | | | | | | | |
| ヶ | | | | | | | | | |
| 油 | | | | | | | | | |

20 kmの大きさを持ち、約6 kmの湾口（富津-観音崎間の浦賀水道）にて外海に接する典型的な閉塞性の内湾である。東京湾は、背後地には東京・横浜・千葉などの大都市が控え、海上交通の要衝となっている。しかしながら、これらの大都市からの都市下水・産業廃棄物などの湾内への流入が非常に大きいこと、さらに、湾口において狭められた地形であるので、湾内水と外海水とその交換があまり良くないことなどから、東京湾の水質は極めて悪い。このような事情から、東京湾での流況調査、および水質調査は以前から数多く行われており、たくさんの実測データが集められている。

東京湾における流れの要因としては、潮流、吹送流、密度流、海流の分枝流などが考えられるが、潮汐による潮流が最も大きな要因である。表-2に、東京湾周辺の潮汐の調和定数^{19,20)}を示す。潮型指数は、湾口で0.75、湾奥で0.60である。したがって、東京湾の潮汐は半日周潮がやや卓越した混合潮であることがわかる。以上のことより、ここでの計算例は開境界においてM₂（太陰半日周潮）の潮位振幅を境界条件として与えた。

三浦半島の城ヶ島と房総半島の岩井袋を線ぶ線以北の東京湾を、図-21に示すごとく、節点数167、要素数262の三角形要素に分割した。地形の複雑な浦賀水道周辺では細かく、外境界付近および湾奥では粗い要素となっている。この三角形要素の大きさは、最大で7.5 km²（正方形格子に直すと、一辺が約2.74 km）、最小で1.8 km²（一辺が約1.34 km）になっている。要素の分割法は、潮流の流線を考慮に入れ、また隣り合う要素間の面積が、あまり急激に変化しないことが望ましい。さらに、三角形の形状は、なるべく正三角形に近いことが望ましく、鋭角な三角形は避ける必要がある。特に、陸岸境界において、鋭角三角形をとることは望ましくない。

以上のような制約はあるが、有限要素法の特徴のひとつとして、三角形要素の形状、および大きさが任意に選べることもある。このことは、計算時間の節約、特に、タイムステップの大きさを決める際に、重要な役割を果たす。タイムステップによる計算の安定条件は、長波の進行速度を考慮して

$$\Delta t_{cr} < \frac{\alpha_f \Delta S}{\sqrt{2gh}} \quad (6.6)$$

で与えられる。く(矩)形湾の場合と異なって、一様水深、一様三角形要素でない場合には、タイムステップの制約条件は、水深の大きい所、あるいは三角形要素の小さい所で最も厳しいものになると思われる。いま、 $\alpha_f=1.0$ と仮定した場合、外境界付近において $h=300\text{m}$ 、 $\Delta S=3000\text{m}$ 、また浦賀水道において $h=90\text{m}$ 、 $\Delta S=1500$

mであることから、これを式(6.6)に代入すると、

$$\Delta t_{cr} = \frac{3000}{\sqrt{2 \times 9.8 \times 300}} = 39.1(\text{s}) \text{ 外境界} \quad (6.7)$$

$$\Delta t_{cr} = \frac{1500}{\sqrt{2 \times 9.8 \times 90}} = 35.7(\text{s}) \text{ 浦賀水道} \quad (6.8)$$

となる。これらの要素が三角形（等価の面積の正方形格子よりも辺の長さが大きい）であることを考慮して、 ΔS の大きさに $\sqrt{3}/2$ を乗ずると、

$$\Delta t_{cr} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 35.7 = 30.9(\text{s}) \quad (6.9)$$

となる。したがって、ここではタイムステップとして30秒を採用した。

表-3に、今回実施した東京湾での潮流計算のケース一覧を示す。く(矩)形湾の場合と同様、タイムステップ、水平渦動粘性係数、慣性項の影響などについての考察を加えている。また、ある領域についてのみ、非常に細かく要素分割した場合についての計算も実施した。

表-3 東京湾における潮流計算の計算ケース（有限要素法）

| ケース番号 | タイムステップ | 水平渦動 | 海底摩擦 | 慣性項 | その他 |
|--------|---------|------|-------|-----|-------|
| FEM-1 | 30 | 200 | 0.02 | 有 | |
| FEM-2 | 30 | 500 | 0.02 | 有 | |
| FEM-3 | 30 | 500 | 0.002 | 有 | |
| FEM-4 | 40 | 200 | 0.02 | 有 | |
| FEM-5 | 60 | 200 | 0.02 | 有 | |
| FEM-6 | 30 | 200 | 0.02 | 無 | |
| FEM-7 | 30 | 200 | 0.02 | 有 | 細メッシュ |
| FEM-8 | 30 | 200 | 0.002 | 有 | 不安定 |
| FEM-9 | 30 | 50 | 0.02 | 有 | 不安定 |
| FEM-10 | 120 | 200 | 0.02 | 有 | 不安定 |
| FEM-11 | 120 | 500 | 0.02 | 有 | 不安定 |

FEM-1として、タイムステップ $\Delta t=30\text{s}$ 、海底摩擦係数 $f=0.02$ 、水平渦動粘性係数 $E_{xx}=E_{yy}=200\text{m}^2/\text{s}$ 、慣性項を含んだ場合についての計算を実施した。これらの粘性項は、水深10mに対しマニングの粗度係数が0.065とかなり大きいのが、後述するように、 $f=0.002$ のケースの結果が若干不安定であったため、このケースを基本的なケースとする。FEM-1の潮流図を、上潮最強時、下潮最強時、さらに潮汐残差流の順に図-22に示す。図中に示すベクトルは、次式によって三角形要素の中心において計算されたものである。

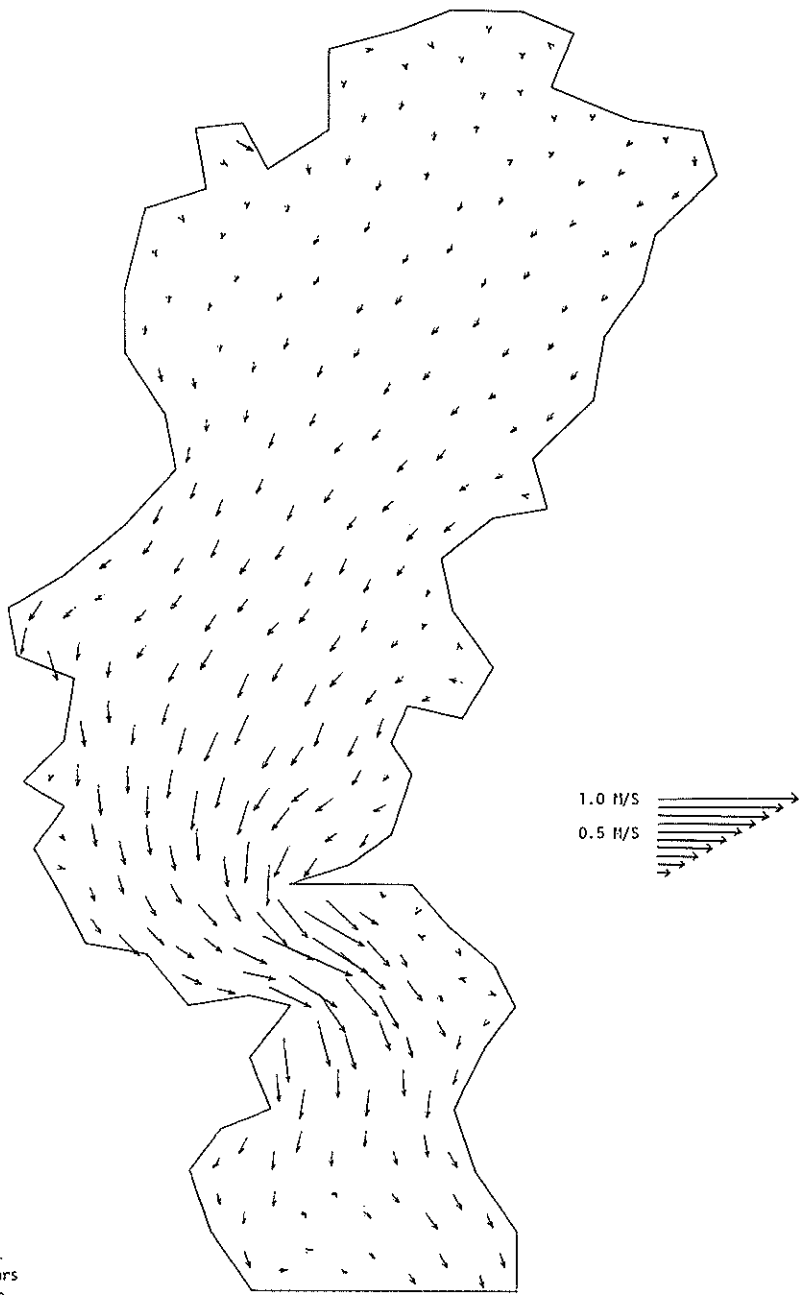
$$U_c = \frac{(U_1 H_1 + U_2 H_2 + U_3 H_3)}{(H_1 + H_2 + H_3)} \quad (6.10)$$

$$V_c = \frac{(V_1 H_1 + V_2 H_2 + V_3 H_3)}{(H_1 + H_2 + H_3)} \quad (6.11)$$



CASE No. 1
 TIME 41 hours
 Time Step 30 s
 $E_{xx}, E_{yy}, E_{xy} = \frac{200}{s^2} M^2/S$
 Inertia Terms 有
 Element Size 粗

图-2 2(a) 潮流图(上潮最强时, FEM-1)



CASE No. 1
 TIME 47 hours
 Time Step 30 s
 $E_{xx}, E_{yy}, E_{xy} = \frac{200}{s} \text{ M}^2/\text{S}$
 Inertia Terms 有
 Element Size 粗

图-2 2(b) 潮流图(下潮最强时, FEM-1)

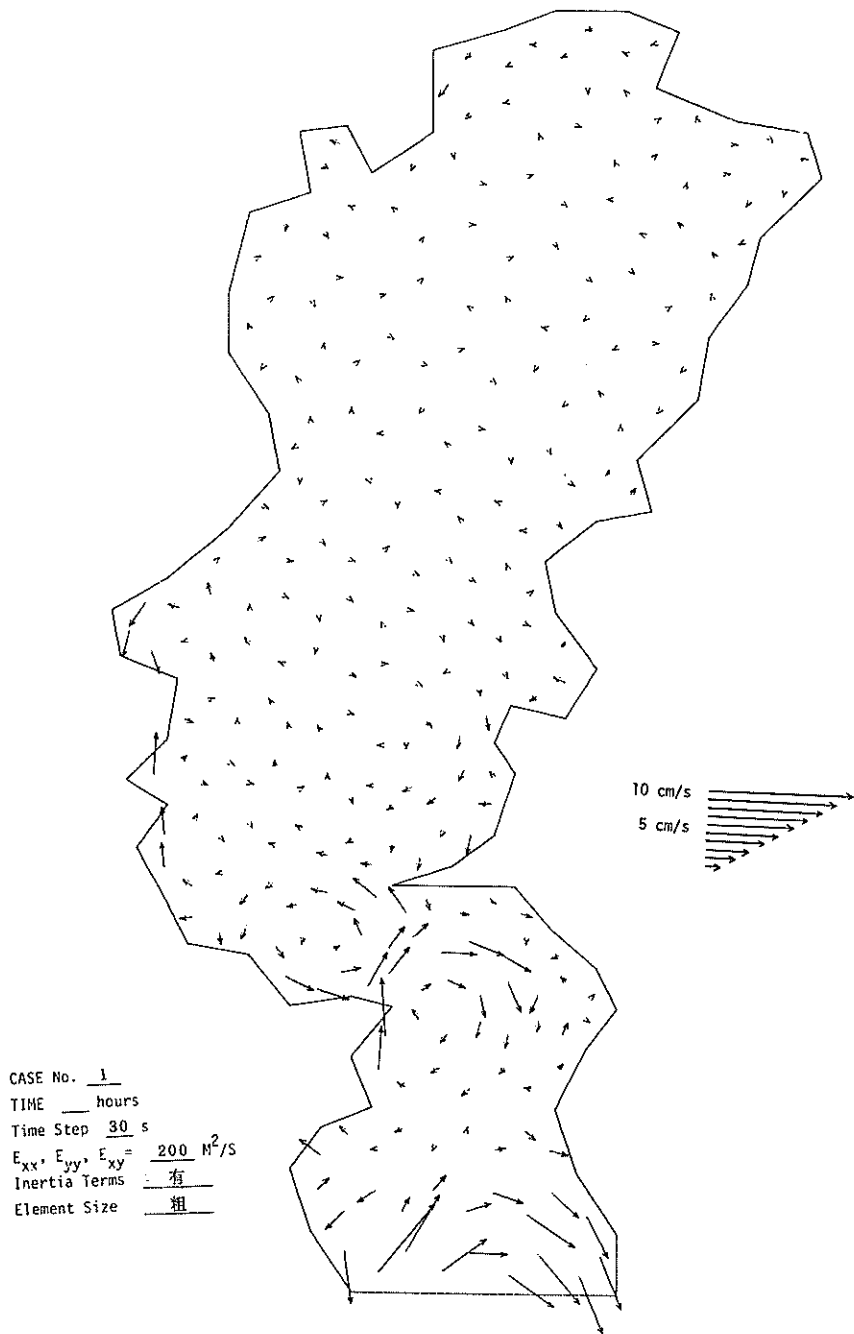


图-22(c) 潮汐残差流 (F E M - 1)

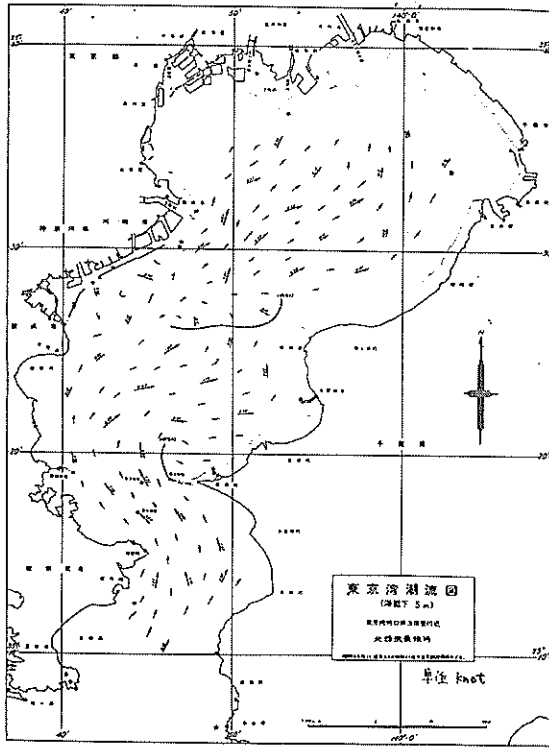


圖-2 3 (a) 潮流觀測結果(上潮最強時)

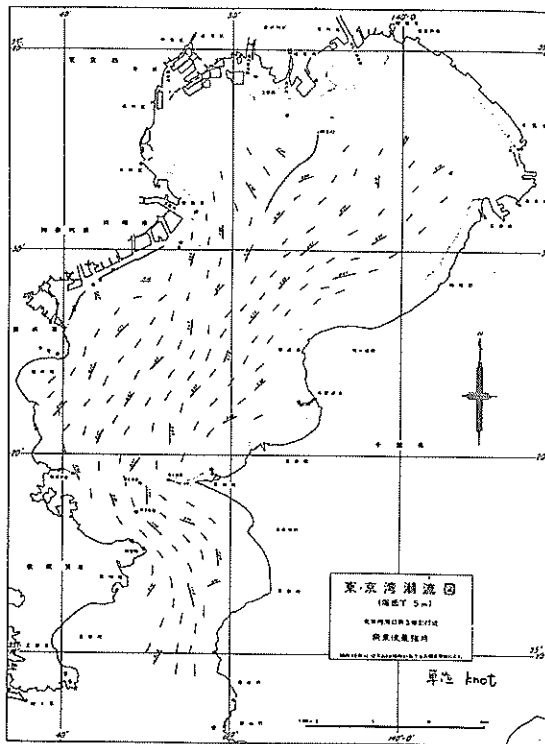


圖-2 3 (b) 潮流觀測結果(下潮最強時)

なお、式中のサフィックス1～3は、三角形要素の頂点の番号を示す。

流速の大きな浦賀水道において、最強時40 cm/sとなっている。また、湾奥では10 cm/s以下の遅い流速となっている。一周期間の平均流速としては、湾口付近において、神奈川県側より流出し、千葉県側より流入している。その大きさは、最大5 cm/s程度である。また、富津岬のように突出した地形の背後では、後流による循環流が形成されている。湾奥における潮汐残差流の大きさは、非常に小さく、その方向も定かではない。

検証のために、現地観測により得られた結果と計算結果とを比較する。図-23に示すのは、大潮期に実施された東京湾での観測結果²¹⁾である。大潮期の結果であるので、全般的に、観測結果の方が5割増程度、大きな値を示しているが、全体的な流況パターンは類似している。恒流については、観測が難しいのと、発生要因がいくつもあって、観測時期によって、その大きさを変えることから、断定的なパターンを示すのは困難である。図-24に示すのは、冬季の季節風が卓越している時期の恒流図²²⁾である。湾内が、大きな時計廻りの循環流となっている。このようなパターンは、計算結果からは見い出せない。しかしながら、どの観測結果をみても、浦賀水道部における恒流は、富津側で流入、観音崎側で流出するというパターンになり、このことは、この海域での恒流は

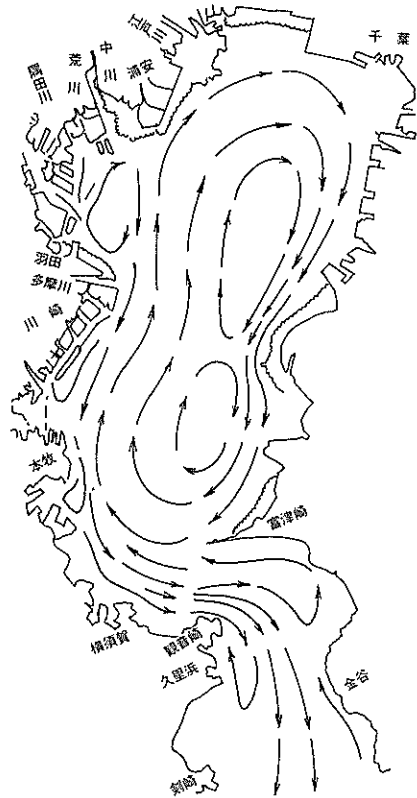


図-24 恒流図

基準点

表-4 東京湾における潮流の調和定数表(冬季)

| 測点 | 層 m | M ₂ | | S ₂ | | K ₁ | | O ₁ | | 主流方向 ° | 潮流比 |
|-------|--------|----------------|------|----------------|-------|----------------|-------|----------------|------|-----------|------|
| | | R | K | R | K | R | K | R | K | | |
| | | cm/s | ° | cm/s | ° | cm/s | ° | cm/s | ° | | |
| st. 1 | -3 | 41.9 | 77.6 | 22.1 | 106.6 | 12.8 | 91.6 | 10.0 | 71.5 | 332 | 0.36 |
| | -15 | 38.5 | 70.6 | 22.4 | 103.8 | 11.7 | 91.7 | 8.3 | 65.8 | 340 | 0.33 |
| | B+5 | 30.3 | 56.2 | 16.3 | 90.1 | 8.4 | 92.6 | 8.3 | 60.7 | 355 | 0.36 |
| st. 2 | -3 | 21.5 | 57.4 | 11.1 | 93.3 | 5.9 | 99.4 | 5.5 | 69.2 | 333 | 0.35 |
| | -15 | 20.3 | 71.5 | 10.1 | 99.2 | 6.1 | 101.9 | 5.2 | 87.2 | 339 | 0.37 |
| | B+5 | 19.4 | 65.5 | 10.5 | 97.4 | 4.6 | 95.4 | 4.8 | 67.8 | 323 | 0.31 |
| st. 3 | -3 | 27.5 | 35.3 | 12.6 | 61.0 | 5.9 | 60.7 | 7.5 | 21.4 | 313 | 0.33 |
| | B+5 | 22.8 | 41.7 | 11.2 | 68.9 | 5.5 | 75.0 | 5.4 | 35.3 | 301 | 0.32 |
| st. 4 | -3 | 27.5 | 57.7 | 15.4 | 84.4 | 5.0 | 49.3 | 2.0 | 59.8 | 69 | 0.16 |
| | B+3 | 15.8 | 50.8 | 7.7 | 70.8 | 2.8 | 68.3 | 2.4 | 93.9 | 63 | 0.22 |
| st. 5 | -3 | | | | | | | | | | |
| | B+3 | 13.6 | 55.5 | 6.8 | 87.0 | 4.7 | 97.6 | 1.5 | 80.0 | 34 | 0.30 |
| st. 6 | -3 | 11.2 | 75.8 | 6.2 | 113.5 | 1.3 | 100.1 | 1.6 | 87.4 | 50 | 0.17 |
| | B+5 | 10.2 | 53.5 | 5.9 | 81.7 | 3.4 | 106.0 | 2.8 | 73.2 | 52 | 0.39 |
| st. 7 | -3 | 11.2 | 79.0 | 7.2 | 111.8 | 2.7 | 133.1 | 4.6 | 80.8 | 15 | 0.40 |
| | B+3 | 5.3 | 50.1 | 3.3 | 64.6 | 3.4 | 79.5 | 2.3 | 80.1 | 20 | 0.66 |
| st. 8 | -3 | 5.8 | 68.7 | 3.2 | 92.4 | 1.3 | 58.6 | 1.4 | 23.6 | 74 | 0.30 |
| | B+3 | 5.6 | 62.8 | 2.6 | 88.0 | 2.9 | 81.8 | 1.6 | 43.2 | 61 | 0.55 |

•各分潮流のR(流速), K(遅角)は主流方向に投影したときの値

$$\text{潮流比} = \frac{(R_t + R')}{(R_m + R_s)}$$

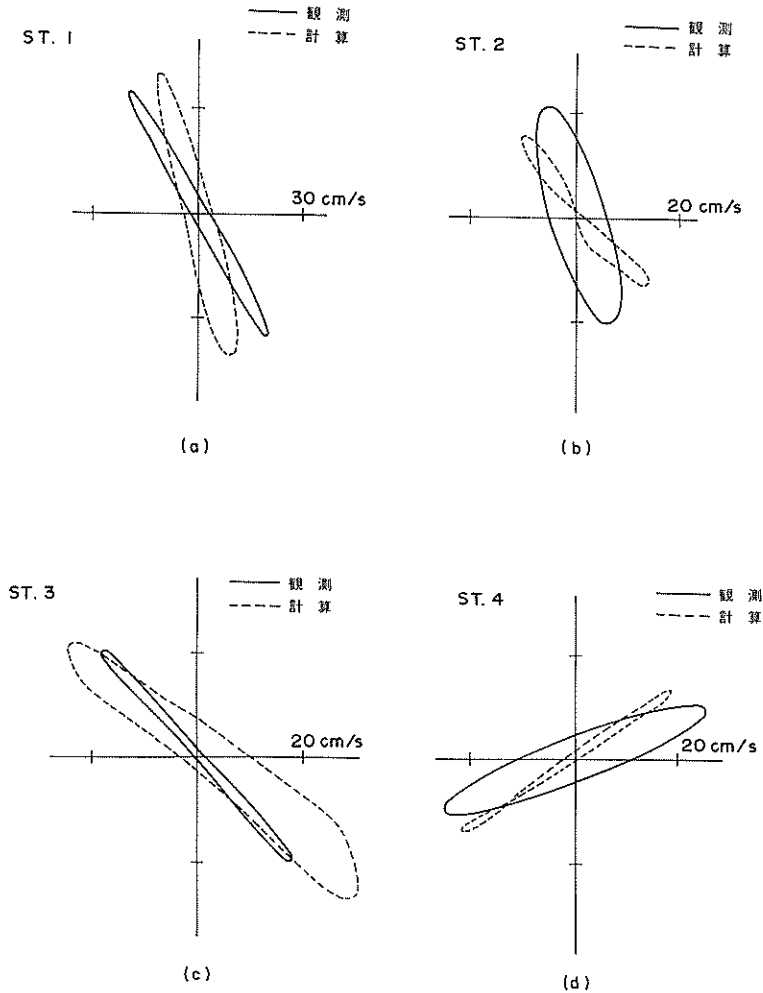


図-25 計算結果(FEM-1)と現地観測データ(M_2 潮)の比較(1)

潮汐残差流が最も卓越していることを示しており、計算結果においても、同様のパターンが得られている。最近実施された観測結果より、潮流の調和定数を求めたのが表-4^{23,24)}である。この結果の M_2 分期成分の潮流のホドグラフを比較したものが図-25である。表-4の測定点の位置および、図-25の比較した測点については、図-26に示す。図中において、実線が観測から得られた M_2 潮成分の潮流楕円、破線が計算結果である。若干の相違はあるが、ほぼ満足できる計算結果であると思われる。

次に、水位変化についての考察を行う。表-2からもわかるように、東京湾の M_2 潮の振幅は湾奥に行くに従って1.4倍程度に増幅している。また、遅角も 15° 前後遅れている。計算結果についての潮位振幅と位相遅れを示したものが表-5である。湾口の横須賀、久里浜付近で計算結果の方が振幅が大きく、位相遅れも大きい結果

となっているが、湾奥での東京・千葉の結果は、現地の M_2 潮の調和定数値とほぼ同じ値が得られている。このことは、湾奥における半日周潮の潮汐は、湾口におけるものよりも、1.4倍程度に増幅され、また位相は 10° 前後遅れる傾向を示している。

FEM-2として、水平渦動粘性係数を $500\text{m}^2/\text{s}$ に増加した場合の結果を示す。節約番号37(浦賀水道)、70(湾中央)、および126(湾奥)の3地点において、流速の絶対値の比較を図-27に示す。FEM-1と比較して、節点37の湾口部においては、流速が若干小さくなるが、その他の海域においては、ほとんど変化がない。このことは、水平混合項は地形が複雑で流速の大きいところでは効果が大きい。湾中央部さらに湾奥のように、流速の勾配が小さいところでは、あまり効果がないものと考えられる。また、図-28に示す潮汐残差流の結果が

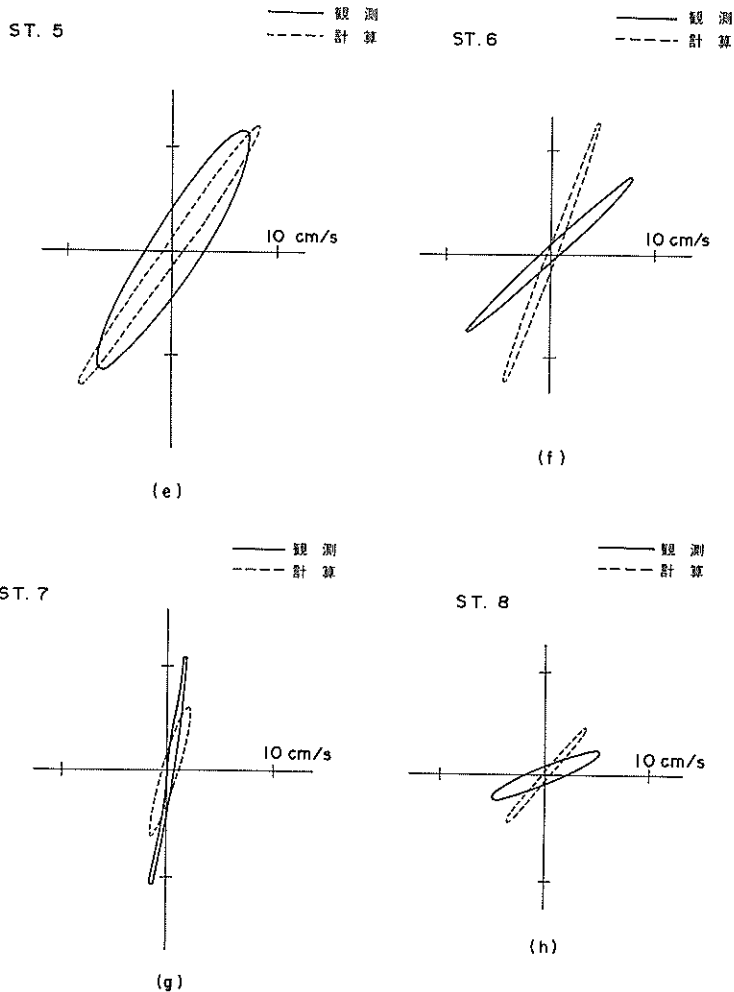


図-25 計算結果(FEM-1)と現地観測データ(M₂潮)の比較(2)

らもわかるように、FEM-1の方が2倍程度大きく、さらに地形背後にできる循環流の大きさもFEM-1の方が大きい。このように、一周期間の平均流速としての潮汐残差流は、水平渦動粘性係数の大きさによって、かなり左右される。ただし、水平渦動粘性係数をあまり小さくすると解は不安定となる(FEM-9)。

次に、FEM-8として、 $f=0.002$ 、 $E_{xx}=200\text{m}^2/\text{s}$ のケースを実施したが、計算は不安定であった。そこで、 $E_{xx}=500\text{m}^2/\text{s}$ と増加させたものがFEM-3である。海底摩擦係数 $f=0.002$ という値は、水深30m、マニングの粗度係数 $n=0.025$ に相当し、浅い海域では小さすぎるが、深い海域では大きすぎ、ほぼ東京湾の平均的な値であると思われる。図-25に、前述の3地点についての流速の比較を示す。FEM-2、すなわち $f=0.02$ の場合とほとんど変化はないが、位相が若干進んでいる傾向

がみられる。以上のように、海底摩擦係数を大きくすると、流速を若干小さくするほかに、位相を遅れさせる働きがあり、さらに計算の安定化にも若干貢献しているようである。今回実施された計算ケースの潮流図については、すべて付録A.7に示すが、FEM-3についてみると、水深の浅いところで若干流速が早く、不自然な流れとなっている。

タイムステップの影響については、 $\Delta t=40\text{s}$ 、 $\Delta t=60\text{s}$ にした場合のFEM-4、FEM-5の結果は、FEM-1とほとんど同じ結果が得られたが(表-6参照)、 $\Delta t=120\text{s}$ (FEM-10)の場合には、計算が不安定であった。さらに、 $E_{xx}=500\text{m}^2/\text{s}$ にした増加しても、 $\Delta t=120\text{s}$ (FEM-11)のケースは不安定であった。以上のことより、今回の東京湾の計算は計算スピードの点から $\Delta t=60\text{s}$ で行うのが望ましい。

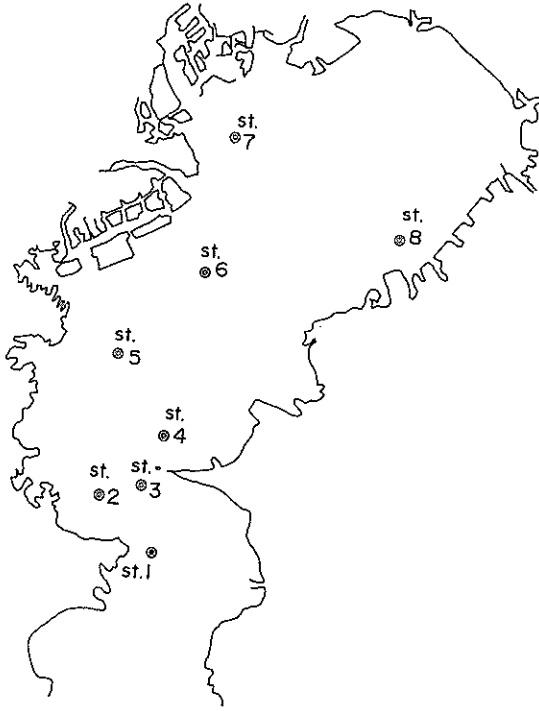


図-26 観測点

次に、FEM-6として、慣性項を省略した場合についての結果を示す。図-29(a), (b)には、上潮最強時および下潮最強時の潮流図を、図-30には潮汐残差流を示す。また、慣性項を含んだ場合のFEM-7の潮流図は図-22(a), (b)に、潮汐残差流を図-22(c)に示す。これらの図を比較してみると、潮流図の結果には、そう大きな差異は認められないが、潮汐残差流が、FEM-6の結果にはほとんどなく、この点に関してはFEM-1の結果と大きく異なっている。このことより、潮汐残差流は慣性項によって生成されることを示している。以前は、電子計算機のスピードが遅いこともあって、計算スピードをあげるた

表-5 潮位振幅と位相遅れ（有限要素法による計算結果と現地データの比較）

| 節点番号 | 地名 | 計算結果 | | 現地データ | | 比較 | |
|------|-----|------|-------|-------|-------|------|------|
| | | 振幅 | 遅角 | 振幅 | 遅角 | 計/現 | 計-現 |
| 1 | 城ヶ島 | 38.0 | 146.0 | 38 | 146 | 1.00 | 0.0 |
| 5 | 岩井袋 | 35.0 | 152.0 | 35 | 152 | 1.00 | 0.0 |
| 23 | 久里浜 | 39.5 | 161.0 | 35.8 | 148.0 | 1.10 | 13.0 |
| 35 | 横須賀 | 44.0 | 160.0 | 42.8 | 153.0 | 1.03 | 7.0 |
| 56 | 富津 | 47.0 | 158.0 | 45 | 159 | 1.04 | -1.0 |
| 87 | 横浜 | 44.5 | 157.0 | 46.7 | 155.2 | 0.95 | 1.8 |
| 137 | 東京 | 48.5 | 161.0 | 50.1 | 162.4 | 0.97 | -1.4 |
| 158 | 千葉 | 50.5 | 159.0 | 51 | 155 | 0.99 | 4.0 |

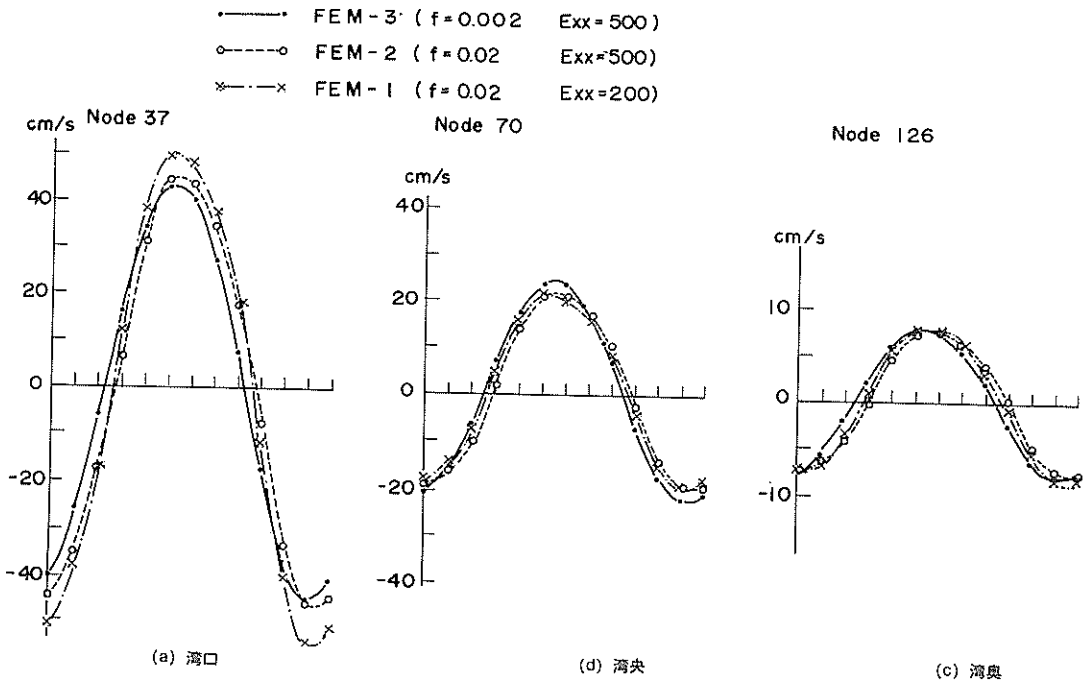


図-27 海底摩擦係数の影響（東京湾の場合）

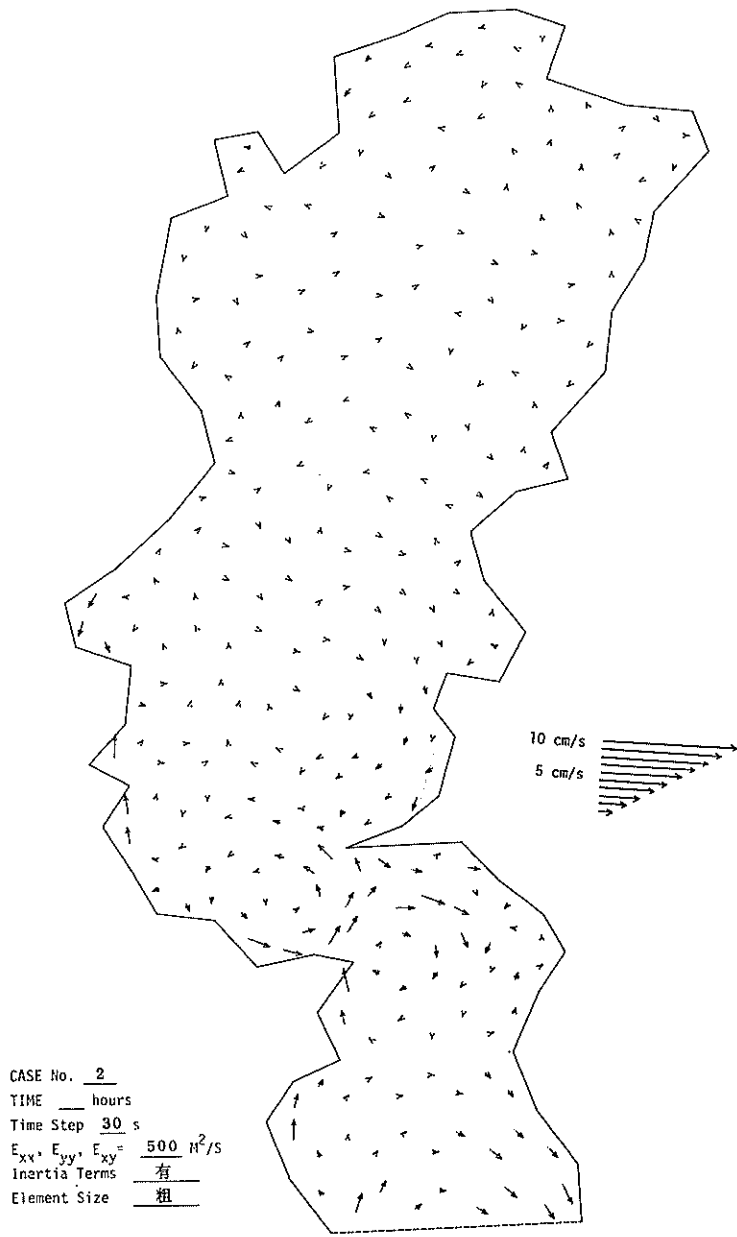


圖-28 潮汐殘差流 (F E M - 2)

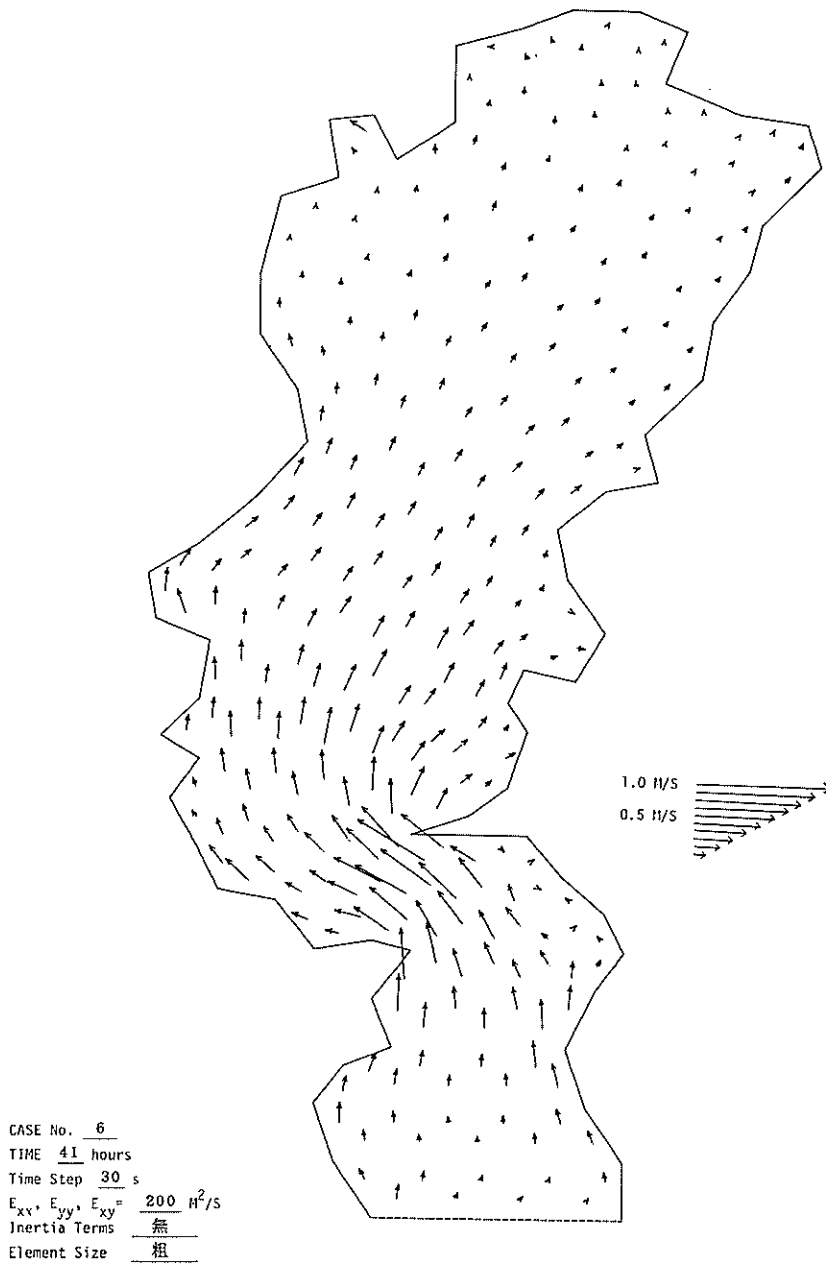


図-29(a) 潮流図(上潮最強時, FEM-6, 慣性項を含まず)

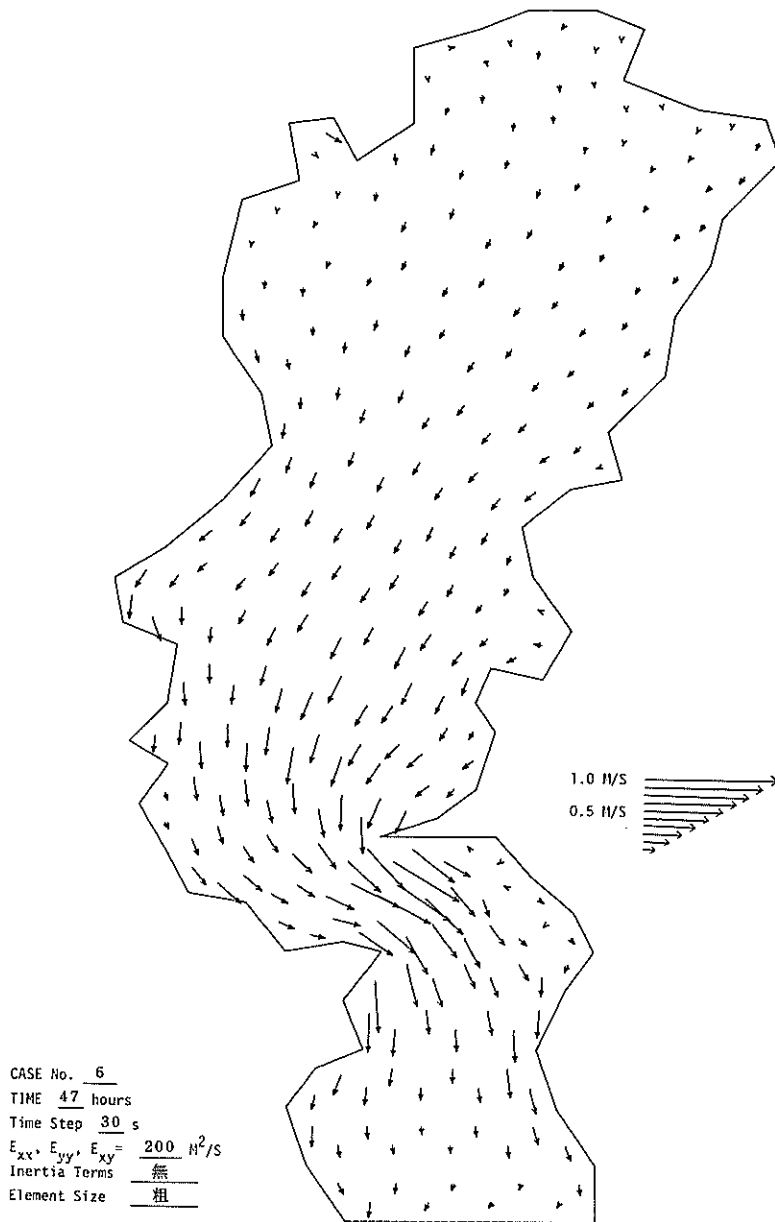


図-29(b) 潮流図(下潮最強時, FEM-6, 慣性項を含まず)

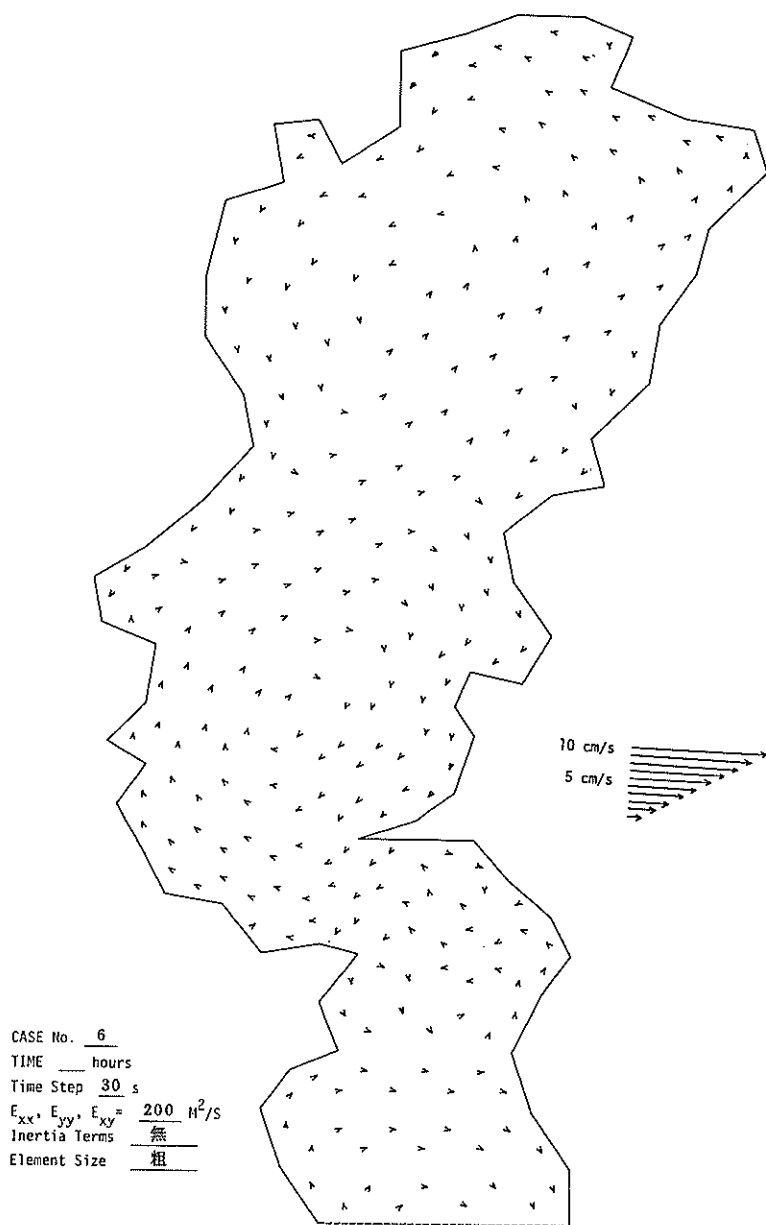
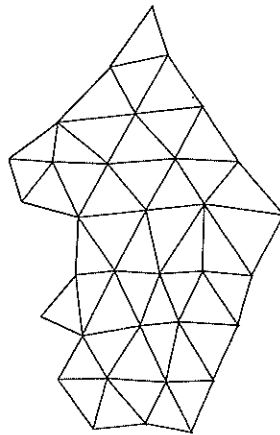


図-30 潮汐残差流 (FEM-6, 慣性項を含まず)

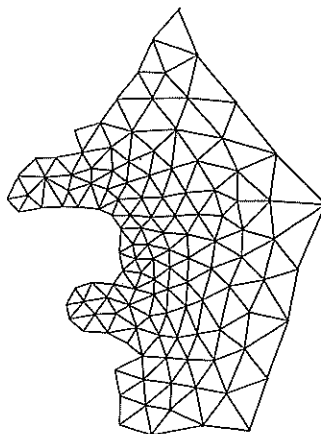
めに、または計算の不安定の要因を取り除くためなどの理由から、省略²⁵⁾されたり、あるいは簡易な取り入れ方法²⁶⁾により計算された例がある。しかしながら、長期的な物質の拡散パターンは、平均流としての恒流によって支配されることが強調²⁷⁾されており、潮汐残差流は極めて重要なものである。したがって、潮流あるいは拡散現象のような場合には、慣性項を含んで計算する必要がある。

最後に、有限要素法の特徴を生かして、一部の海域についてのみ、三角形要素の分割を細かくした場合についての計算をFEM-7に示す。これは、汚染の負荷源、あるいは、埋立などの影響を詳細に調べる場合に、計算領域全体を細かく分割すると、非常に不経済である。したがって、調査の対象領域についてのみ細かく分割し、他

の領域については粗い分割で計算を実行する。例として、横浜港周辺を細かく分割した場合について示すと、図-31のようになる。当初、わずか44の三角形要素に分割されていた領域を、204の三角形要素に再分割し、残りの218の要素については、そのままである。これより、横浜港付近での三角形要素の面積は約 0.5 km^2 （正方形格子に直すと一辺が約700m）になっている。しかしながら、この付近の海域は、そう水深が大きくないので、タイムステップについては、従来の30sがそのまま使用できる。計算結果の潮流図を図-32(a), (b)に、潮汐残差流を図-33に示す。また、FEM-7とFEM-1の比較を図-34に示す。これらの図より、要素の再分割をしない領域に対しては、ほとんど変化ないことがわかる。また、再分割した領域についても、陸岸境界付近を除いては、



(a) 粗分割 (要素数44)



(b) 細分割 (要素数204)

図-31 粗い分割と細かい分割

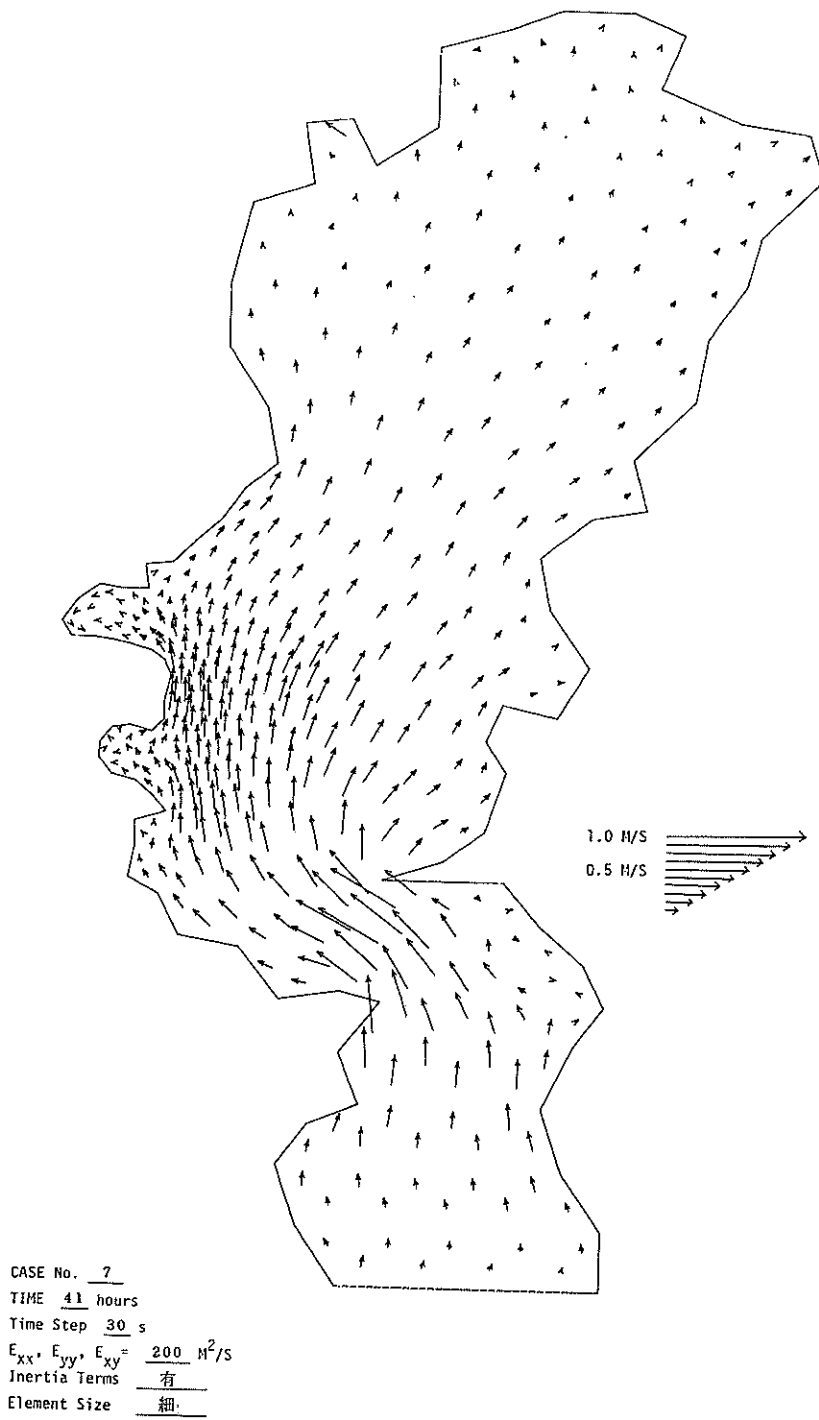
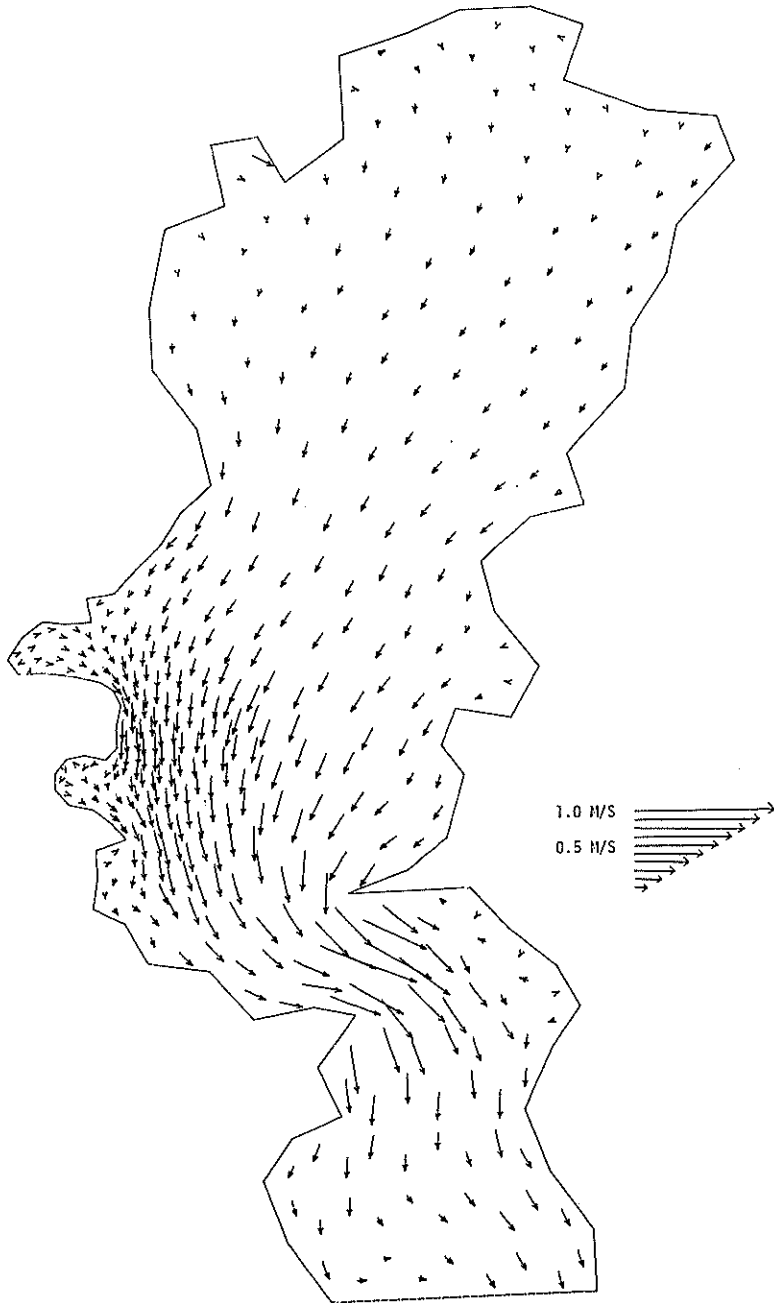


図-3 2(a) 潮流図(上潮最強時, FEM-7, 細分割による結果)



CASE No. 7
 TIME 47 hours
 Time Step 30 s
 $E_{xx}, E_{yy}, E_{xy} = \frac{200}{\text{有}}$ M^2/s
 Inertia Terms 有
 Element Size 細

図一 3 2 (b) 潮流図 (下潮最強時, FEM-7, 細分割による結果)

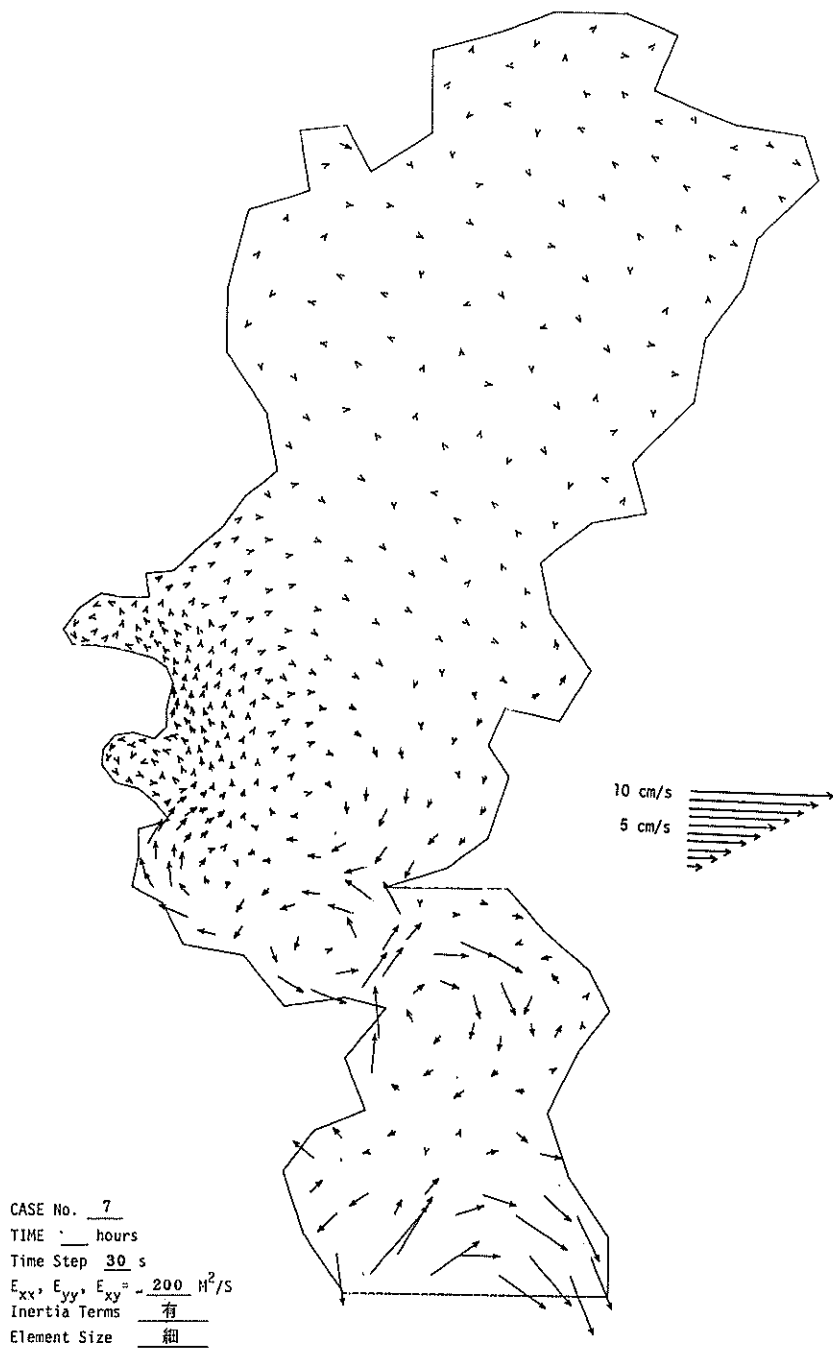


図-33 潮汐残差流 (FEM-7, 細分割による結果)

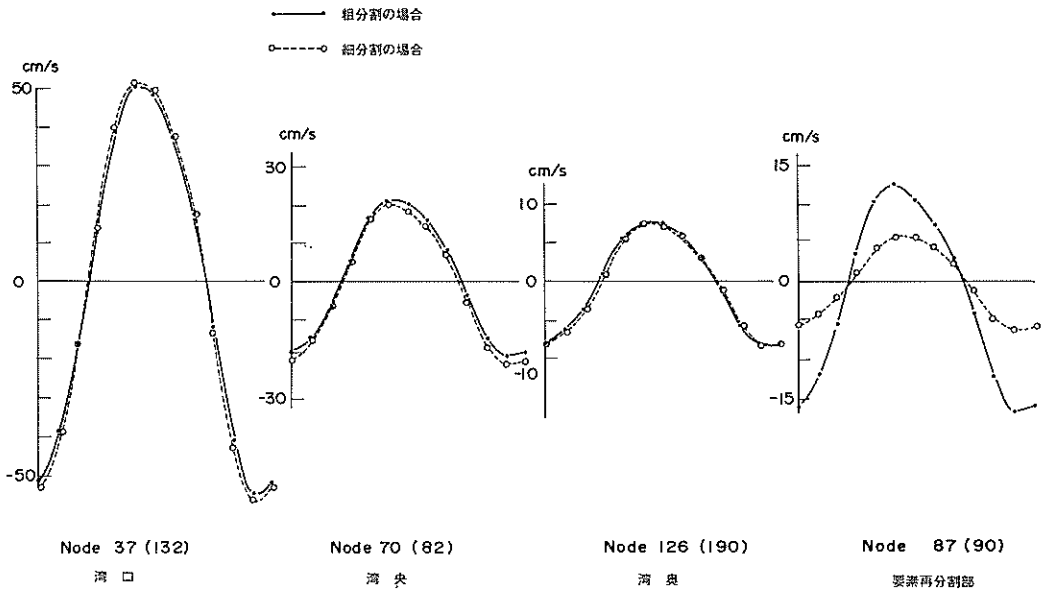


図-3.4 粗分割 (FEM-1) と細分割 (FEM-7) による比較

表-6 タイムステップによる影響

(有限要素法Node 37での流速)

| | $\Delta t=30s$ | | $\Delta t=40s$ | | $\Delta t=60s$ | |
|------|----------------|-------|----------------|-------|----------------|-------|
| | U | V | U | V | U | V |
| 36 h | 5.01 | -1.04 | 5.01 | -1.04 | 5.01 | -1.04 |
| 37 h | 37.4 | -7.6 | 37.4 | -7.6 | 37.5 | -7.6 |
| 38 h | 16.4 | -3.1 | 16.4 | -3.1 | 16.5 | -3.1 |
| 39 h | -11.8 | 3.6 | -11.8 | 3.6 | -11.7 | 3.5 |
| 40 h | -36.9 | 10.9 | -36.9 | 10.9 | -36.8 | 10.8 |
| 41 h | -47.9 | 15.4 | -47.9 | 15.4 | -47.8 | 15.4 |
| 42 h | -46.0 | 15.8 | -45.9 | 15.8 | -45.9 | 15.8 |
| 43 h | -35.4 | 13.1 | -35.3 | 13.1 | -35.4 | 13.1 |
| 44 h | -16.3 | 7.5 | -16.2 | 7.5 | -16.3 | 7.5 |
| 45 h | 11.4 | -0.7 | 11.4 | -0.8 | 11.3 | -0.7 |
| 46 h | 39.4 | -8.2 | 39.4 | -8.2 | 39.3 | -8.2 |
| 47 h | 52.8 | -11.2 | 52.7 | -11.2 | 52.7 | -11.2 |
| 48 h | 5.02 | -1.04 | 5.01 | -1.04 | 5.01 | -1.04 |

注) $\Delta t=120s$ の場合は不安定

かなり類似した結果となっている。陸岸境界付近については、地形が若干相違していること、また陸岸境界条件によって左右されていた流速の領域が、細かく分割することにより、拘束が解かれたことなどにより、結果に若干の相違が表れたものと思われる。

表-7に、粗分割と細分割での計算条件を示す。最小の三角形要素の面積が1/4に減少し、要素数が1.6に増加しても、同じタイムステップを用いた場合には、計算時間が約2.1倍に増加したにすぎない。また、粗い領域

表-7 有限要素の細かい分割と粗い分割

| | 粗い分割 (FEM-1) | 細かい分割 (FEM-7) |
|---------|-----------------------------|-----------------------------|
| 要素数 | 262 | 422 |
| 節点数 | 167 | 258 |
| 最大要素面積 | 7.5 km ² (2.72) | 7.5 km ² (2.72) |
| 最小要素面積 | 1.8 km ² (1.34) | 0.45 km ² (0.67) |
| 平均要素面積 | 4.35 km ² (2.09) | 2.70 km ² (1.64) |
| タイムステップ | 30 s | 30 s |
| 計算時間 | 53分 | 113分 |

と細かい領域での接続が非常にスムーズである。

7. 潮流計算における差分法と有限要素法の比較

6.において、く(矩)形湾における長波の計算、および東京湾における潮流計算を有限要素法によって実施した。また、筆者は以前から同様な計算を差分法(特にADI法)によって行ってきた。ここでは、差分法と有限要素法との比較を、計算手法、計算結果、計算スピード、精度、安定性、および両方法が持つ特徴などの観点から検討した。

差分法は、基礎となる微分方程式を有限の差分式に置き換えることにより近似を行うもので、直接的な近似計算であると考えられる。一般に、差分法においては、規則的に配置された正方形の格子の特定点で定義された変

数により計算が実行される。したがって、地形表現は等間隔の正方格子を用いざるをえず、不自然な階段状の地形となる。

東京湾を2 km のメッシュに分割した場合の地形表現を図-35に示す。図中に示す座標は、それぞれ湾口(11, 8), 湾中央(15,7), 湾奥(26,12)での代表点である。この場合の格子数は291個である。図-21の有限要素法による地形表現(要素数262)と比べても、若干

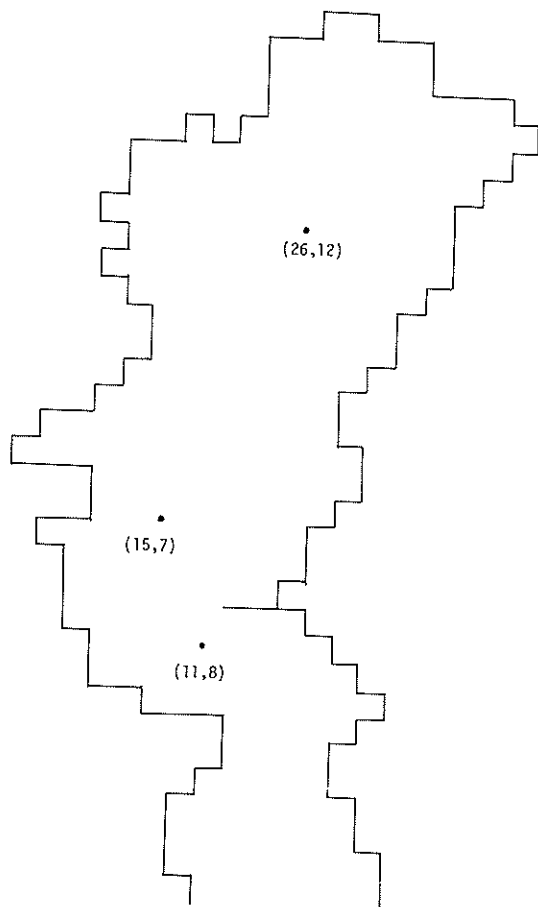


図-35 正方格子による東京湾の地形表現

表-8 東京湾における潮流計算の計算ケース (ADI法)

| ケース番号 | タイムステップ | 水平渦動 | 海底摩擦 |
|-------|---------|------|-------|
| ADI-1 | 40 | 230 | 0.025 |
| ADI-2 | 40 | 58 | 0.025 |
| ADI-3 | 60 | 58 | 0.025 |
| ADI-4 | 120 | 58 | 0.025 |

(マンングの粗度係数)

不自然な地形となっていることがわかる。

今回行ったADI法による東京湾の潮流計算のケースを表-8に示す。ADI法とは、差分法の一解法であって、計算が比較的安定であり、かつ計算スピードも早いところから、最近、最も一般に用いられている方法である。ADI法によるタイムステップは次式によった。

$$\frac{\Delta t}{2} < \frac{\alpha_i \cdot \Delta S}{\sqrt{g \cdot h_{\max}}} \quad (7.1)$$

ここに、 ΔS : 格子間隔

h_{\max} : 最大水深

α_i : (1~3)の係数

である。筆者らの経験では、 α_i の値は1.0あるいは2.0程度である。いま、 $\Delta S=2000\text{m}$, $h_{\max}=300\text{m}$ を代入すると、 $\Delta t/2$ は36~72秒程度となる。いまここでは、40秒を採用した。水平渦動粘性係数としては $230\text{m}^2/\text{s}$, すなわち式(2.55)において $\alpha_i=0.2$,を用いた。海底摩擦係数については、マンングの粗度係数 $n=0.025$ を採用している。以上の条件で、ADI法により求めた東京湾の潮流計算の結果として、図-36(a), (b)に潮流図、図-37に潮汐残差流を示す。流速の早い湾口部において、下潮時の最大が約40 cm/s, 上潮時の最大が47 cm/sであった。

ここで、有限要素法とADI法との比較を行う。マンングの粗度係数 $n=0.025$ は、水深 $h=30\text{m}$ とすると、海底摩擦係数 $f=0.002$ に相当するので、FEM-1とADI-1の比較を行う。水平渦動粘性係数の大きさを考えると本来FEM-8と比較する必要があるかと思われるが、この解が不安定であったことから、FEM-1を用いた。図-38に、両者の湾口(節点番号37, 格子(11, 8)), 湾中央(節点番号70, 格子(15, 7)), および湾奥(節点番号126, 格子(26, 12))での流速の比較を示す。実線が有限要素法の結果であり、破線が差分法の結果である。下潮時の流速が有限要素法の方が若干大きい値を示しているほかは、全般的に似かよった結果であると思われる。ただし、位相差については、有限要素法の方が遅れる傾向にある。ADI法と有限要素法は地形表現が異なること、さらに、両者を比較している地点も厳密には一致していないことから、それぞれの結果を完全に一致させることには無理があると思われる。しかしながら、図-36の潮流図、および図-38の流速比較図より、両者は計算結果は類似しているものと考えて差し支えないと思われる。潮汐残差流については、湾口部の浦賀水道において2~3 cm/s程度となっており、千葉県側より流入、神奈川県側より流出しており、このパターンは有限要素法の結果と同じである。しかし、地形の背後にて

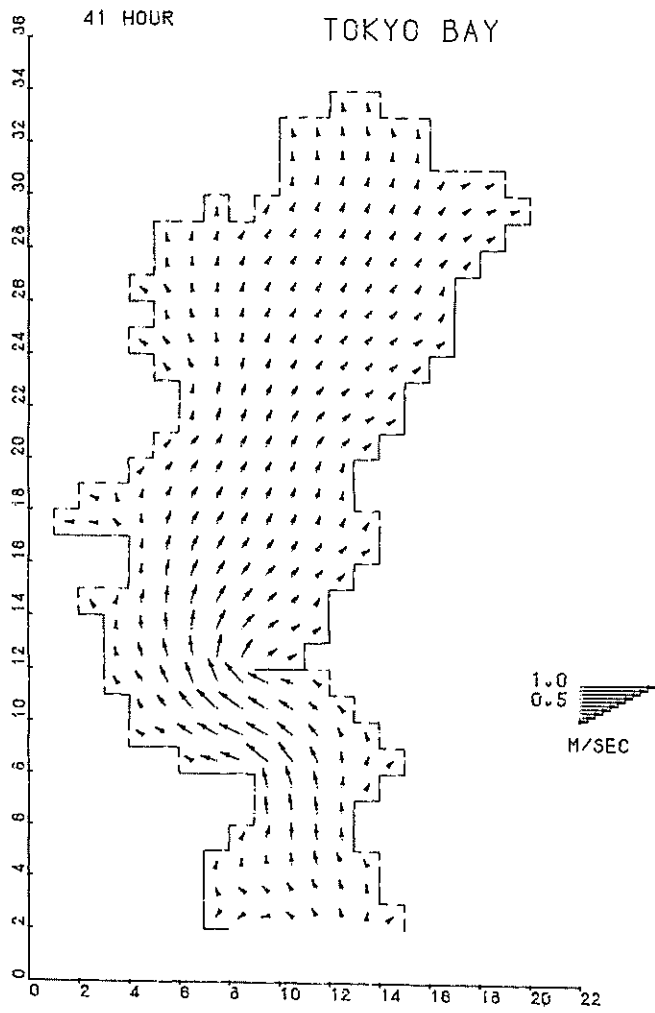


图-3 6(a) 潮流图(上潮最强时, ADI-1)

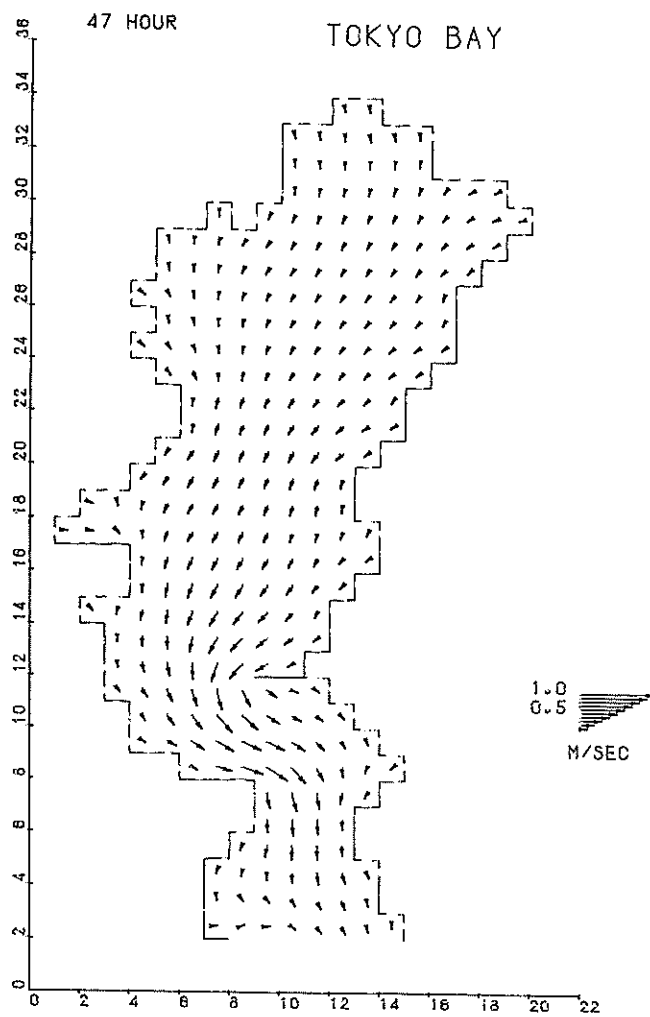


図-36(b) 潮流図(下潮最強時, ADI-1)

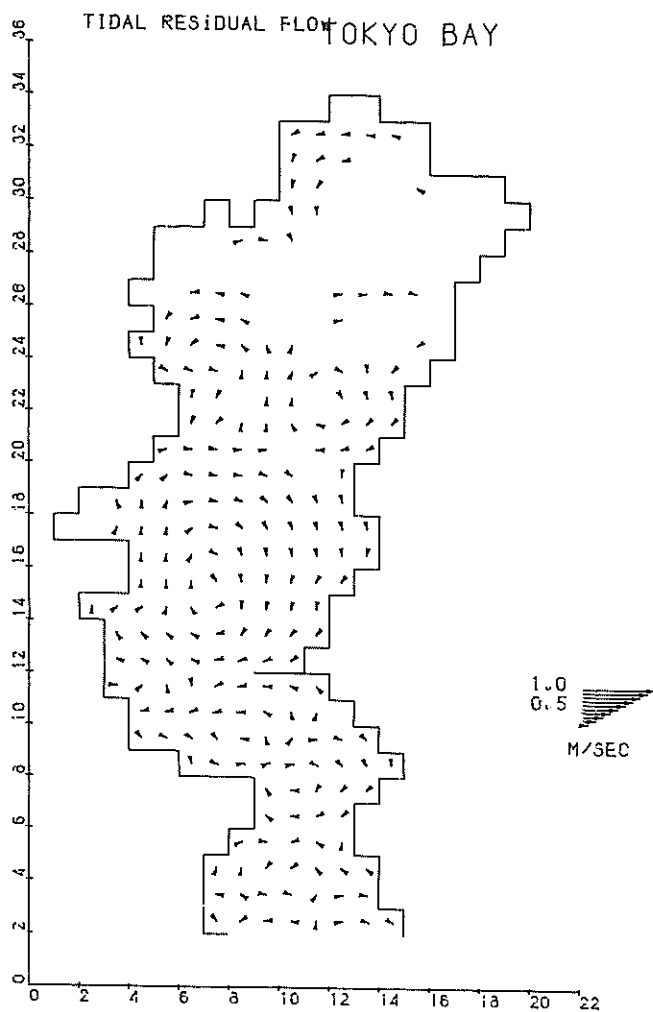


圖-37 潮汐殘差流 (ADI-1)

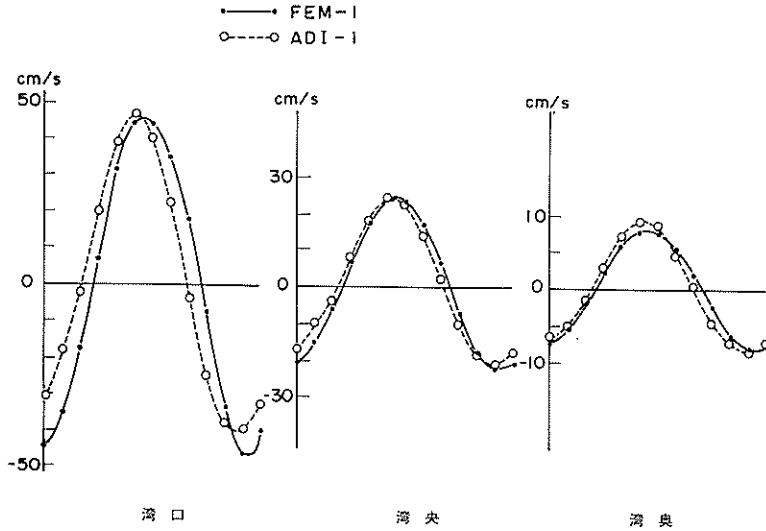


図-38 有限要素法 (FEM-1) と差分法 (ADI-1) の比較

きる循環流は ADI 法の方が大きい。この点は、水平渦動粘性係数の大きさにも関係するものと思われるが、計算法の相違による結果であるものと考えられる。

表-9には、ADI-1での潮位振動の振幅と位相遅れの結果を、沿岸の8地点について現地の M_2 潮の調和定数値と比較して示す。潮位振幅が湾奥に向かうに従って増幅する現象は再現されているが、位相遅れの大きさが小さい。このことは、表-5の有限要素法の結果において位相が遅れることと比較すると、逆の現象であり、興味深い結果である。

ADI-2として、水平渦動粘性係数の大きさを $58 \text{ m}^2/\text{s}$

表-9 潮位振幅と位相遅れ
(ADI法による計算結果と現地データの比較)

| | 計算結果 | | 現地データ | | 比較 | |
|-----|------|-----|-------|-------|------|-------|
| | 振幅 | 遅角 | 振幅 | 遅角 | 計/現 | 計-現 |
| 城ヶ島 | 38.0 | 146 | 38 | 146 | 1.00 | 0.0 |
| 岩井袋 | 35.0 | 152 | 35 | 152 | 1.00 | 0.0 |
| 久里浜 | 38.3 | 147 | 35.8 | 148.0 | 1.06 | -1.8 |
| 横須賀 | 42.3 | 149 | 42.8 | 153.0 | 0.99 | -4.0 |
| 富津 | 44.7 | 150 | 45 | 159 | 0.99 | 1.0 |
| 横浜 | 46.9 | 149 | 46.7 | 155.2 | 1.00 | -6.2 |
| 東京 | 50.1 | 151 | 50.1 | 162.4 | 1.00 | -11.4 |
| 千葉 | 52.0 | 150 | 51 | 155 | 1.02 | -5.0 |

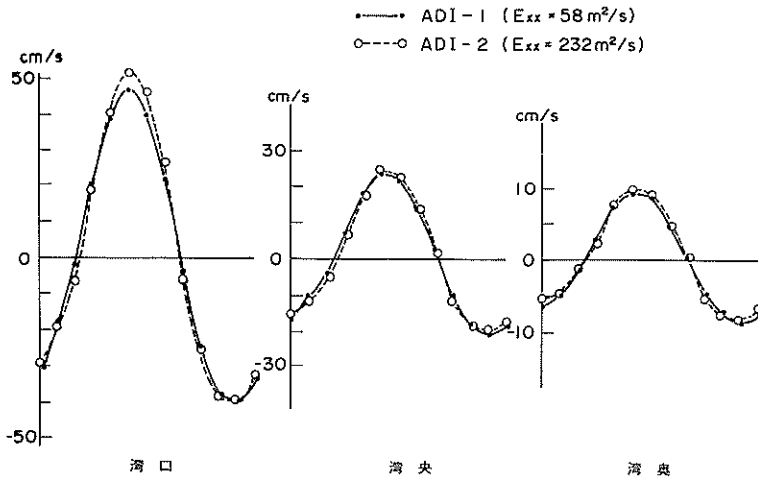


図-39 水平渦動粘性係数の影響 (ADI法)

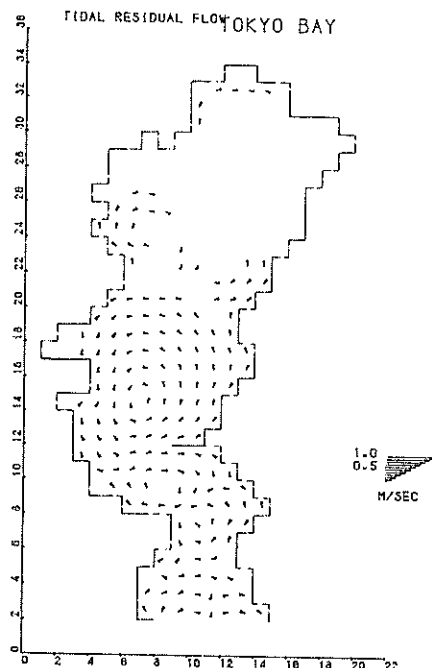


図-40 潮汐残差流 (ADI-2)

にした場合の結果を示す。これは、有限要素法との比較のために、ADI-1における水平渦動粘性係数が $233 \text{ m}^2/\text{s}$ と、一般に考えられている値よりも大きいと思われるために、これを小さくしたケースについて検討したものである。図-39に示すごとく、潮流速が湾口部において10%程度大きくなっている他は、湾全体の流況はADI-1とADI-2は、ほとんど同じであった。しかし、図-40に示すごとく潮汐残差流の大きさは 5 cm/s 以上となり、かなり大きくなっている。潮位振幅および遅角については、ADI-1の場合とほとんど変化がない。

有限要素法において、 $f=0.002$ の時に $E_{xx}=200 \text{ m}^2/\text{s}$ のケースは不安定であった。また、 $f=0.02$ の時に $E_{xx}=50 \text{ m}^2/\text{s}$ のケースは不安定であった。このことから考えると、ADI法による潮流計算は比較的安定な計算手法であると考えられる。

次に、タイムステップ $\Delta t/2$ を60秒 (ADI-3)、120秒 (ADI-4) と変化させて計算を実行した。 $\Delta t/2=60$ 秒の場合には、 $\Delta t/2=40$ 秒の場合とほとんど変化がみられない。 $\Delta t/2=120$ 秒の場合でも、水位・流速の結果に数パーセント程度の変化が生じているが、全体的にみた場合に流況パターン等には、ほとんど変化は認められない。以上のことより、ADI法、 $\Delta t/2=120$ 秒 ($\Delta t=240$ 秒) という、非常に大きなタイムステップをもってしても計算可能であり、有力な計算手法

のひとつであると考えられる。しかしながら、潮流計算の安定性の問題については、筆者らの経験²⁸⁾では、地形形状、格子間隔、粘性項 (水平渦動粘性係数、海底摩擦係数)、外力条件、境界条件などによっても異なり、一概にはいえない。

以上、ADI法による東京湾の潮流計算の結果を、有限要素法による結果と比較しながら述べてきた。これらの結果を考察しながら差分法と有限要素法を比較したものが表-10である。この表より、差分法の長所としては、

表-10 差分法と有限要素法の比較

| 差分法 | 有限要素法 |
|----------------------------------|-----------------------------------|
| 微分方程式を差分化することにより近似を行う。 | 微分方程式を重み付き残差法 (ガラーキン法) によって近似を行う。 |
| 直接的で考えやすい。 | 間接的で考えにくい。 |
| 歴史が長い。 | 歴史が浅い。 |
| 安定性・精度についての検討が確立している。 | 安定性・精度についての検討がまだ確立していない。 |
| 地形表現が正方格子のため自然。 | 地形表現が任意の三角形のため容易。 |
| 計算スピードが早い。 | 計算スピードが遅い。 |
| 計算が比較的安定である。 (大きなタイムステップがとれる) | 計算が比較的安定である。 (大きなタイムステップがとれない) |
| 格子点での物理量。 | 要素内での物理量。 |

計算手法の歴史が長く、解法が比較的考えやすい点あげられる。また、計算が比較的安定で、したがってタイムステップが大きく取ることができ、計算スピードをあげることができる。これに対して、有限要素法では、地形表現が任意の形状、任意の大きさの三角形（あるいは四角形）により、実際の地形を忠実にできるといことがあげられる。このことは、地形表現の不自然さから生じる計算結果の誤差を取り除くことを意味し、解の精度の向上となる。また、ある領域についてのみ、要素分解を細かくすることが可能であることは、要素分割の仕方によっては計算時間においても、差分法と対抗できることを意味している。表-11に、今回行った計算ケースの

表-11 計算時間 (cpu) の比較

| | 差分法 (ADI) | 有限要素法 (粗要素) | 有限要素法 (細要素を含む) |
|---------|----------------------|---|--|
| 要素数 | 291 | 262 | 422 |
| 要素面積 | 一律 4 km ² | 平均 4.35 km ² 最大 7.5 最小 1.8 | 平均 2.70 km ² 最大 7.5 最小 0.45 |
| タイムステップ | 80 秒 | 30 秒 | 30 秒 |
| cpu | 14 分 | 53 分 | 113 分 |

cpu タイムを示す。この表に示すように、同程度の要素数、要素面積での場合は、ADI 法の方が、大きなタイムステップを取ることができ、cpu も有限要素法の約 1/4 となっており、かなり有利である。しかしながら、一部の領域についてのみ細かく分割して計算したい場合、例えば、FEM-7 のように、要素の大きさを 1/4~1/9 (すなわち一辺の長さを 1/2~1/3) にした場合、要素数は 1.6 倍に増加し、計算時間は 2.1 倍に増加したにすぎない。これは、細かい要素付近での水深があまり大きくないために、この領域でのタイムステップの条件が全体の制約条件とはならず、すなわち同じタイムステップで計算可能であったことによる。これに対して、ADI 法では、かりに、格子間隔を半分の 1 km にした場合、計算領域の格子数は 4 倍に増加する。また、タイムステップを、1/2 に減少する必要が生じ、全体の計算時間は 2³=8 倍となってしまう。したがって、cpu タイムは 112 分となり、有限要素法の細要素を含む場合に匹敵する時間となる。また、格子間隔を 1/3 (すなわち、格子面積を FEM-7 の最小要素に合わせた場合) にした場合には、計算時間は 27 倍の 378 分必要ということになり、明らかに立場が逆転することを意味している。このように、有限要素法においても、要素分割を上手に行えば、計算時間においても、差分法と対等になりうるものと考

えられる。しかしながら、細かい要素付近の海域の水深が深い場合、あるいは、詳しい情報が一箇所でなく、数箇所において欲しい場合には、有限要素法においては、まだまだ計算時間がかかることを示している。

差分法と有限要素法についての比較は最近よく行われている。例えば、Pagenkopt & Pearce²⁹⁾ による高潮推算に関する比較においては、どちらの手法においても、ほぼ同様の結果が得られることを報告しており、有限要素法の方が地形表現の点から、また計算コストの面から有利であると結論している。また、坂井³⁰⁾はどちらの方法も離散化手法を用いた近似解法であるという立場から、有限要素法は差分法の一種の拡張であると考え、それぞれの特徴を有する差分要素法を提案している。このように、差分法と有限要素法による数値解析は今後も両者の長所・短所等を考慮に入れながら発展してゆくものと考えられる。

8. まとめ

有限要素法により、〈矩〉形湾での長波の計算、東京湾での潮流計算を実施し、この方法のもつ特徴についての考察を行った。また、このモデルの持つパラメーターの影響について検討を加えた。さらに、東京湾の潮流計算について差分法である ADI 法を用いて計算を実行し、差分法と有限要素法の比較、およびそれらの手法の持つ特性についての考察を行った。

今回行った計算において明らかになったことを、以下に箇条書きで示す。

〈矩〉形湾での長波の計算結果について、

- 1) 長波の伝播は、波速 \sqrt{gh} によって進行し、その波形は正弦曲線に近い (図-13 (a))。また、流速分布も、長波理論にほぼ等しい結果 (図-13 (b)) を示している。
- 2) 海底摩擦係数は波高を減衰させる (図-14 (a))。
- 3) 水平混合係数も、若干波高を減衰させる (図-15 (a))。特に、 $T=10$ 分の波の結果のように、水面波形に凹凸がある場合、すなわち流速の水平勾配が大きい場合に水平混合項の影響が大きい。
- 4) 慣性項 (移流項) による影響は小さい (図-17)。
- 5) 三角形の有限要素の配列の相違により、計算結果に若干の相違が生じる (図-19)。

有限要素法による東京湾の潮流計算について、

- 6) 現地観測における M_2 潮の潮流成分をほぼ再現している (図-25)。
- 7) 潮汐残差流は浦賀水道狭窄部において、富津側より流入、観音崎側より流出のパターンは見られるが、その循環流の大きさは小さい (図-22 (c))。

8) 水平渦動粘性係数を大きくすると、計算は安定化の方法に向かう。しかし、潮汐残差流の大きさは小さくなる(図-28)。この項は、浦賀水道のように、地形が複雑で流速が大きいところでの効果が大きい。

9) 慣性項(移流項)は潮汐残差流の発生に大きく寄与している(図-30)。

10) 特定領域の要素を細かく分割した場合としない場合の結果に、ほとんど変化がなかった。粗領域と細領域の接続が非常にスムーズである(図-32(a), (b))。差分法と有限要素法の比較について、

11) 潮流パターンは、ほぼ同じ結果が得られた(図-36)

12) 潮汐残差流において、ADI法の方が循環流が大きい(図-37)。

13) 潮位振幅については、ほぼ同様の結果が得られた。しかし、位相遅れについては、差分法の方が有限要素法の結果よりいくぶん進んでいる。

以上、有限要素法による長波の計算、および潮流計算の計算手法とその特性について述べた。さらに、東京湾の潮流計算を例に取り上げ、差分法(特にここではADI法)との比較検討を行った。有限要素法においては、地形を忠実に表現できるという大きな長所をもつが、まだ計算の安定性・計算スピード等に若干の問題点を残す。さらに、筆者の経験も差分法に比べると、有限要素法に対する経験が若干浅いため、どちらの方法が決定的に有利であるという結論は見い出せなかった。また、有限要素法それ自体の流体力学への対用も、そう古いものでなく、まだ歴史が新しい分野である。そして、ここ10年代の有限要素法の発展ぶりから考え、今後さらに一層の発展が予想される。

本計算に用いたプログラムは、MIT(マサチューセッツ工科大学)が所有するCAFE-1³¹⁾を若干修正したもので、これは、筆者がMITに滞在中に実施した計算プログラムである。ここで、MIT滞在中に大変お世話になったProf. Keith D. Stolzebach, Prof. J. J. Cornorの両氏に深く感謝いたします。また、計算機の使用法のほか、公私両面にわたって御指導していただいた、Mr. Peter Ostrowskiに感謝いたします。

さらに、本論文を作成するに際し、当研究所海水浄化研究室長堀江毅氏、および海水汚染水理研究室森川雅行君に差分法と有限要素法の比較に関してなど、貴重な助言等をいただいた。ここに感謝する次第である。

(1981年9月30日受付)

参考文献

1) 鷺津久一郎：構造開発とコンピューター，土木学会

誌，pp.54~60，1975年8月号。

- 2) Turner, M. J., R. Clough, H. C. Martin and J. L. Topp : Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures, Journal of Aeronautical Sciences, pp.805~824, 1956.
- 3) Leendertse, J. J. : Aspects of a Computational Model for Long-Period Water-Wave Propagation, RM-5294-PR, The Rand Corporation, May 1967.
- 4) 金子安雄・堀江毅・村上和男：ADI法による潮流と汚染拡散の数値計算，港湾技術研究所報告，第14巻，第1号，1975.1.
- 5) 運輸省第2港湾建設局：東京湾における高潮の推算，昭和39年2月。
- 6) 堀口孝男・富田勇・堀江毅：三次元モデルによる流れと拡散の数値解法について(その2)，第25回海岸工学講演会論文集，昭和53年11月。
- 7) Wang, J. D. and J. J. Connor : Mathematical Modelling of Near Coastal Circulation, TR 200, R.M. Parsons Laboratory for Water Resources and Hydrodynamics, M. I. T., 1975. 4.
- 8) 川原陸人・竹内則雄・首藤伸夫：2段階ラックスベンドロフ有限要素法による潮汐流解析，第23回海岸工学講演会論文集，昭和51年11月。
- 9) 吉田耕造：海洋学における歴史的展望，海洋学講座2，海洋物理学Ⅱ，寺本俊彦編，1976.6.
- 10) Connor, J. J. and C. A. Brebbia : Finite Element Techniques for Fluid Flow, Butterworth & Co. 1976.(邦訳として，奥村敏恵監訳，流体解析への有限要素法の応用，サイエンスライブラリー情報電算機=37，サイエンス社，1978.)
- 11) Finlayson, B. A. : The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, 1972.(または邦訳，鷺津久一郎・山本善之・川井忠彦訳：重みつき残差法と変分原理，培風館，1974.12.)
- 12) Zienkiewicz, O. C. : The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, 1971,(または邦訳として，吉誠雅夫・山田嘉昭=監訳：基礎工学におけるマトリックス有限要素法，培風館，1975.)
- 13) Zienkiewicz, O. C. : The Finite Element Method Third Edition, McGraw-Hill, 1977.
- 14) 運輸省第三港湾建設局，瀬戸内海・来島海峡潮流調査報告，第4章，潮流数値計算の理論，昭和42年3月。
- 15) たとえばHornbeck, R. W. : Numerical Methods,

Quantum Publishers, 1975.

- 16) Collins, R.J. : Bandwidth Reduction by Automatic Renumbering, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.6, 1973.
- 17) Tee, K.T. : Tide-induced residual current, A 2-D nonlinear numerical tidal model, Journal of Marine Research, Vol.34, No.4, pp603~628, 1976.
- 18) 宝田盛康: 潮流数値計算における水平渦動粘性係数の役割, 中国工業技術試験所報告, No.12, pp 121~135, 1980.
- 19) 中野猿人: 潮汐学(複製版), 生産技術センター, 1975.
- 20) 村上和男: 最小自乗法による潮汐・潮流の調和分解とその精度, 港湾技研資料, No.369, 1981.3.
- 21) 運輸省第二港湾建設局: 東京湾潮流調査報告書(第二報), 1966.
- 22) 東京電力(株)・新日本気象海洋(株): 東京湾流動調査報告書, 1972.
- 23) 運輸省第二港湾建設局・横須賀港工事事務所, 東京湾潮流調査報告書, 1979.3.
- 24) 運輸省第二港湾建設局・横須賀港工事事務所, 東京湾潮流調査報告書, 1979.9.
- 25) 伊藤喜行・谷本勝利・木原力: 駿河湾台風6626号総合調査研究報告, 第3編駿河湾の高潮, 港研報告第6巻7号, 1967年8月.
- 26) 上野武夫: 来島海峡の潮流計算, 神戸海洋気象台報告, 昭和42年3月.
- 27) Sugimoto, T. : Effect of Boundary Geometries on Tidal Currents and Tidal Mixing, Journal of the Oceanographical Society of Japan, Vol.31, No.1, 1975.2.
- 28) 堀江毅・金子安雄・村上和男・細川恭史・亀山豊: 潮流計算における境界等の取扱い—特にADI法による検討—, 港研報告第15巻第2号, 1976.6.
- 29) Pagen Kopt, J. R. and B. R. Pearce : Evaluation of techniques for numerical calculation of storm surges, TR. 199, R. M. Parsons Laboratory for Water Resources and Hydrodynamics, M. I. T., 1975.2.
- 30) 坂井藤一: 有限要素法と差分法の等価性およびある離散化手法, 土木学会論文報告集, 第220号, 1973.12.
- 31) Pagenkopt, J. R., G. C. Christodoulou, B. R. Pearce and J. J. Connor : A user's manual for "CAFE-1", A two-dimensional finite element

circulation model, TR-217, R. M. Parsons Laboratory for Water Resources and Hydrodynamics, M. T. T., 1976.8.

- 32) 川原陸人: 水理解析と有限要素法, 水工学シリーズ 77-A-2, 土木学会水理委員会, 1977.

付 録

A.1. 重み付き残差法¹⁰⁾

微分方程式を数値的に解く方法として、従来差分法がよく用いられてきた。差分法とは微分方程式の微分係数を次のように差分近似でもって解く方法である。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} = y'_n \quad (\text{A.1})$$

ここに、 y_{n+1} , y_n は x が微小値 h だけ離れた2点の y の値である。このように、差分法はある領域内における連続量を有限個の点における離散化量に変換する際に、微分を差分に置き換えるという直接的な離散化手法であるこれに対し有限要素法は、重み付き残差を最小にするという変分法に立脚した方法であり、間接的な手法によって離散化を行うものである。

重み付き残差法とは、微分(あるいは積分)方程式の解を近似するためのひとつの数値的手法である。いま、あるひとつの方程式を考える。

$$L(u_0) = P \quad x \in V \quad (\text{A.2})$$

ただし、境界条件は

$$S(u_0) = g \quad x \in S \quad (\text{A.3})$$

で与えられる。ここに、

V : 連続体の領域の内部

S : 連続体の外部表面

x : 空間座標

u_0 : 方程式の解

とする。方程式の解 u_0 を、試験関数 $\phi_k(x)$ で次のように近似できるものとする。

$$u = \sum_{i=1}^N \alpha_k \phi_k \quad (\text{A.4})$$

ここに、

α_k : 未知パラメーター

ϕ_k : 線型独立な関数

である。これらの関数は境界条件式(A.3)を満足し、かつ方程式(A.2)の左辺をゼロとしないために必要な連続自由度を有しているものと仮定する。

式(A.4)を式(A.2)に代入すると、残差 ε が生じる。

$$\varepsilon = L(u) - P \quad (\text{A.5})$$

厳密解に対しては ε はゼロに等しくなる。残差の重み付き積分をゼロと置くことにより、この残差は平均的な意味においてゼロとなる。すなわち

$$\int \varepsilon \cdot W_i \, dV = 0 \quad i=1, 2, \dots, N \quad (\text{A.6})$$

ここに、 W_i が重み関数である。このようにして、近似解 u を求めるのが重み付き残差法である。

重み付き残差法のうち、重み関数 W_i としてデルタ関数を用いるものが選点法 (Collocation Method) である。すなわち、ある選点のみで微分係数を満足させる方法である。また、誤差自身の内積の値が最小になるようにするのが最小自乗法、さらに重み関数として線型独立で完備な関数を任意集合としたものがモーメント法、試験関数を用いるものが Galerkin 法といわれるものである。一般に流体力学に用いられる方法は Galerkin 法である。

いま、この4つの代表的な重み付き残差法について、簡単な微分方程式を例に取り上げて以下に説明する。

いま、微分方程式として

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u + x = 0 \quad 0 < x < 1 \quad (\text{A.7})$$

を考える。境界条件としては、

$$u(0) = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$u(1) = 0 \quad (\text{A.9})$$

とする。

(a) 選点法 (Collocation Method)

境界条件を満たす関数として

$$\phi_1 = x(1-x) \quad (\text{A.10})$$

$$\phi_2 = x^2(1-x) \quad (\text{A.11})$$

を考える。したがって近似関数 \hat{u} として

$$\hat{u} = \alpha_1 x(1-x) + \alpha_2 x^2(1-x) \quad (\text{A.12})$$

を用いると、誤差 ε は

$$\begin{aligned} \varepsilon &= L(u) - P = x + (-2\alpha_1) + 2\alpha_2 - 6\alpha_2 x \\ &\quad + \alpha_1 x(1-x) + \alpha_2 x^2(1-x) \\ &= x + (-2 + x - x^2)\alpha_1 + (2 - 6x + x^2 - x^3)\alpha_2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

となる。いま選点として、 $x=1/4$ および $x=1/2$ を取るとすると、これらの値を式 (A.13) に代入すれば

$$\begin{bmatrix} \frac{29}{16} & -\frac{35}{64} \\ \frac{7}{4} & \frac{7}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

が成立する。これを解くと

$$\alpha_1 = \frac{6}{31}, \quad \alpha_2 = \frac{40}{217} \quad (\text{A.15})$$

となる。したがって、近似関数としては

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \frac{6}{31} [x(1-x)] + \frac{40}{217} [x^2(1-x)] \\ &= \frac{x(1-x)}{217} [42 + 40x] \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

となる。

(b) 最小自乗法

前と同様に2次の近似関数を採用する。

$$\hat{u} = \alpha_1 x(1-x) + \alpha_2 x^2(1-x) \quad (\text{A.17})$$

ゆえに、誤差関数は

$$\varepsilon = x + (-2 + x - x^2)\alpha_1 + (2 - 6x + x^2 - x^3)\alpha_2 \quad (\text{A.18})$$

となる。 ε を自乗して、 α_1, α_2 に関して最小化を行うと、

$$\int_0^1 \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial \alpha_1} dx = \int_0^1 2\varepsilon \cdot (-2 + x - x^2) dx = 0 \quad (\text{A.19})$$

$$\int_0^1 \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial \alpha_2} dx = \int_0^1 2\varepsilon \cdot (2 - 6x + x^2 - x^3) dx = 0 \quad (\text{A.20})$$

となる。これらの式を展開して α_1, α_2 について解くと、

$$\alpha_1 = 0.192 \quad (\text{A.21})$$

$$\alpha_2 = 0.165 \quad (\text{A.22})$$

となる。したがって、近似関数は

$$\hat{u} = 0.192x(1-x) + 0.165x^2(1-x) \quad (\text{A.23})$$

となる。

(c) モーメント法

誤差関数 ε に対して、最も簡単な関数列 $1, x$ を用いる。前と同様の近似関数を用いた場合の誤差関数 ε を、 1 と x に関して直交化させると、

$$\int_0^1 \varepsilon \cdot 1 \, dx = 0 \quad (\text{A.24})$$

$$\int_0^1 \varepsilon \cdot x \, dx = 0 \quad (\text{A. 25})$$

となる。εに対して式(A. 18)を代入し、積分を実行させると、

$$\begin{bmatrix} \frac{11}{6} & \frac{11}{6} \\ \frac{11}{22} & \frac{19}{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (\text{A. 26})$$

を得る。この式とα₁, α₂について解くと、

$$\alpha_1 = \frac{122}{649} \quad (\text{A. 27})$$

$$\alpha_2 = \frac{110}{649} \quad (\text{A. 28})$$

となる。したがって、モーメント法による近似解は

$$\hat{u} = \frac{122}{649} x(1-x) + \frac{110}{649} x^2(1-x) \quad (\text{A. 29})$$

となる。

(d) Galerkin 法

重み関数として試験関数を用いる。いま、試験関数は

$$\phi_1 = x(1-x) \quad (\text{A. 30})$$

$$\phi_2 = x^2(1-x) \quad (\text{A. 31})$$

であるから、次の積分が得られる。

$$\int_0^1 \varepsilon \cdot \phi_1 \, dx = \int_0^1 \varepsilon \cdot x(1-x) \, dx = 0 \quad (\text{A. 32})$$

$$\int_0^1 \varepsilon \cdot \phi_2 \, dx = \int_0^1 \varepsilon \cdot x^2(1-x) \, dx = 0 \quad (\text{A. 33})$$

これらの式に、式(A. 18)を代入し、α₁, α₂について解けば、

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{3}{20} \\ \frac{3}{20} & \frac{13}{105} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} \\ \frac{1}{20} \end{bmatrix} \quad (\text{A. 34})$$

$$\alpha_1 = \frac{71}{369} \quad (\text{A. 35})$$

$$\alpha_2 = \frac{7}{41} \quad (\text{A. 36})$$

となる。したがって、近似解は

$$\hat{u} = \frac{71}{369} x(1-x) + \frac{7}{41} x^2(1-x) \quad (\text{A. 37})$$

となる。

以上、4つの方法によって式(A. 7)の微分方程式を近似的に求めた。この方程式の厳密解は

$$u_{exact} = \frac{\sin x}{\sin 1} - x \quad (\text{A. 38})$$

である。これらをふまえて4つの方法を比較すると、付表-1のようになる。

付表-1 重み付き残差法

| x | 選点法 | 最小自乗法 | モーメント法 | ガラーキン法 | 厳密解 |
|-------|--------|--------|--------|--------|----------|
| 0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 0.125 | 0.0237 | 0.0233 | 0.0229 | 0.0234 | 0.023163 |
| 0.25 | 0.0449 | 0.0437 | 0.0432 | 0.0441 | 0.044014 |
| 0.375 | 0.0616 | 0.0595 | 0.0590 | 0.0601 | 0.060276 |
| 0.5 | 0.0714 | 0.0686 | 0.0682 | 0.0694 | 0.069747 |
| 0.625 | 0.0724 | 0.0692 | 0.0689 | 0.0701 | 0.070327 |
| 0.75 | 0.0622 | 0.0592 | 0.0591 | 0.0601 | 0.060056 |
| 0.875 | 0.0388 | 0.0368 | 0.0368 | 0.0374 | 0.037145 |
| 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |

A.2. 拡張されたガラーキン法¹⁰⁾

(d)で扱ったガラーキン法の例は自己随伴演算子と基本境界条件の場合についての議論に限定されていた。重み付き残差法というのは任意の微分方程式と任意の境界条件に対しても適用できるものである。ここでは、境界条件を部分的に満足するだけの拡張されたガラーキン法(Extended Galerkin Method)について述べる。

いま、解くべき方程式を次のようにおく。

$$kv + \frac{d^2}{dx^2} (EI \frac{d^2 v}{dx^2}) = \sin \pi x \quad 0 < x < 1 \quad (\text{A. 39})$$

境界条件は次式で与えられる。

$$v(0) = v(1) = 0 \quad (\text{A. 40})$$

$$v'(0) = v'(1) = 0 \quad (\text{A. 41})$$

(A. 40)式の境界条件を基本境界条件(Essential boundary condition), (A. 41)式の境界条件を自然境界条件(Natural boundary condition)という。与えられた微分方程式が4次であること、および境界条件式が二次の微係数を含むことを考慮に入れると、解vの近似式としては5次以上の式として次のような解が考えられる。

$$v = \alpha(7x - 10x^3 + 3x^5) \quad (\text{A. 42})$$

あるいは、

$$v = \alpha_1 x^3(1-x^3) + \alpha_2 x^4(1-x)^4 \quad (\text{A. 43})$$

式(A.42)においては5次関数であり、式(A.43)にいたっては8次関数となり、非常に高次の関数となってしまふ。

ここで、関数における連続条件をゆるめること、すなわち関数の次数を下げることを考える。これを弱形式化(Weak Form)という。解の関数の次数を下げることは、一般に方程式の未知数が減り、解を求める上で非常に簡単になる。

式(A.39)より、次のガラーキン方程式が得られる。

$$\int_0^1 \{ EI \frac{d^4 v}{dx^4} + kv - \sin \pi x \} W dx = 0 \quad (A.44)$$

境界条件を考慮して広義のガラーキン近似式を次のように与える。

$$\int_0^1 \{ EI \frac{d^4 v}{dx^4} + kv - \sin \pi x \} W dx + EI \left[(v + \frac{d^2 v}{dx^2}) \cdot \frac{dW}{dx} \right]_0^1 = 0 \quad (A.45)$$

式(A.45)の左辺第一項は近似解の計算領域内で持つ残差であり、第二項は、重み付き残差に境界条件の残差を考慮したことに相当する。すなわち、この方法では自然境界条件は必ずしも満足するとは限らない。式(A.45)の左辺第一項を2回部分積分すれば、

$$\int_0^1 EI \frac{d^4 v}{dx^4} W dx = EI \frac{d^3 v}{dx^3} \cdot W \Big|_0^1 - \int_0^1 EI \frac{d^3 v}{dx^3} \frac{dW}{dx} dx = EI \frac{d^2 v}{dx^2} \cdot \frac{dW}{dx} \Big|_0^1 - \int_0^1 EI \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 W}{dx^2} dx \quad (A.46)$$

となる。したがって、式(A.45)は次のように表される。

$$\int_0^1 \{ EI \frac{d^4 v}{dx^4} + kv - \sin \pi x \} W dx + EI \left[(v + \frac{d^2 v}{dx^2}) \cdot \frac{dW}{dx} \right]_0^1 = \int_0^1 \{ EI \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 W}{dx^2} + kvW - \sin \pi x \cdot W \} dx + EI \left[(v \frac{dW}{dx} + \frac{d^3 v}{dx^3} \cdot W) \right]_0^1 = 0 \quad (A.47)$$

式(A.47)の左辺第二項は基本境界条件よりゼロとなる。

したがって、拡張されたガラーキン方程式は

$$\int_0^1 \{ EI \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 W}{dx^2} + (kv - \sin \pi x) \cdot W \} dx = 0 \quad (A.48)$$

となる。ここで、 v の微係数の次数が減少していることに注目する。

いま、解の近似式として基本境界条件を満たすように次のように仮定する。

$$v = \alpha_1 x(1-x) + \alpha_2 x^2(1-x)^2 \quad (A.49)$$

したがって、試験関数 ϕ_1, ϕ_2 は次のように与えられる。

$$\phi_1 = x(1-x) = x - x^2 \quad (A.50)$$

$$\phi_2 = x^2(1-x)^2 = x^2 - 2x^3 + x^4 \quad (A.51)$$

$$\phi_1' = 1 - 2x \quad (A.52)$$

$$\phi_1'' = -2 \quad (A.53)$$

$$\phi_2' = 2x - 6x^2 + 4x^3 \quad (A.54)$$

$$\phi_2'' = 2 - 12x + 12x^2 \quad (A.55)$$

いま、重み関数として試験関数を与え、式(A.49)を式(A.48)に代入して積分を実行する。ここで、 $k = 0.1 EI$ と仮定する。

ϕ_1 より、

$$4.00333 \alpha_1 + 0.000714 \alpha_2 = 0.129 \quad (A.56)$$

および ϕ_2 より

$$0.000714 \alpha_1 + 0.800159 \alpha_2 = 0.02785 \quad (A.57)$$

が得られる。これを解くと

$$\alpha_1 = 0.03222 / EI \quad (A.58)$$

$$\alpha_2 = 0.03478 / EI \quad (A.59)$$

が得られる。したがって、近似解 v は次式で与えられる。

$$v = \frac{0.03222}{EI} x(1-x) + \frac{0.03478}{EI} x^2(1-x)^2 \quad (A.60)$$

(d)で述べたガラーキン法によると、解の近似式としては式(A.42)を用い、試験関数として $\phi = 7x - 10x^3 + 3x^5$ を用いる。これらを式(A.44)に代入して積分を実行すると、

$$\alpha = 0.004284 / EI \quad (A.61)$$

が得られる。したがって近似解は

$$v = \frac{0.004284}{EI} (7x - 10x^3 + 3x^5) \quad (\text{A.62})$$

となる。ただし、この解は $x=1/2$ に対して対称形となっていない。近似解を対称形に仮定すると6次あるいは8次の多項式となる。一方、微分方程式の厳密解は

$$v = \frac{\sin \pi x}{(\pi^4 + 0.1)EI} \quad (\text{A.63})$$

で与えられる。式(A.60)、式(A.62)および式(A.63)の解を比較すると、付表-2あるいは付図-1のようになる。どちらの解も、ほぼ満足できる結果であると思われる。しかしながら、式(A.60)の解は

付表-2 拡張されたガラーキン法

| x | $E I v \times 10^3$ | | | $E I v'' \times 10^2$ | | |
|-----|---------------------|--------|--------|-----------------------|--------|--------|
| | (A-60) | (A-62) | (A-63) | (A-60) | (A-62) | (A-63) |
| 0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.51 | 0.0 | 0.0 |
| 0.1 | 3.18 | 2.96 | 3.17 | -3.24 | -2.47 | -3.12 |
| 0.2 | 6.05 | 5.66 | 6.03 | -6.17 | -4.94 | -5.95 |
| 0.3 | 8.30 | 7.87 | 8.30 | -8.25 | -7.02 | -8.19 |
| 0.4 | 9.74 | 9.39 | 9.75 | -9.50 | -8.64 | -9.62 |
| 0.5 | 10.23 | 10.04 | 10.26 | -9.92 | -9.64 | -10.13 |
| 0.6 | 9.74 | 9.74 | 9.75 | -9.50 | -9.87 | -9.62 |
| 0.7 | 8.30 | 8.46 | 8.30 | -8.25 | -9.18 | -8.19 |
| 0.8 | 6.05 | 6.27 | 6.03 | -6.17 | -7.40 | -5.95 |
| 0.9 | 3.18 | 3.35 | 3.17 | -3.24 | -4.40 | -3.12 |
| 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.51 | 0.0 | 0.0 |

(A-60) 拡張されたガラーキン法
 (A-62) ガラーキン法
 (A-63) 厳密解

$$v(0) = v(1) = 0 \quad (\text{A.64})$$

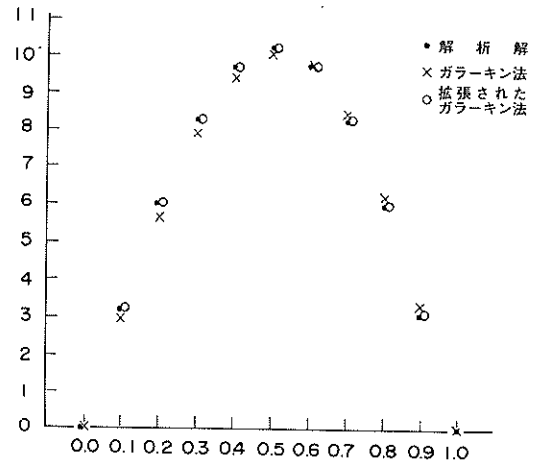
$$v''(0) = v''(1) = 0.51 \times 10^2 \quad (\text{A.65})$$

となり、基本境界条件は満たすが自然境界条件は満たさないものとなっている。しかしながら、解の近似度は通常のGalerkin法と大差なく、微分方程式の次数を1~2次下げたことになっている。このことは、要素数が多く存在する有限要素法においては、未知数の減少、しいては計算時間の大幅な減少へと導くものである。

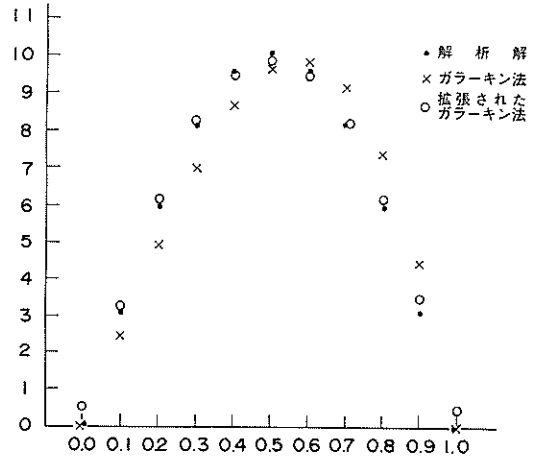
このように、境界条件の拘束を緩めて微分方程式の次数を下げる手順は、潮流あるいは拡散方程式を有限要素法によって解く場合に極めて重要な方法である。

A.3. 有限要素法³²⁾

Galerkin法あるいはRayleigh-Ritz法を応用する際には、全体を近似する関数を選ぶ必要がある。これらの考え方を局所化された領域に適用し、各要素を別々に考えたものが有限要素法である。

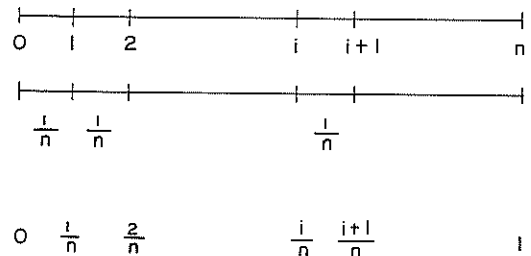


(a) $EIV \times 10^3$



(b) $-EIV'' \times 10^2$

付図-1 拡張されたガラーキン法

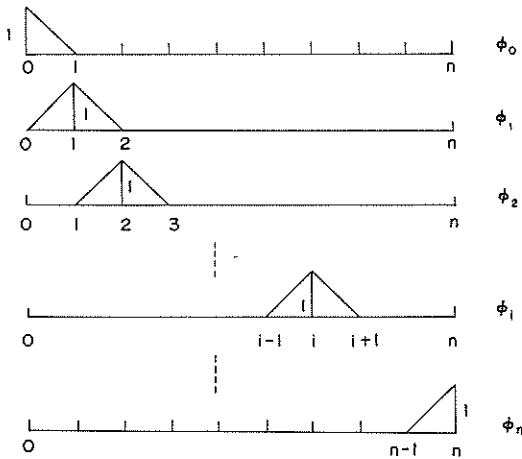


付図-2 有限要素分割

付図-2に示すごとく、解析領域〔0,1〕を等間隔に n 等分するとする。この分割された点を節点と呼び、分割区間を有限要素と呼ぶ。節点番号 $0, 1, \dots, n$ での未知関数をそれぞれ u_0, u_1, \dots, u_n とすると、領域内の未知関数 u は、各節点の値を用いて次のように表すことができる。

$$\hat{u}(x) = u_0 \phi_0(x) + u_1 \phi_1(x) + \dots + u_n \phi_n(x) \quad (\text{A.66})$$

ここにおいて、試験関数 ϕ_i は有限要素内部の未知関数 $u(x)$ の形状を決めるものである。例として付図-3に示すように、有限要素内で未知関数が直線変化をするものとする、第 i 節点における形状関係は次のように表すことができる。



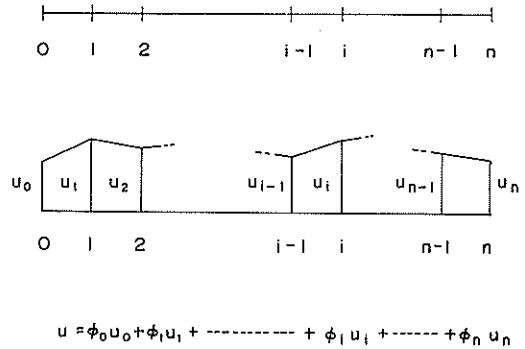
付図-3 形状関数 $\phi_i(x)$

$$\phi_i(x) = \begin{cases} nx - (i-1) & \frac{i-1}{n} \leq x \leq \frac{i}{n} \\ i+1-nx & \frac{i}{n} \leq x \leq \frac{i+1}{n} \end{cases} \quad (\text{A.67})$$

したがって、未知関数の近似関数は付図-4に表すように、節点 i において u_i を取るような折れ線状に変化する関数となる。

いま、重み関数として試験関数と同じ関数形と仮定すると、

$$u^* = u_0^* \phi_0(x) + u_1^* \phi_1(x) + \dots + u_n^* \phi_n(x) \quad (\text{A.68})$$



付図-4 試験関数

となる。ここに、 $u_0^*, u_1^*, \dots, u_n^*$ は任意定数である。したがって、ある区間 $i, i+1$ に着目すれば、

$$u = (i+1-nx)u_i^* + (nx-i)u_{i+1}^* \quad \frac{i}{n} \leq x \leq \frac{i+1}{n} \quad (\text{A.69})$$

によって表すことができる。重み関数も同様に

$$u^* = (i+1-nx)u_i^* + (nx-i)u_{i+1}^* \quad \frac{i}{n} \leq x \leq \frac{i+1}{n} \quad (\text{A.70})$$

と表せる。ここに、重み関数 u^* は任意関数であることから、 u_i^* および u_{i+1}^* は任意に選べる定数である。

今、求める微分方程式を次のように考える。

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} = f \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (\text{A.71})$$

境界条件として、

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \quad (\text{A.72})$$

とする。式(A.71)の両辺に重み関数 u^* をかけて、両辺を領域〔0,1〕について積分すると次の方程式を得る。

$$\int_0^1 u^* \left(-\frac{d^2 u}{dx^2}\right) dx = \int_0^1 u^* f dx \quad (\text{A.73})$$

式(A.73)の左辺を部分積分することにより、方程式の微分の次数を1つ下げることができる。

$$\int_0^1 u^* \left(-\frac{d^2 u}{dx^2}\right) dx = \int_0^1 \frac{du^*}{dx} \frac{du}{dx} dx - \left[u^* \frac{du}{dx} \right]_0^1 \quad (\text{A.74})$$

ここにおいて、重み関数 u^* として試験関数を用いるこ

これまで、一次元の等間隔格子の節点および有限要素について述べてきたが、このような考え方が不等間隔格子の問題、あるいは三角形・四角形で表されるような二次元の問題、さらには立体的な三次元の問題にも同様に応用できる。

A.4. 有限要素法による解の安定性について⁷⁾

数値計算の解の安定性の問題については、有限要素法においては、まだ完全には確立していない。ここでは、2~3の特別の例を取り上げて、潮流計算における有限要素法による解の安定性についての検討を行った。

有限要素法におけるオイラースキームは、以下に示すとおり無条件不安定となる。

いま、連続の式(5-1)および運動方程式(5-2)

を簡単のために次のように表す。

$$\underline{\underline{M}}_3 \dot{\underline{\underline{X}}} + \underline{\underline{G}}_3 \underline{\underline{X}} + \underline{\underline{E}}_3 \underline{\underline{X}} + \underline{\underline{C}}_3 \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{P}}_3 \quad (\text{A.85})$$

ここにおいて、

$$\underline{\underline{M}}_3 = \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_1 & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{M}}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.86})$$

$$\underline{\underline{G}}_3 = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{G}} \\ \underline{\underline{G}}^T & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.87})$$

$$\underline{\underline{E}}_3 = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{E}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.88})$$

$$\underline{\underline{C}}_3 = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.89})$$

$$\underline{\underline{P}}_3 = \begin{bmatrix} \underline{\underline{P}}_1 \\ \underline{\underline{P}}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.90})$$

$$\underline{\underline{X}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\eta}} \\ \underline{\underline{Q}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.91})$$

である。オイラーの方法を用いると、式(A.85)は

$$\underline{\underline{M}}_3 (\underline{\underline{X}}_{n+1} - \underline{\underline{X}}_n) + \Delta t \{ \underline{\underline{G}}_3 + \underline{\underline{E}}_3 + \underline{\underline{C}}_3 \} \underline{\underline{X}}_n = \Delta t \underline{\underline{P}}_3 \quad (\text{A.92})$$

となる。いま、未知数 $\underline{\underline{X}}_{n+1}$ の解を漸化式の形で

$$\underline{\underline{X}}_{n+1} = \lambda \underline{\underline{X}}_n \quad (\text{A.93})$$

と仮定すると、この式を(A.92)に代入して

$$\lambda = \frac{\underline{\underline{X}}_n^T [\underline{\underline{M}}_3 - \Delta t \{ \underline{\underline{G}}_3 + \underline{\underline{E}}_3 + \underline{\underline{C}}_3 \}] \underline{\underline{X}}_n}{\underline{\underline{X}}_n^T \underline{\underline{M}}_3 \underline{\underline{X}}_n} \quad (\text{A.94})$$

が得られる。ここに、 $\underline{\underline{X}}_n^T$ は $\underline{\underline{X}}_n$ の転置の共役マトリックスである。いま、 $\underline{\underline{M}}_3$ が正の対称マトリックスであるところから、

$$\underline{\underline{X}}_n^T \cdot \underline{\underline{M}}_3 \underline{\underline{X}}_n = m_3 > 0 \quad m_3 \in \text{Real} \quad (\text{A.95})$$

同様に、

$$\underline{\underline{X}}_n^T \cdot \underline{\underline{G}}_3 \underline{\underline{X}}_n = i g_3, \quad i = \sqrt{-1}, \quad g_3 \in \text{Real} \quad (\text{A.96})$$

$$\underline{\underline{X}}_n^T \cdot \underline{\underline{E}}_3 \underline{\underline{X}}_n = e_3 \geq 0, \quad e_3 \in \text{Real} \quad (\text{A.97})$$

$$\underline{\underline{X}}_n^T \cdot \underline{\underline{C}}_3 \underline{\underline{X}}_n = i c_3, \quad c_3 \in \text{Real} \quad (\text{A.98})$$

となる。これらは、マトリックスの内積の性質として、 $(\underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{A}} \underline{\underline{X}})$ が実数の時は $\underline{\underline{A}}$ は対象マトリックス、 $(\underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{A}} \underline{\underline{X}})$ が虚数の時は $\underline{\underline{A}}$ は逆対象(Skew-symmetric)マトリックスとなることより説明される。これらを式(A.94)に代入すると、 λ の値は

$$\lambda = \frac{m_3 - \Delta t e_3 - \Delta t i_2 (g_3 + C_3)}{m_3} \quad (\text{A.99})$$

となる。いま、コリオリ項と渦動粘性項を無視すると、 $e_3 = c_3 = 0$ となる。ゆえに λ の大きさは

$$|\lambda| = \left| 1 - i \Delta t \frac{g_3}{m} \right| > 1 \quad (\text{A.100})$$

となる。これは、オイラースキームが有限要素法においては無条件不安定であることを示している。これは、差分法における安定条件としてのCourant-Friedrichs-Lewyの式が次式により与えられ、

$$\Delta t \leq \frac{\Delta S}{\sqrt{2gh}} = \Delta t_{cr} \quad (\text{A.101})$$

条件付安定となることとは相違している。

つぎに、5.で用いたSplit-time methodについての安定条件の検討を加える。ここで、式(5.3)、式(5.4)を次のように表す。

$$\underline{\underline{M}}_3 \underline{\underline{X}}_{n+\frac{1}{2}} = \underline{\underline{M}}_3 \underline{\underline{X}}_n - \Delta t \underline{\underline{G}}_4 \underline{\underline{X}}_n \quad (\text{A.102})$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M}}_3 \underline{\underline{X}}_{n+1} &= \underline{\underline{M}}_3 \underline{\underline{X}}_{n+\frac{1}{2}} + \Delta t \underline{\underline{G}}_4^T \underline{\underline{X}}_{n+\frac{1}{2}} \\ &\quad - \Delta t (\underline{\underline{E}}_3 + \underline{\underline{C}}_3) \underline{\underline{X}}_{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (\text{A.103})$$

ここにおいて、

$$\underline{X}_n = \begin{Bmatrix} \underline{\eta}_{n-\frac{1}{2}} \\ \underline{Q}_n \end{Bmatrix}, \quad \underline{X}_{n+\frac{1}{2}} = \begin{Bmatrix} \underline{\eta}_{n+\frac{1}{2}} \\ \underline{Q}_n \end{Bmatrix}$$

$$\underline{G}_4 = \begin{bmatrix} 0 & \underline{G}_x \underline{G}_y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.104})$$

である。式(A.102)より、

$$\underline{X}_{n+\frac{1}{2}} = (\underline{I} - \Delta t \underline{M}_3^1 \underline{G}_4) \underline{X}_n \quad (\text{A.105})$$

これを、式(A.103)に代入し、 \underline{X}_{n+1} について解くと、

$$\begin{aligned} \underline{X}_{n+1} = & (\underline{I} + \Delta t \underline{M}_3^1 \underline{G}_4^T) (\underline{I} - \Delta t \underline{M}_3^1 \underline{G}_4) \underline{X}_n \\ & - \Delta t \underline{M}_3^1 (\underline{E}_3 + \underline{C}_3) (\underline{I} - \Delta t \underline{M}_3^1 \underline{G}_4) \underline{X}_n \end{aligned} \quad (\text{A.106})$$

となる。この式に、マトリックスの性質を利用して変換をほどこし、前と同様に λ について求めると、

$$\begin{aligned} \lambda = & \left\{ \underline{\bar{X}}_n^T \underline{M}_3 \underline{X}_n - \Delta t \underline{\bar{X}}_n^T \underline{G}_4 \underline{X}_n - \Delta t \underline{\bar{X}}_n^T (\underline{E}_3 + \underline{C}_3) \underline{X}_n \right. \\ & \left. + \Delta t^2 \underline{\bar{X}}_n^T \underline{G}_4^T \underline{M}_3^1 (\underline{E}_3 + \underline{C}_3) \underline{X}_n \right\} / \\ & \left(\underline{\bar{X}}_n^T \underline{M}_3 \underline{X}_n - \Delta t \underline{\bar{X}}_n^T \underline{G}_4^T \underline{X}_n \right) \\ = & \frac{m_3 - \Delta t (g_4 + i g_5) - \Delta t e_3 - i \Delta t C_3}{m_3 - \Delta t (g_4 - i g_5)} \\ & + O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (\text{A.107})$$

となる。ただし、

$$\underline{\bar{X}}_n^T \underline{G}_4 \underline{X}_n = g_4 + i g_5 \quad (\text{A.108})$$

および

$$\underline{\bar{X}}_n^T \underline{G}_4^T \underline{X}_n = g_4 - i g_5, \quad g_4, g_5 \in \text{Real} \quad (\text{A.109})$$

である。前と同様に、 $e_3 = 0, C_3 = 0$ とすると、

$$|\lambda|^2 = \left| \frac{m_3 - \Delta t g_4 - i \Delta t g_5}{m_3 - \Delta t g_4 + i \Delta t g_5} \right|^2 = 1 \quad (\text{A.110})$$

となる。これは、無条件安定であることを示している。残念ながら、コリオリ項および水平混合項を含んだ場合についての安定条件は、まだ見い出せない。実際の計算結果より経験的には、

$$\Delta t < \frac{1.5 \Delta S}{\sqrt{2 g h}} = 1.5 \Delta t_{cr} \quad (\text{A.111})$$

が与えられる。

この安定条件式は、ADI法の安定条件式

$$\frac{\Delta t}{2} < \frac{(1 \sim 3) \cdot \Delta S}{\sqrt{g h}} \quad (\text{A.112})$$

に比べると、1/3~1/4程度タイムステップを小さくする必要がありそうである。

A.5. 多元連立一次方程式の解法(コレスキー法)¹⁵⁾

有限要素法によって微分方程式を解く際に、多元の連立一次方程式を精度良く高速に解く必要が生じる。連立一次方程式の解法には、ガウスの消去法に代表される直接法と、ガウス-サイデル法に代表される繰返し法とがある。ここでは、係数マトリックスが対称かつ正定値であることを利用してコレスキー法(Cholesky)による解法を述べる。この方法は、消去法に属するものである。まず、多元連立一次方程式を次のようにおく。

$$|M| |X| = |P| \quad (\text{A.113})$$

ここに、

|M| : 係数マトリックス

|X| : 未知数ベクトル

|P| : 荷重ベクトル

である。いま、係数マトリックス|M|が対称かつ正定値である場合には、このマトリックスを上三角行列および下三角行列に分解し、次のように表すことができる。

$$|M| = |L| \cdot |U| = |L| \cdot |L|^T \quad (\text{A.114})$$

ここに

|L| : 下三角行列

|U| : 上三角行列 (= |L|^T)

である。したがって、式(A.113)の方程式は

$$|L| \cdot |L|^T |X| = |P| \quad (\text{A.115})$$

となる。いま、

$$|L|^T |X| = |Y| \quad (\text{A.116})$$

とおくと、式(A.115)は

$$|L| |Y| = |P| \quad (\text{A.117})$$

となる。すなわち、

$$\begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots L_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.118})$$

となる。この方程式は容易に解くことができる。すなわち

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= P_1/L_{11} \\
 Y_2 &= (P_2 - Y_1 L_{21})/L_{22} \\
 &\vdots \\
 Y_n &= (P_n - \sum_{i=1}^{n-1} Y_i L_{ni})/L_{nn} \quad (\text{A.119})
 \end{aligned}$$

と順次代入することにより求めることができる。次に、 $|Y|$ を荷重項として式(A.116)を同様に求める。

$$|L|^T |X| = |Y| \quad (\text{A.120})$$

を前と同様に表すと、

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} & \cdots & L_{n1} \\ 0 & L_{22} & \cdots & L_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & L_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} \quad (\text{A.121})$$

となる。ゆえに方程式の解ベクトル $|X|$ は

$$\begin{aligned}
 X_n &= Y_n/L_{nn} \\
 X_{n-1} &= (Y_{n-1} - X_n \cdot L_{n,n-1})/L_{n-1,n-1} \\
 &\vdots \\
 X_1 &= (Y_1 - \sum_{i=1}^{n-1} X_{i+1} L_{i+1,1})/L_{11} \quad (\text{A.122})
 \end{aligned}$$

となる。この方法において、まず $|Y|$ について解く過程を前進代入(forward substitution)といい、次に $|X|$ について解く過程を後退代入(backward substitution)という。

次に、下三角行列 $|L|$ を求める方法について述べる。式(A.114)の関係を行列の各要素に対して書き下すと、

$$m_{ij} = \sum_{k=1}^i l_{ki} l_{kj} \quad i < j \quad (\text{A.123})$$

$$m_{ii} = \sum_{k=1}^i l_{ki}^2 \quad i=1, 2, \dots, n \quad (\text{A.124})$$

となる。これらの式より、次の手順により l_{ij} を求めることができる。

$$l_{11} = \sqrt{m_{11}} \quad (\text{A.125})$$

$$l_{ij} = \frac{m_{ij}}{l_{11}} \quad (\text{A.126})$$

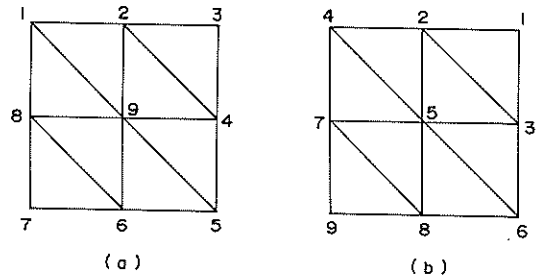
$$\begin{aligned}
 l_{ii} &= m_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ki}^2 \quad (\text{A.127}) \\
 &\quad (i=2, \dots, n)
 \end{aligned}$$

$$l_{ij} = \frac{m_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ki} l_{kj}}{l_{ii}} \quad i < j \quad (\text{A.128})$$

この手順をコレスキーの三角分解(Cholesky decomposition)という。

A.6. 節点番号のリナンバリング¹⁶⁾

式(5.3)、式(5.4)で示した未知数の係数マトリックスは、比較的对角線の周辺に分布したバンド状のものとなる。したがって、一般にはバンドマトリックスがよく用いられる。このマトリックスのバンド幅は、相隣接する節点番号の差の最大値に1加えたものになる。このバンド幅を小さくすることは、計算機の記憶容量を節約するのみならず、計算時間の短縮に役立つ。これは、コレスキー法による多元連立一次方程式の解法の計算回数が $2 \times$ 節点数 \times バンド幅となっていることによる。こ



付図-5 リナンバリング

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | o | o | | | | | | o | o |
| 2 | o | o | o | o | | | | | o |
| 3 | | o | o | o | | | | | |
| 4 | | o | o | o | o | | | | o |
| 5 | | | | o | o | o | | | o |
| 6 | | | | | o | o | o | o | o |
| 7 | | | | | | o | o | o | |
| 8 | o | | | | | o | o | o | o |
| 9 | o | o | | o | o | o | o | o | o |

(a) 悪いバンド幅

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | o | o | o | | | | | | |
| 2 | o | o | o | o | o | | | | |
| 3 | o | o | o | | o | o | | | |
| 4 | | o | o | o | o | o | o | | |
| 5 | | | o | o | o | o | o | o | |
| 6 | | | | o | o | o | o | o | |
| 7 | | | | | o | o | o | o | o |
| 8 | | | | | | o | o | o | o |
| 9 | | | | | | | o | o | o |

(b) 良いバンド幅

付図-6 バンド幅

のことは、節点番号のナンバリングの際に、マトリックスのバンド幅を小さくするように気を付ける必要がある。例えば、付図-5(a)にみられるように番号付けを行うとバンド幅は9であるのに対し、(b)のように番号付けを行うとバンド幅は4となる。付図-5のナンバリングをマトリックスに表したものが付図-6である。このように、注意深く行えば最小でなくともそう極端に大きなバンド幅とはならないように番号付けすることは可能である。しかし、東京湾の例のように一部の箇所を細分割した場合、あるいは地形形状が変化した場合に、再度番号付けを行うことは、その各々の節点番号の座標、おのおのの要素を形造る節点の番号などが変化することにより、非常に面倒な仕事となる。そこで、計算機の中でバンド幅

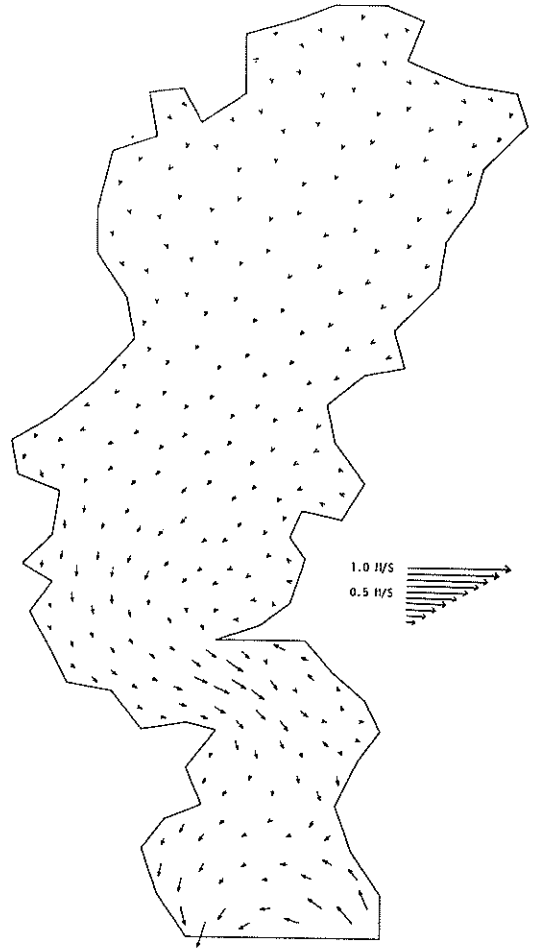
を最小にするように番号付け (automatic renumbering) をするプログラムがCollins, R.J.¹⁶⁾により考案されている。このプログラムは付表-3に示すように、まず節点1の場所を固定して、節点1に隣接している接点を2~4と付ける。つづいて、次に若い番号(例えば2)に隣接している番号を5~7とする。このような手順で1回めのナンバリングではバンド幅が6となった。次に、節点1の場所を変えて同様の手順を繰り返すと、新しいバンド幅はやはり6となった。したがって、2回めのナンバリングは棄却する。このように、節点1の位置を全節点について行い、そのバンド幅が最小となった場合の番号付けを最適のナンバリングとしたものが、この方法である。詳しくは、Collinsの文献¹⁶⁾を参照されたい。

付表-3 リナンバリング

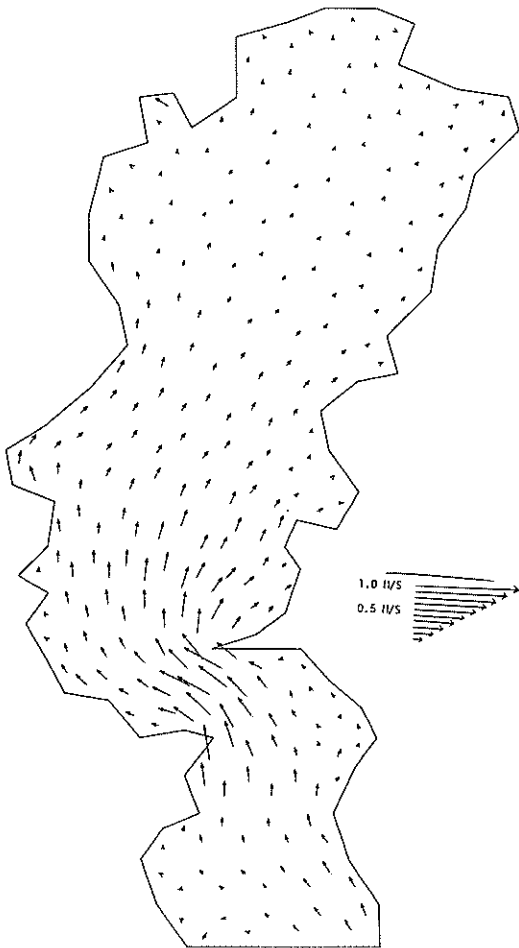
| 古いナンバーを新しいナンバリングの最初にセットする | | | | | | | | | |
|---------------------------|--|--|---|--|--|--|--|--|--|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1 | $\begin{array}{c} 1-4-1 \\ 3-2-1 \\ 1-1-1 \end{array}$ DIFF=3 | $\begin{array}{c} 2-1-5 \\ 1-3-4 \\ 1-1-1 \end{array}$ DIFF=4 | $\begin{array}{c} 1-2-1 \\ 1-1-3 \\ 1-1-1 \end{array}$ DIFF=2 | $\begin{array}{c} 1-2-4 \\ 1-3-1 \\ 1-1-5 \end{array}$ DIFF=4 | $\begin{array}{c} 1-1-1 \\ 1-2-4 \\ 1-3-1 \end{array}$ DIFF=3 | $\begin{array}{c} 1-1-1 \\ 2-4-1 \\ 3-1-5 \end{array}$ DIFF=4 | $\begin{array}{c} 1-1-1 \\ 2-1-1 \\ 1-3-1 \end{array}$ DIFF=2 | $\begin{array}{c} 2-1-1 \\ 1-3-1 \\ 5-4-1 \end{array}$ DIFF=4 | $\begin{array}{c} 2-4-1 \\ 3-1-5 \\ 1-6-7 \end{array}$ DIFF=6 |
| 2 | $\begin{array}{c} 1-4-1 \\ 3-2-5 \\ 1-6-7 \end{array}$ DIFF=5 | $\begin{array}{c} 2-1-5 \\ 6-3-4 \\ 1-1-1 \end{array}$ DIFF=5 | $\begin{array}{c} 4-2-1 \\ 1-1-3 \\ 1-5-3 \end{array}$ DIFF=3 | (不採用) | (不採用) | (不採用) | $\begin{array}{c} 4-1-1 \\ 2-5-1 \\ 1-3-1 \end{array}$ DIFF=3 | (不採用) | (不採用) |
| 3 | $\begin{array}{c} 1-4-1 \\ 3-2-5 \\ 8-6-7 \end{array}$ DIFF=5 | $\begin{array}{c} 2-1-5 \\ 6-3-4 \\ 1-7-8 \end{array}$ DIFF=5 | $\begin{array}{c} 4-2-1 \\ 1-1-3 \\ 1-5-3 \\ 1-1-6 \end{array}$ DIFF=3 | | | | (不採用) | | |
| 4 | $\begin{array}{c} 1-4-9 \\ 3-2-5 \\ 8-6-7 \end{array}$ DIFF=5 | (不採用) | $\begin{array}{c} 4-2-1 \\ 7-5-3 \\ 1-1-6 \end{array}$ DIFF=3 | | | | | | |
| 5 | | | $\begin{array}{c} 4-2-1 \\ 7-5-3 \\ 1-8-6 \end{array}$ DIFF=3 | | | | | | |
| 6 | | | $\begin{array}{c} 4-2-1 \\ 7-5-3 \\ 1-8-6 \end{array}$ DIFF=3 | | | | | | |
| 7 | | | $\begin{array}{c} 4-2-1 \\ 7-5-3 \\ 9-8-6 \end{array}$ DIFF=3 | | | | | | |
| | BAND=6 | | BAND=4 | | | | | | |



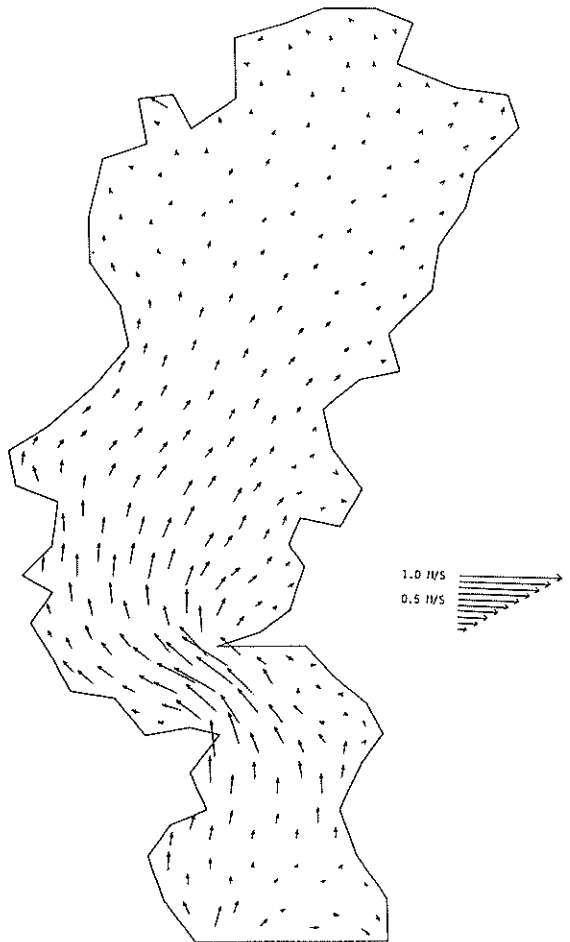
付図-7-1-1 潮流図, FEM-1, 36時間後



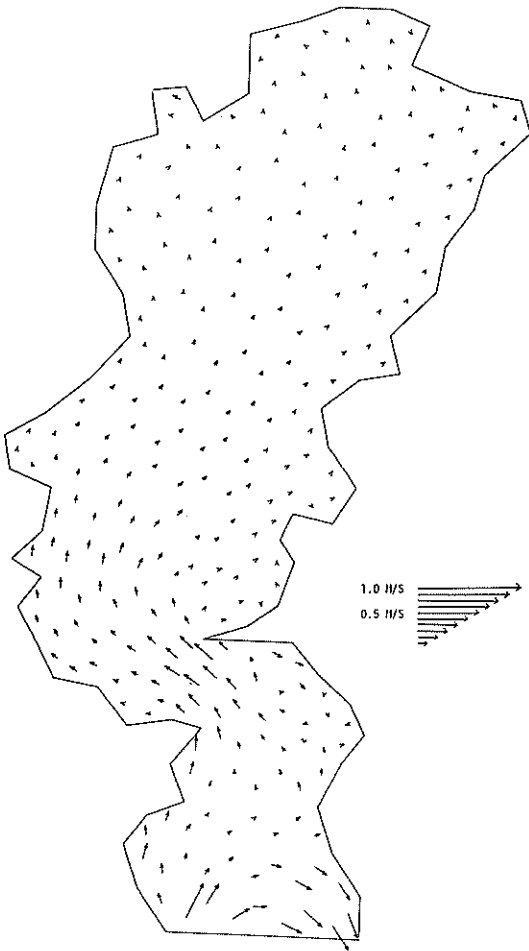
付図-7-1-2 潮流図, FEM-1, 38時間後



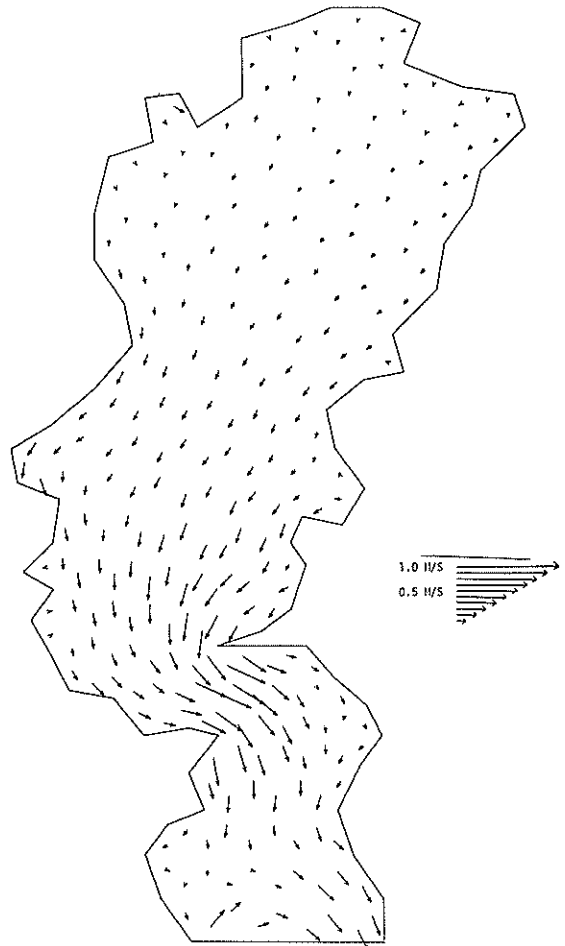
付図-7-1-3 潮流図, FEM-1, 40時間後



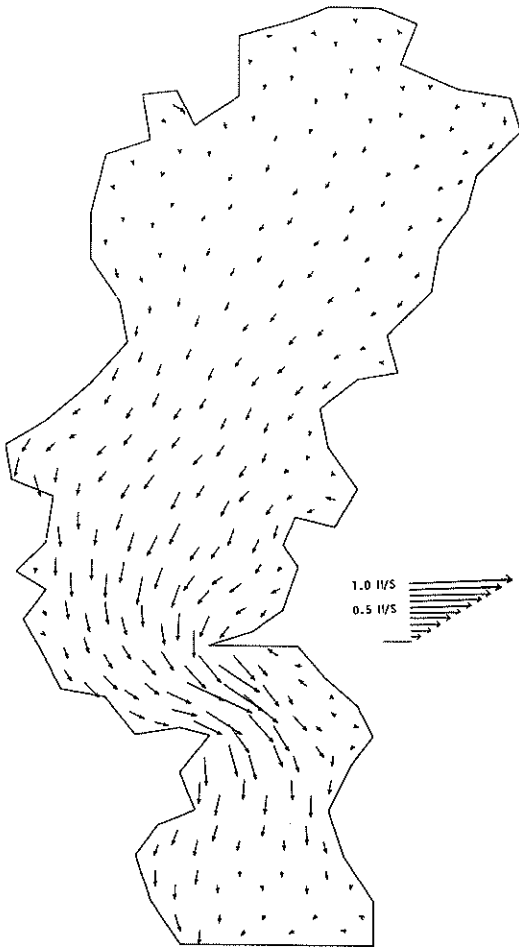
付図-7-1-4 潮流図, FEM-1, 42時間後



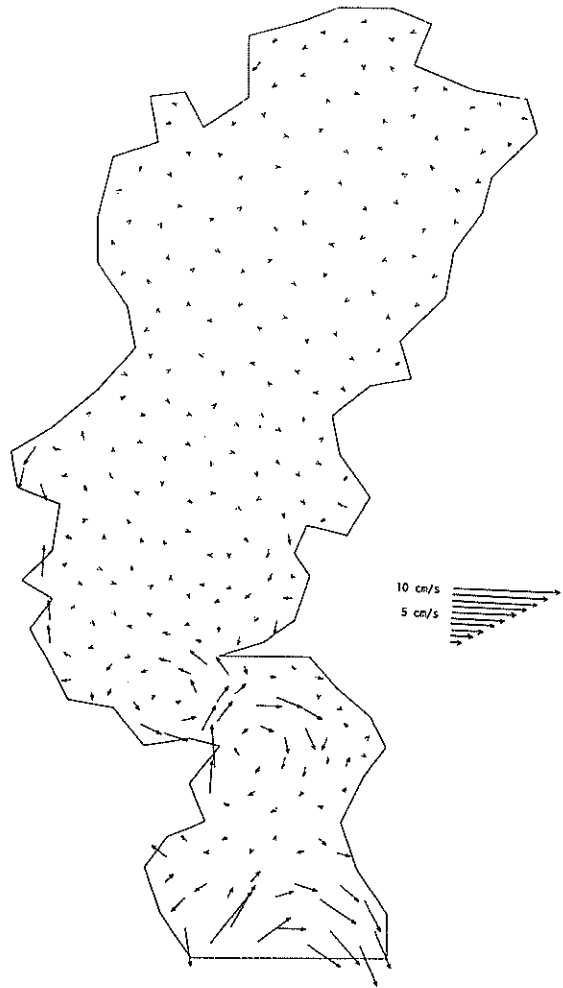
付図-7-1-5 潮流図, FEM-1, 44時間後



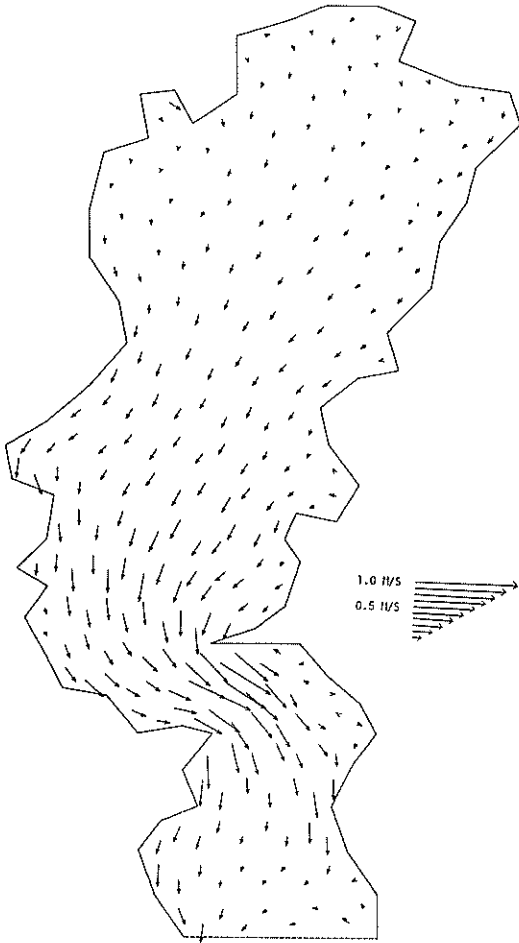
付図-7-1-6 潮流図, FEM-1, 46時間後



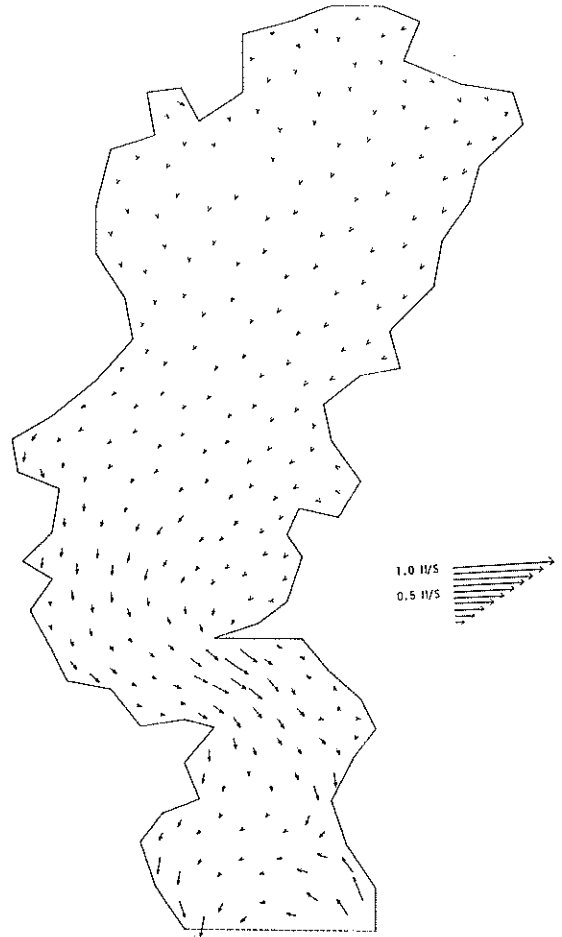
付図-7-1-7 潮流図, FEM-1, 48時間後



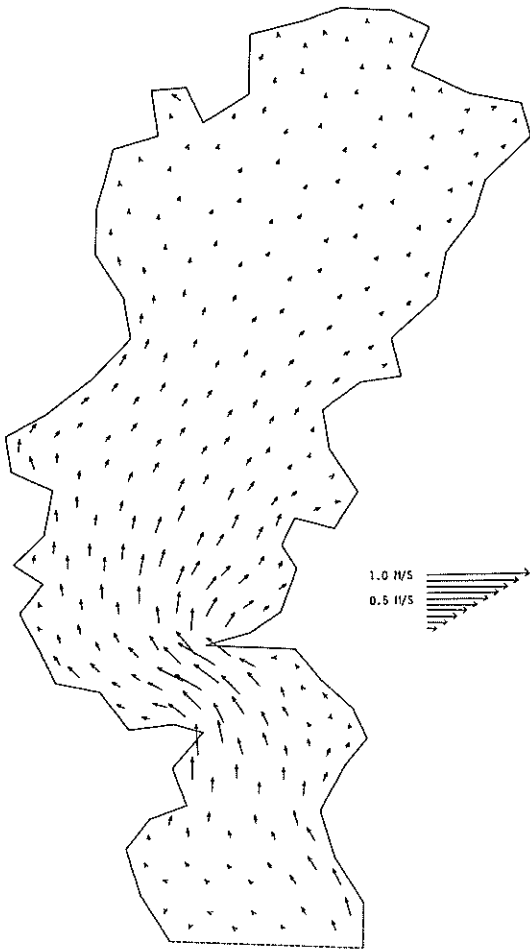
付図-7-1-8 潮汐残差流, FEM-1
 ($\Delta t=30s, E_{zz}=200m^2/s, f=0.01$)



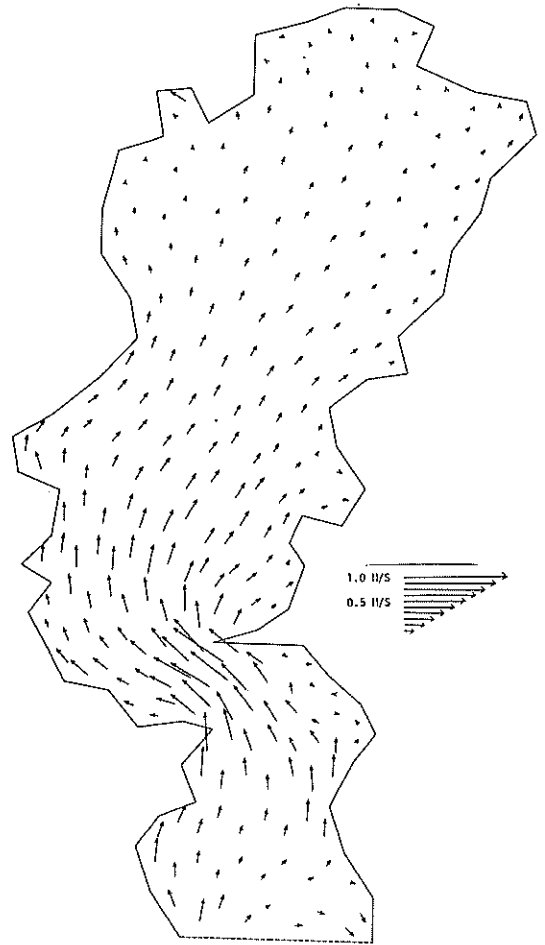
付図-7-2-1 潮流図, FEM-2, 36時間後



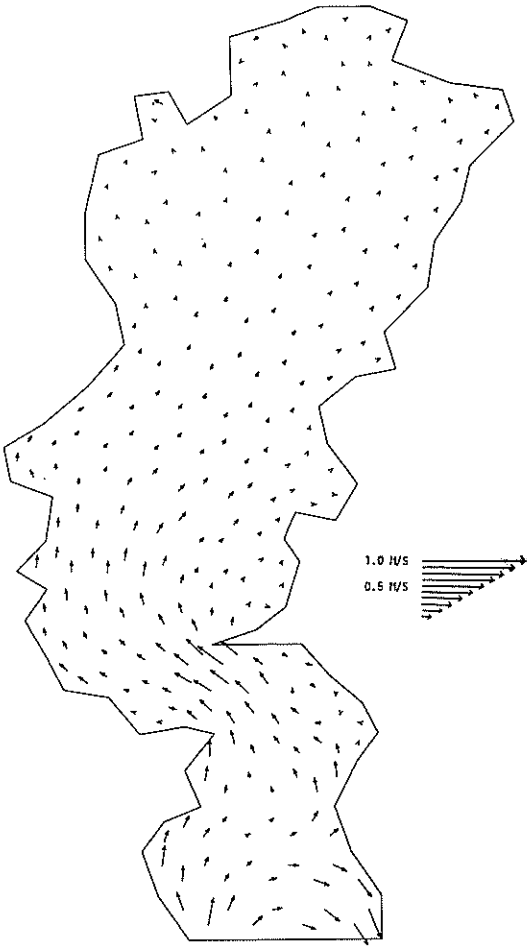
付図-7-2-2 潮流図, FEM-2, 38時間後



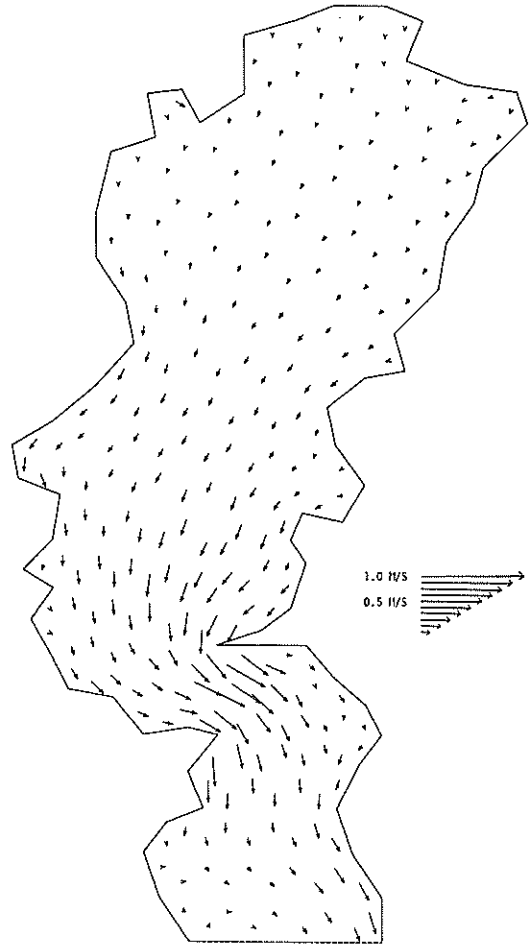
付図-7-2-3 潮流図, FEM-2, 40時間後



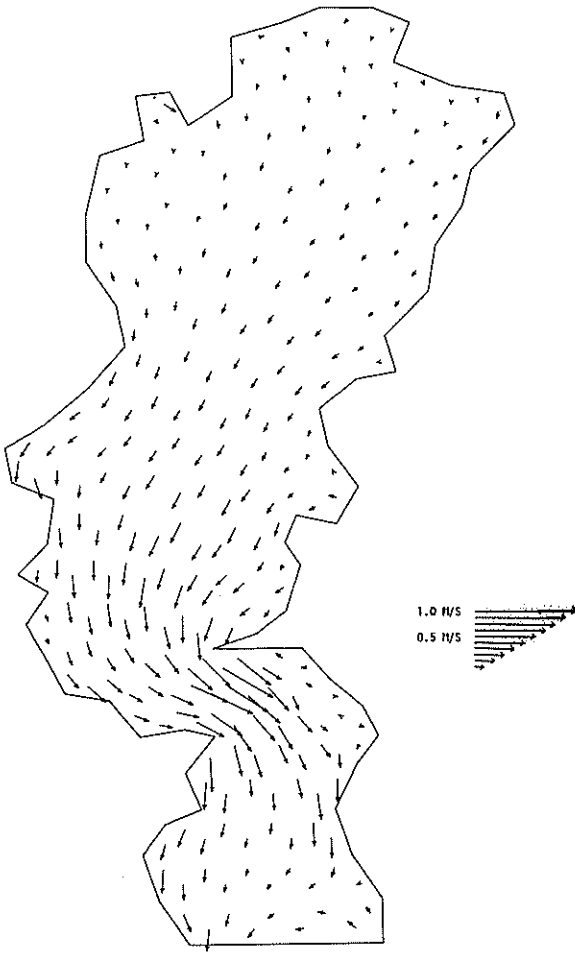
付図-7-2-4 潮流図, FEM-2, 42時間後



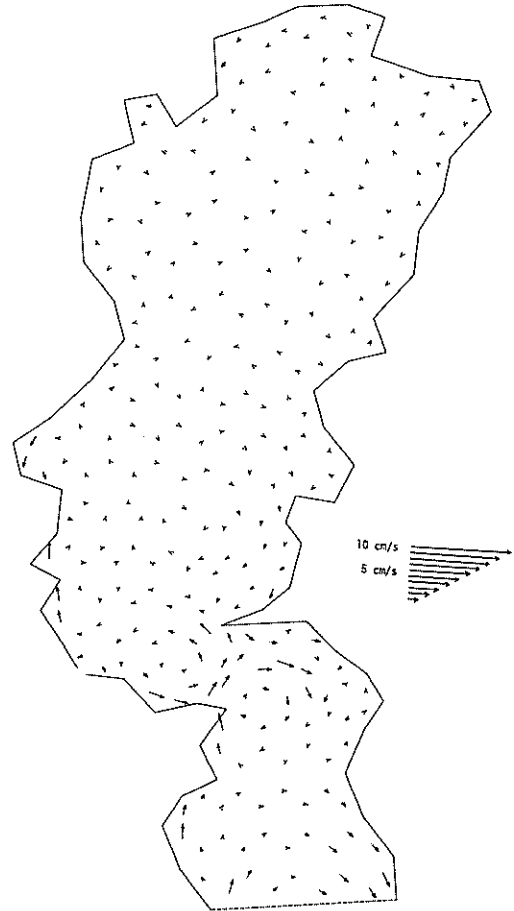
付図-7-2-5 潮流図, FEM-2, 44時間後



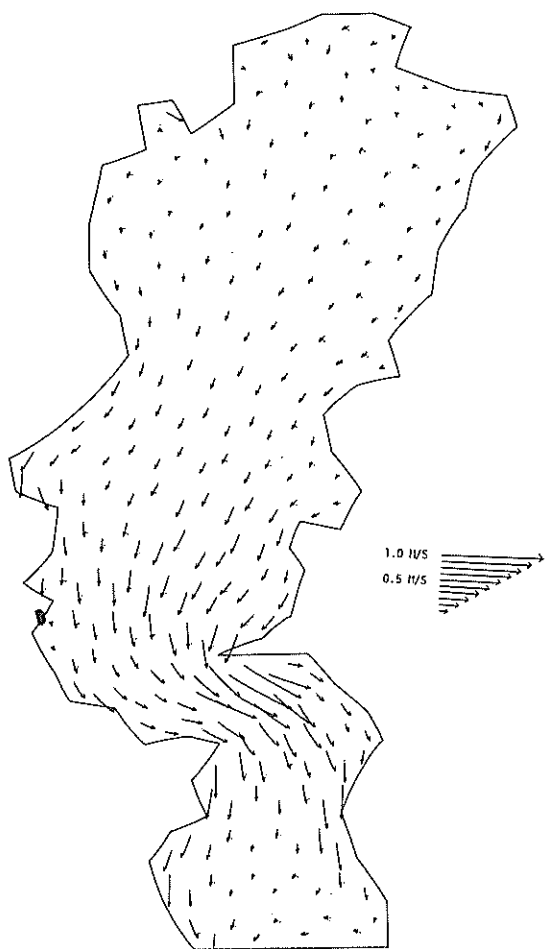
付図-7-2-6 潮流図, FEM-2, 46時間後



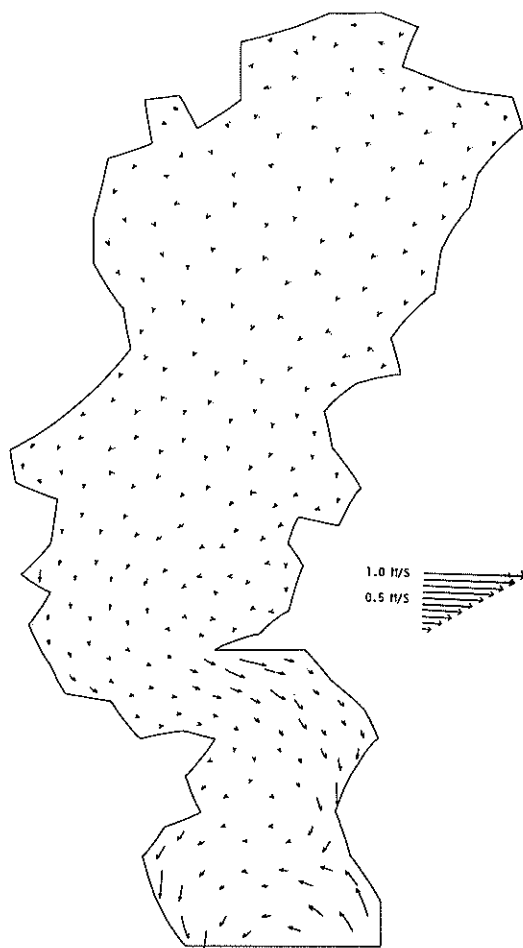
付図-7-2-7 潮流図, FEM-2, 48時間後



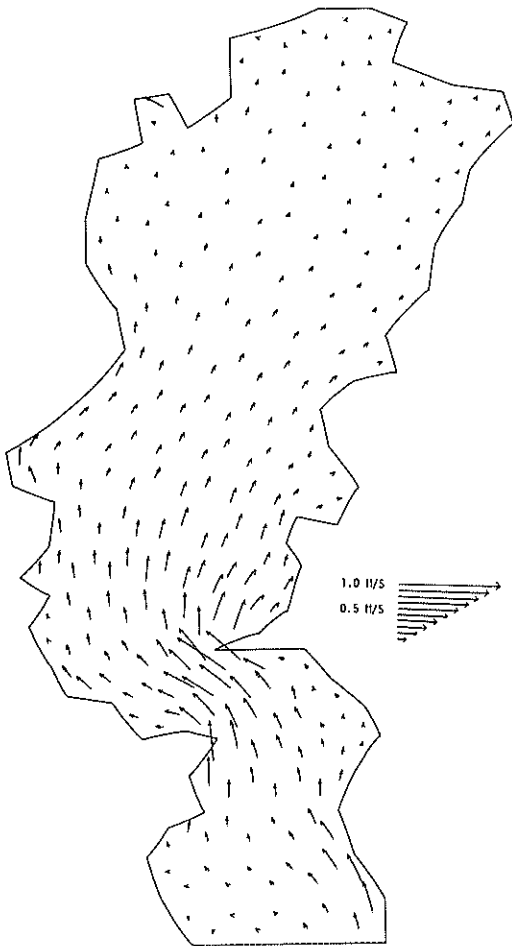
付図-7-2-8 潮汐残差流, FEM-2
 ($\Delta t=30s, E_{xx}=500m^2/s, f=0.01$)



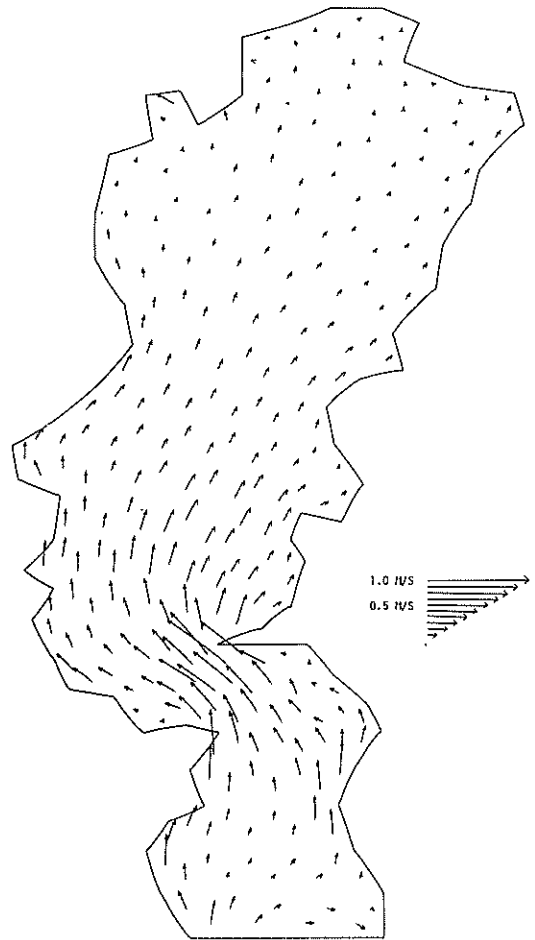
付図-7-3-1 潮流図, FEM-3, 36時間後



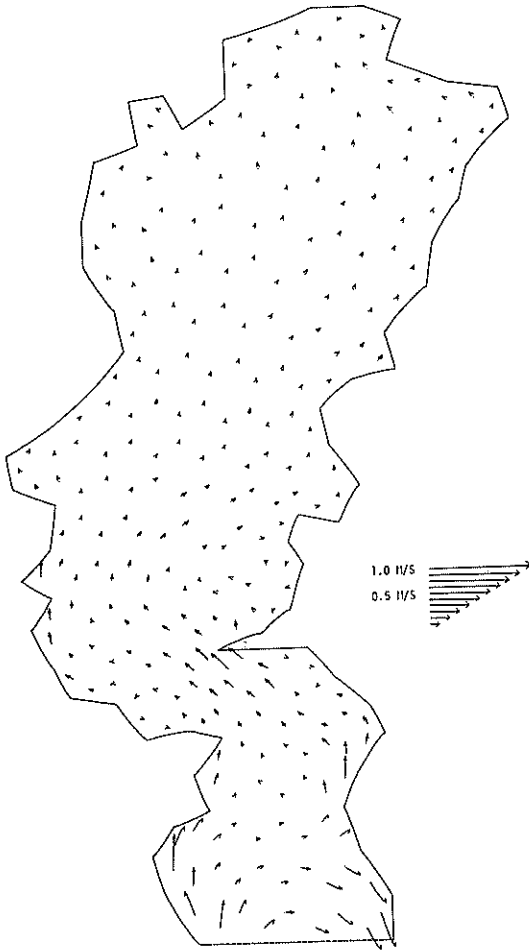
付図-7-3-2 潮流図, FEM-3, 38時間後



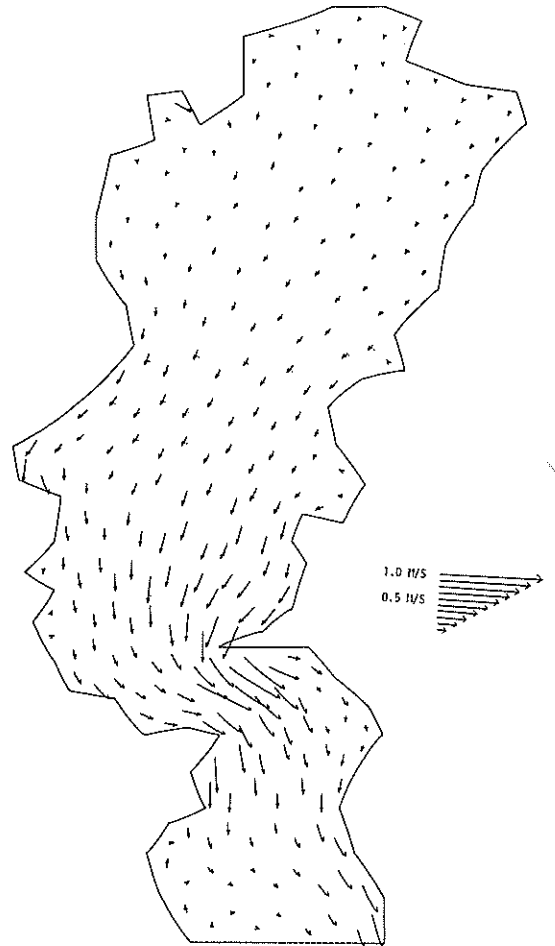
付図-7-3-3 潮流図, FEM-3, 40時間後



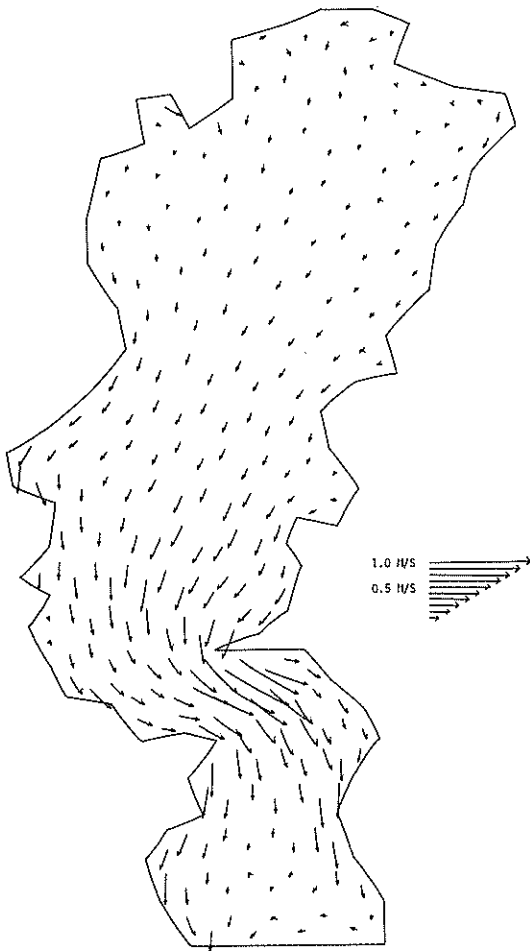
付図-7-3-4 潮流図, FEM-3, 42時間後



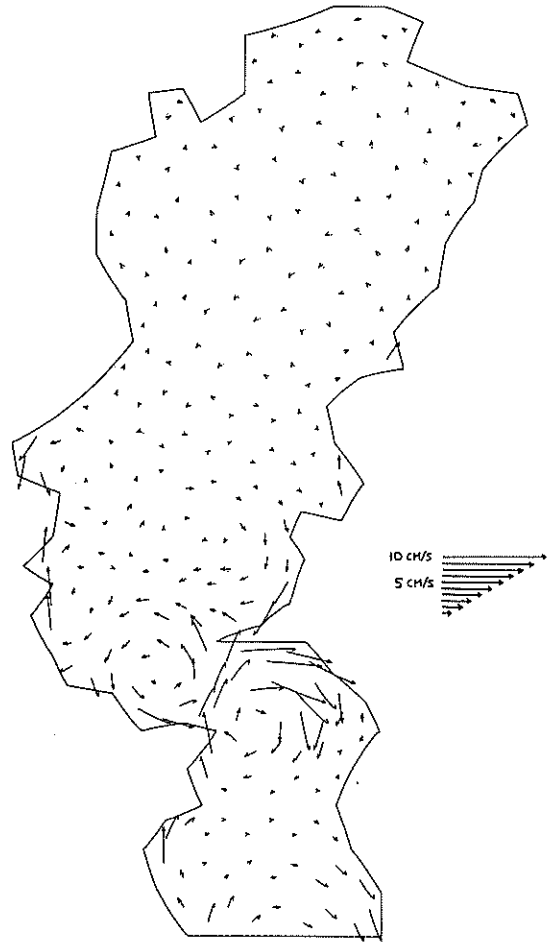
付図-7-3-5 潮流図, FEM-3, 44時間後



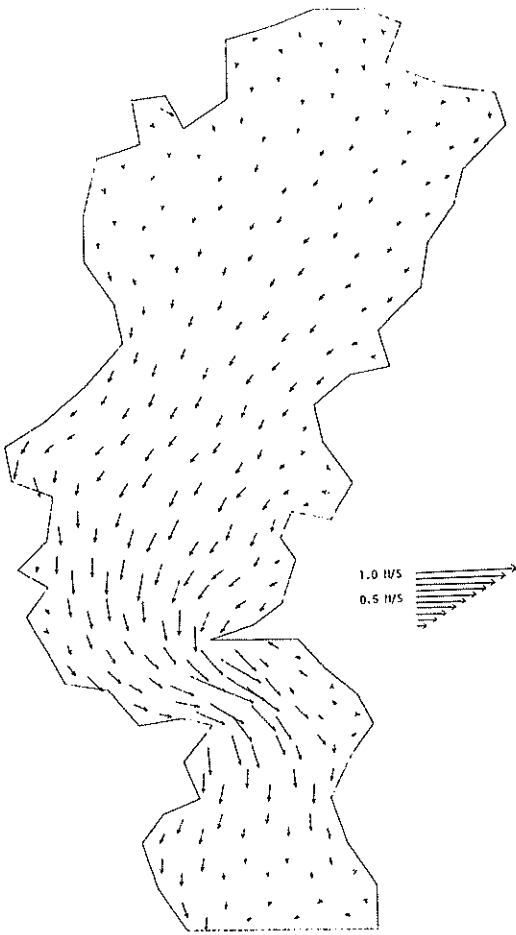
付図-7-3-6 潮流図, FEM-3, 46時間後



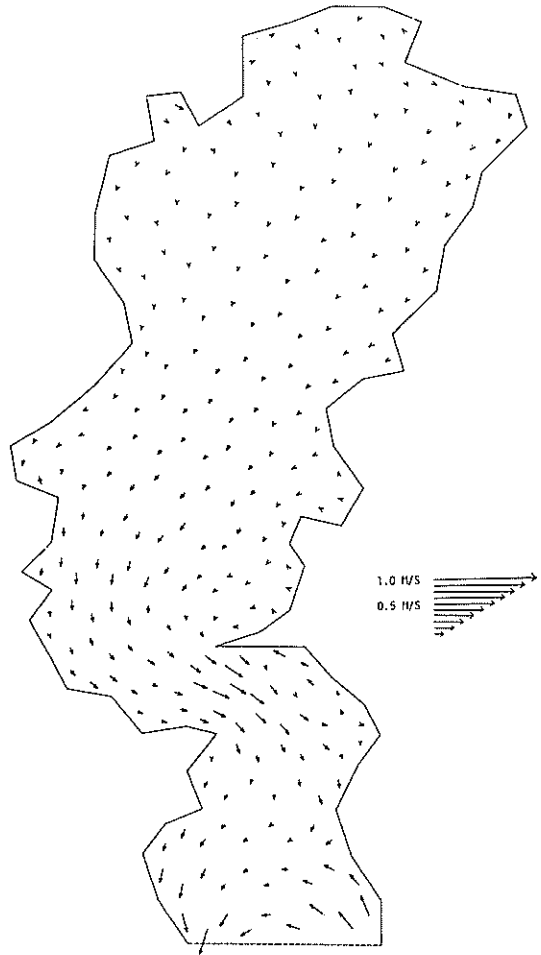
付図-7-3-7 潮流図, FEM-3, 48時間後



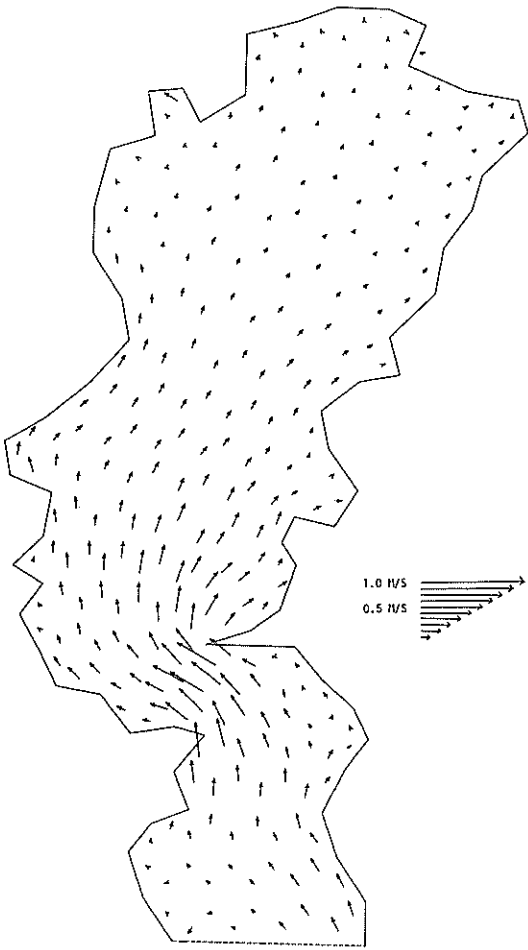
付図-7-3-8 潮汐残差流, FEM-3
 ($\Delta t = 30s, E_{xx} = 500m^2/s, f = 0.002$)



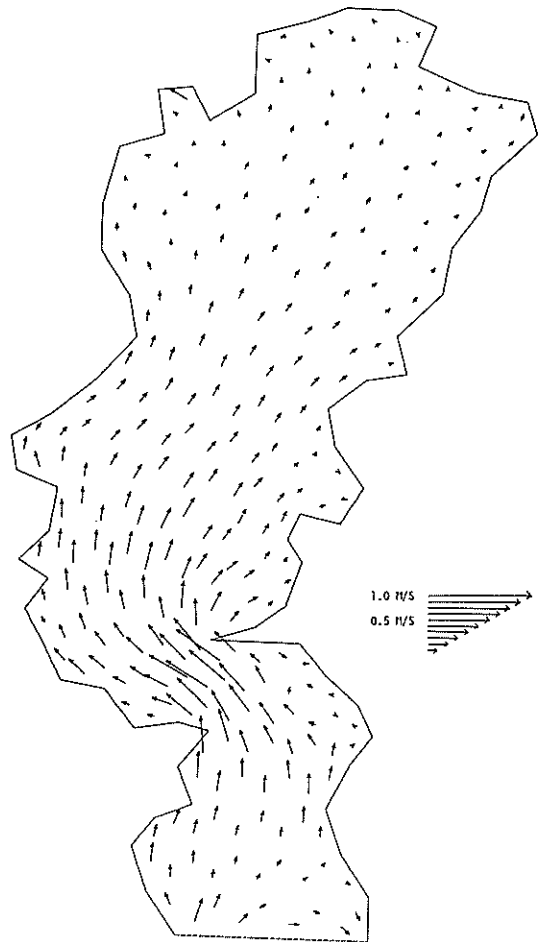
付図-7-4-1 潮流図, FEM-4, 36時間後



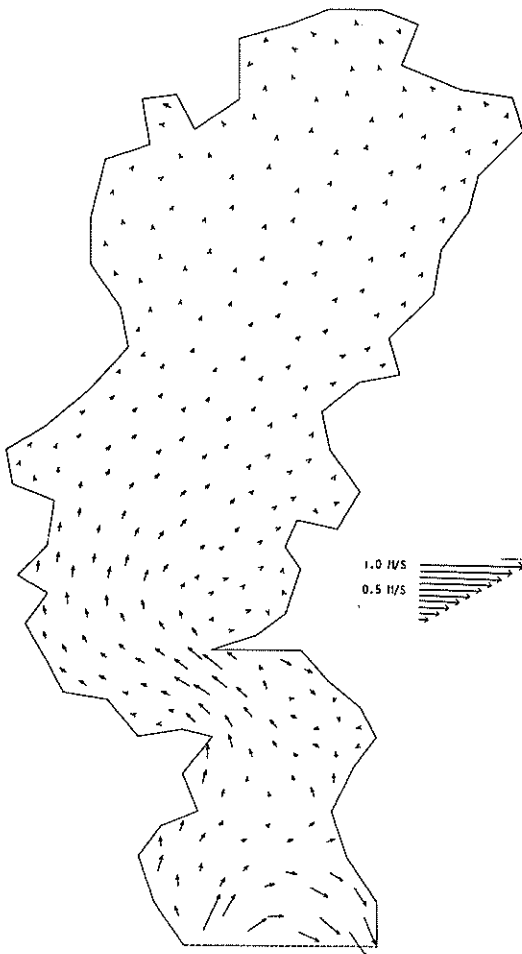
付図-7-4-2 潮流図, FEM-4, 38時間後



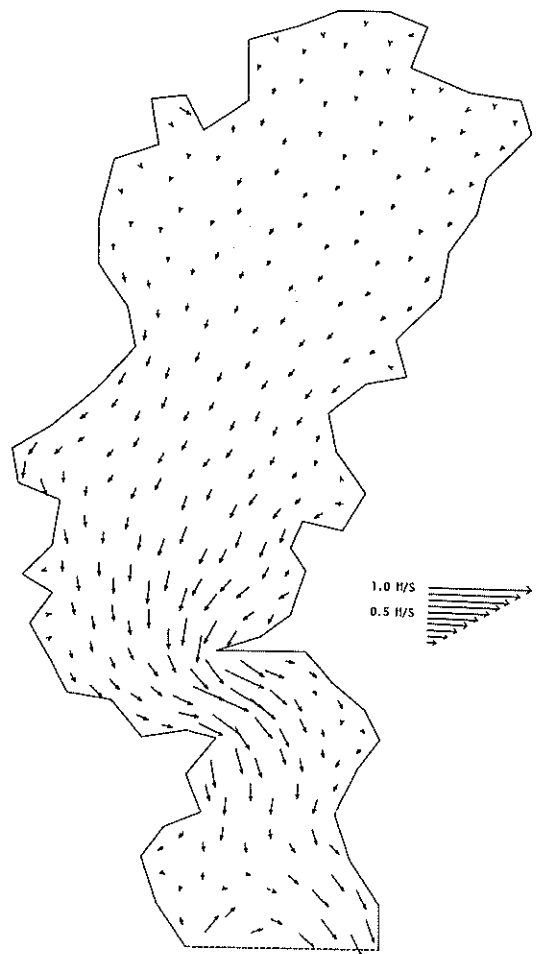
付図-7-4-3 潮流図, FEM-4, 40時間後



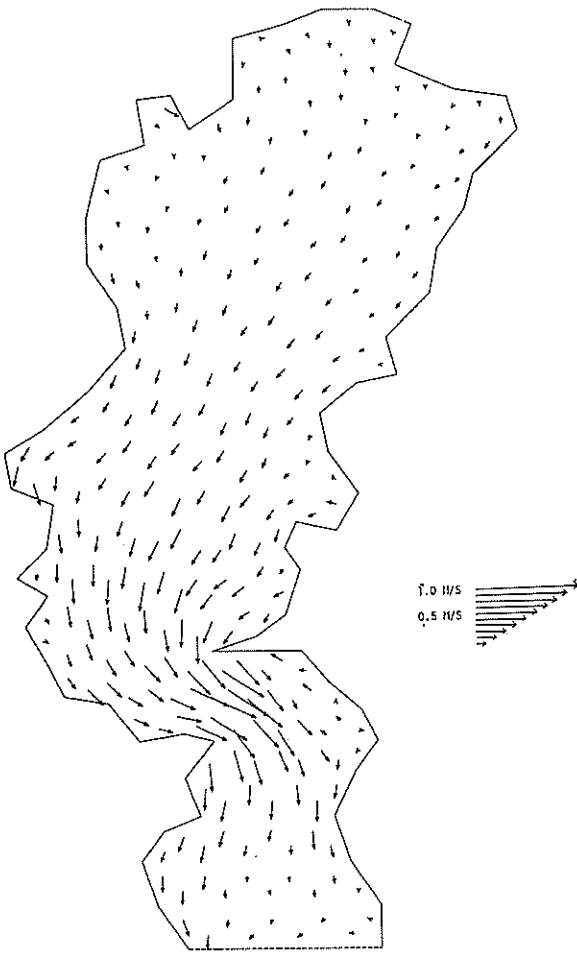
付図-7-4-4 潮流図, FEM-4, 42時間後



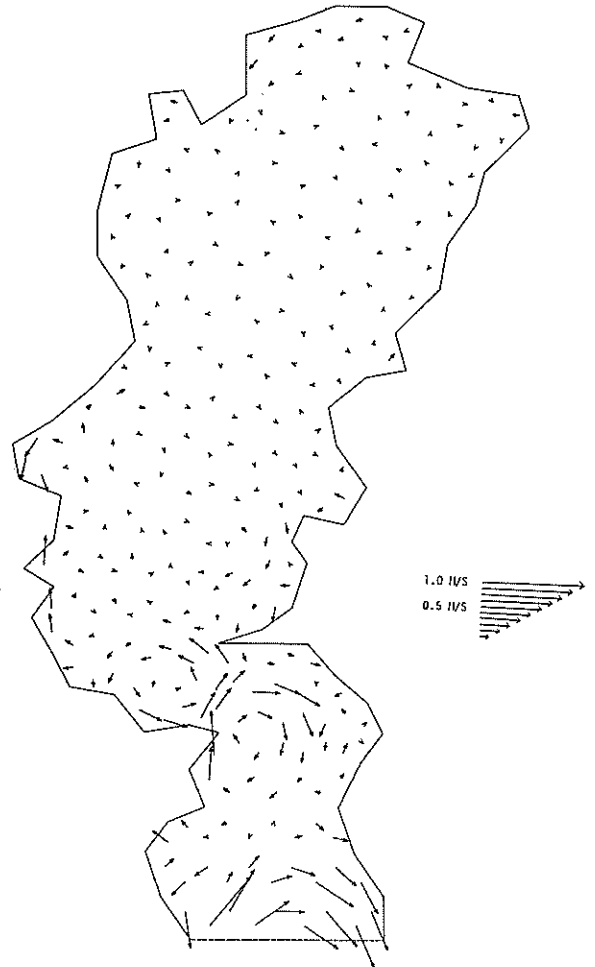
付図-7-4-5 潮流図, FEM-4, 44時間後



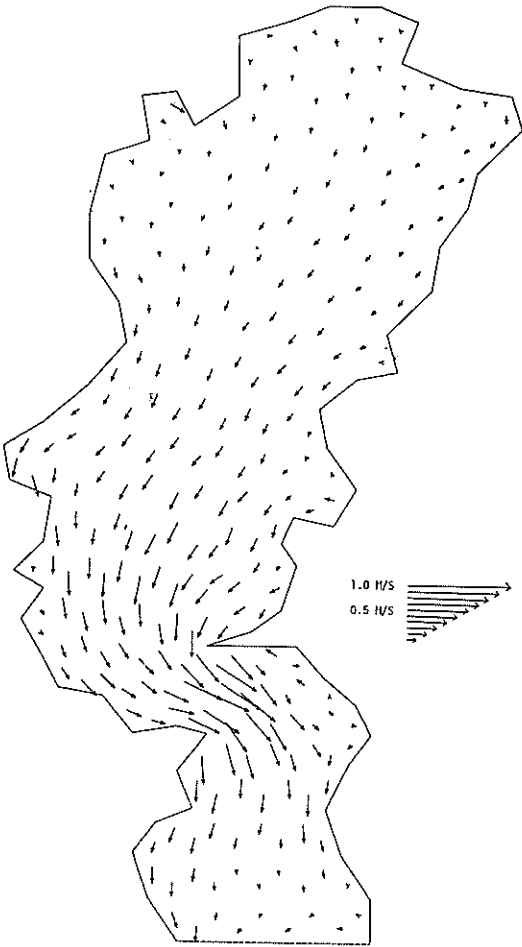
付図-7-4-6 潮流図, FEM-4, 46時間後



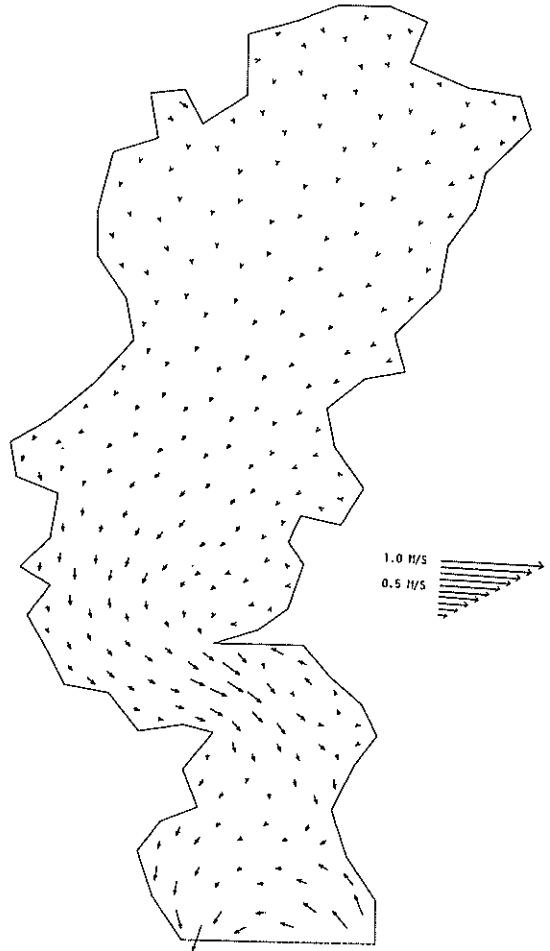
付図-7-4-7 潮流図, FEM-4, 48時間後



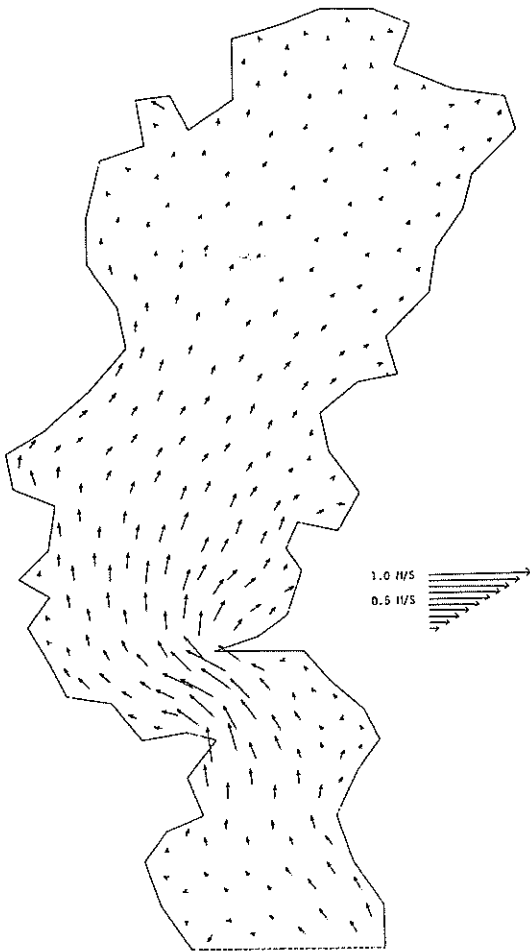
付図-7-4-8 潮汐残差流, FEM-4
 ($\Delta t=40s, E_{xx}=200m^2/s, f=0.01$)



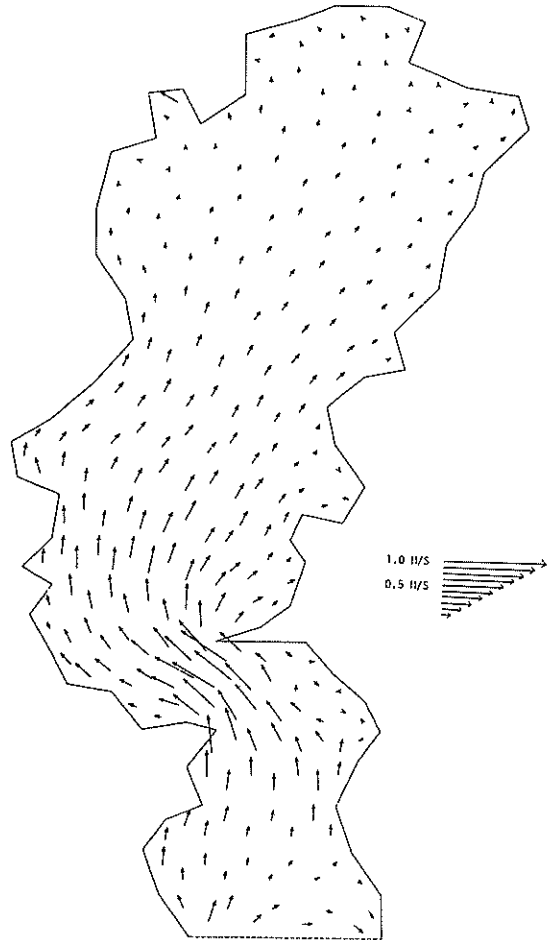
付図-7-5-1 潮流図, FEM-5, 36時間後



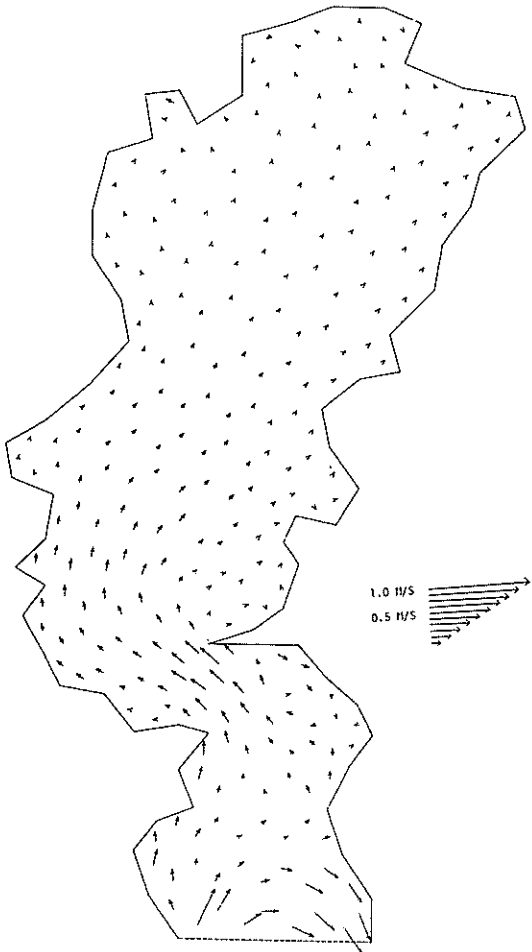
付図-7-5-2 潮流図, FEM-5, 38時間後



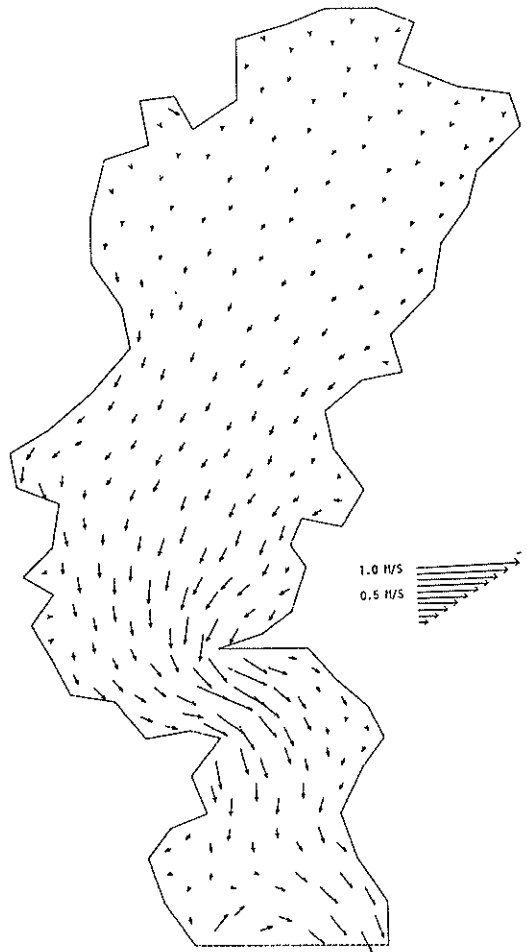
付図-7-5-3 潮流図, FEM-5, 40時間後



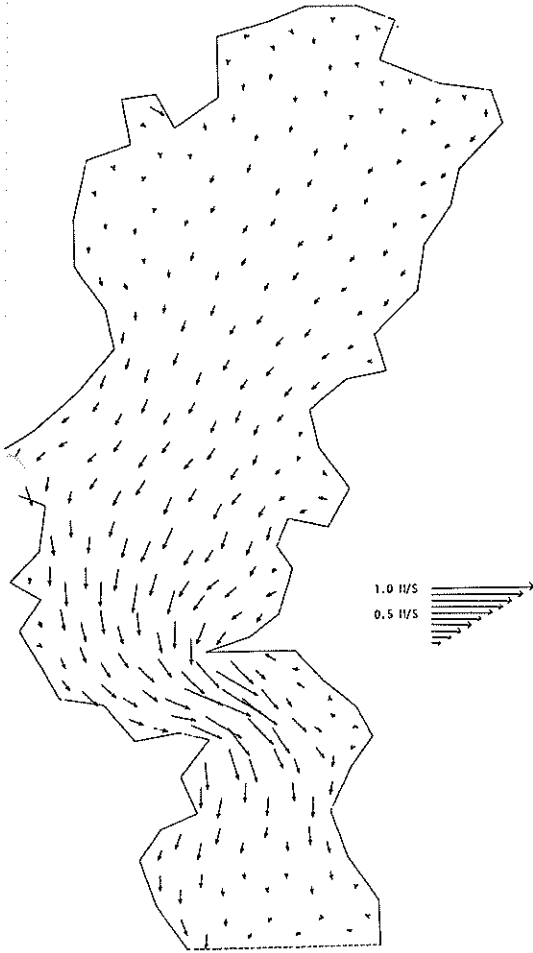
付図-7-5-4 潮流図, FEM-5, 42時間後



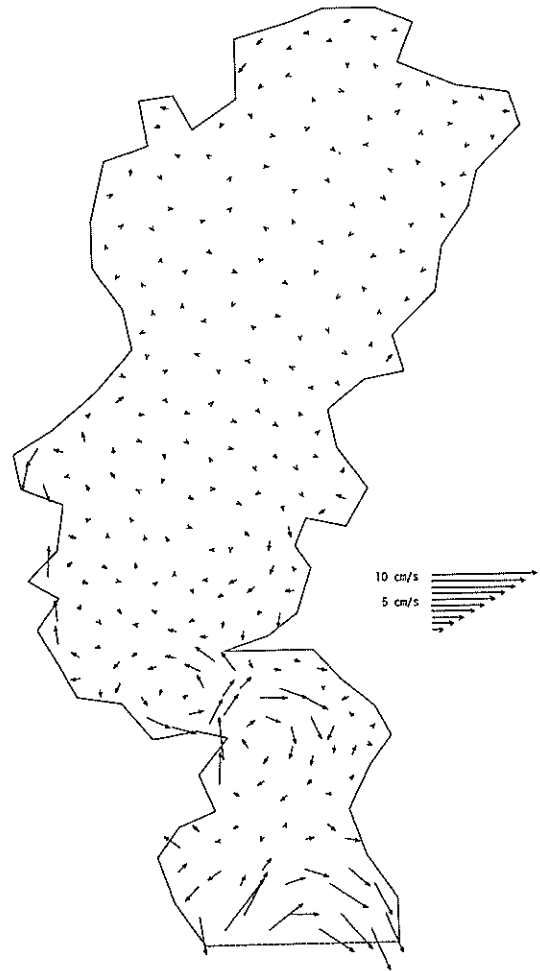
付図-7-5-5 潮流図, FEM-5, 44時間後



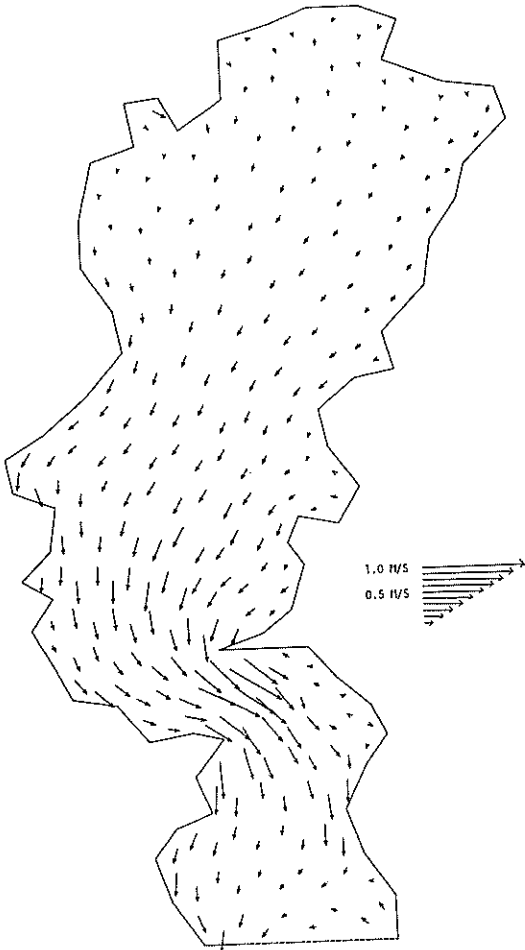
付図-7-5-6 潮流図, FEM-5, 46時間後



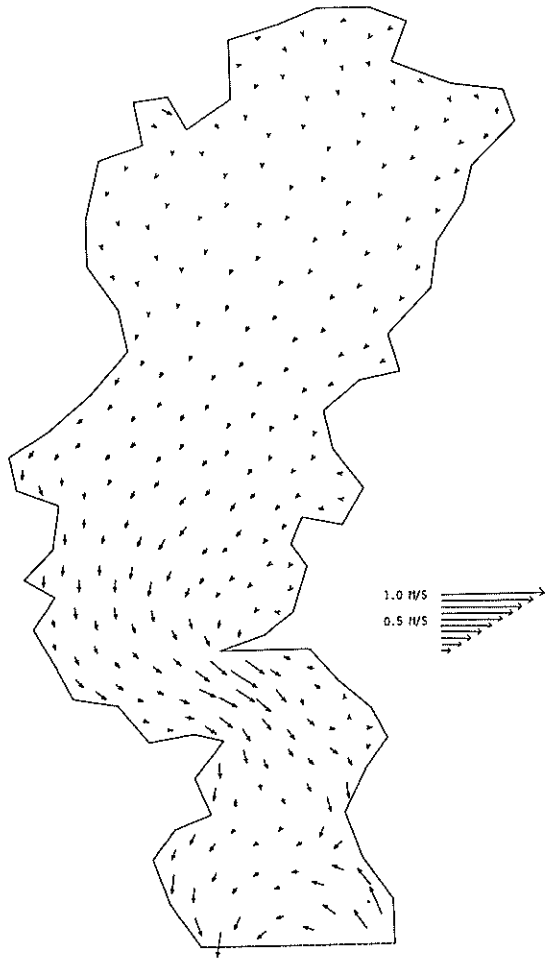
付図-7-5-7 潮流図, FEM-5, 48時間後



付図-7-5-8 潮汐残差流, FEM-5
 ($\Delta t=60s, E_{xx}=200m^2/s, f=0.01$)



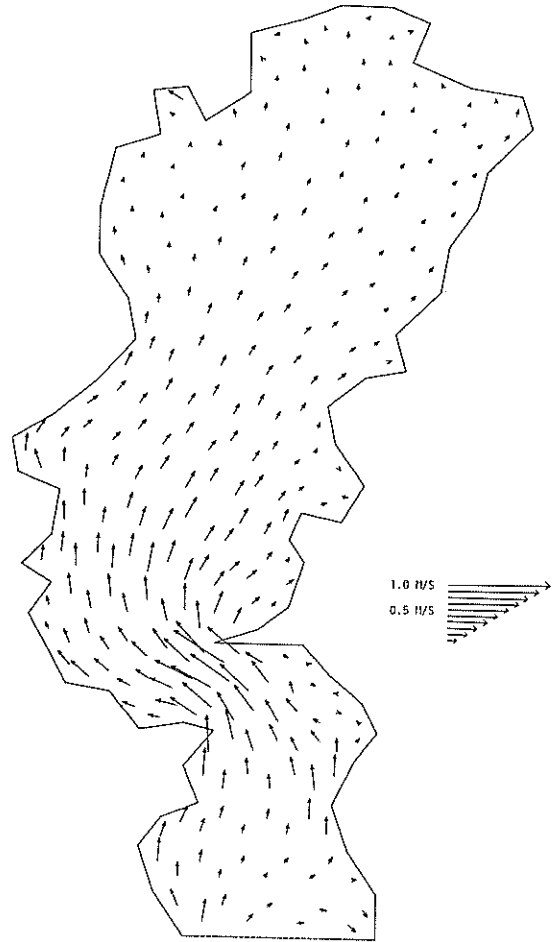
付図-7-6-1 潮流図, FEM-6, 36時間後



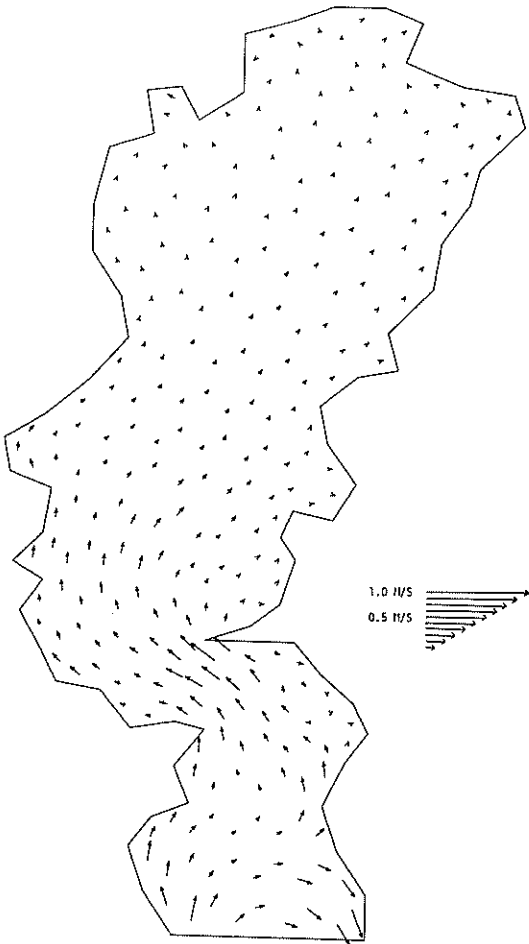
付図-7-6-2 潮流図, FEM-6, 38時間後



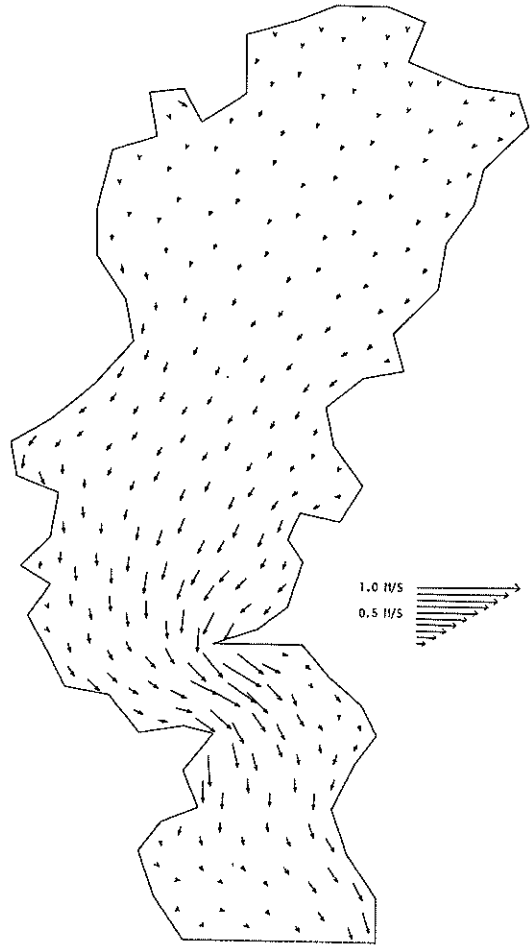
付図-7-6-3 潮流図, FEM-6, 40時間後



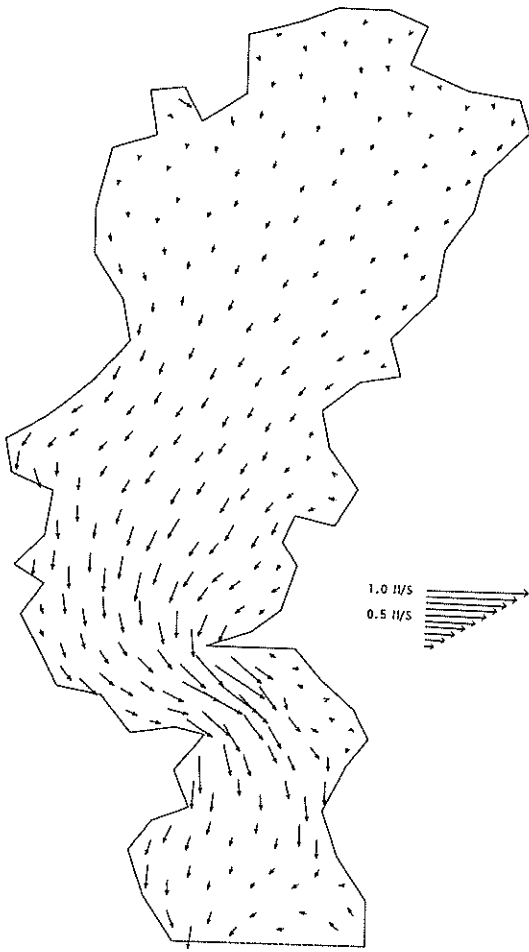
付図-7-6-4 潮流図, FEM-6, 42時間後



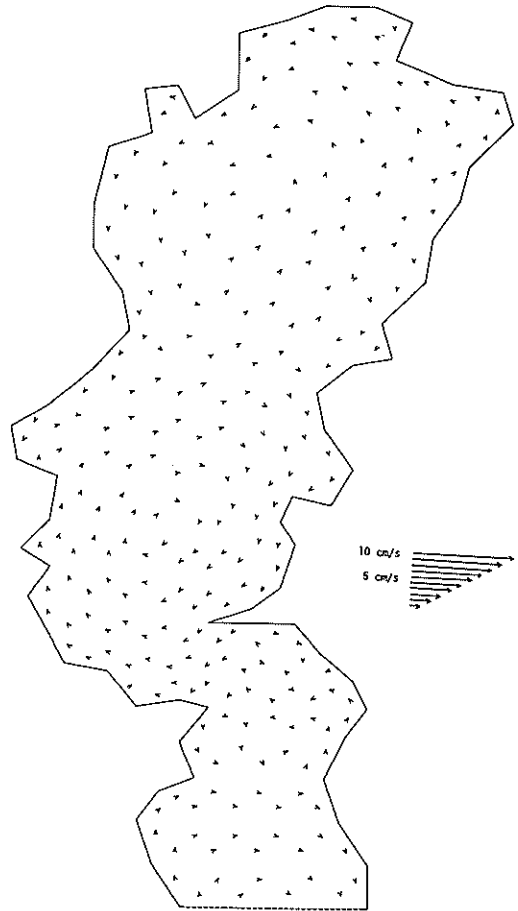
付図-7-6-5 潮流図, FEM-6, 44時間後



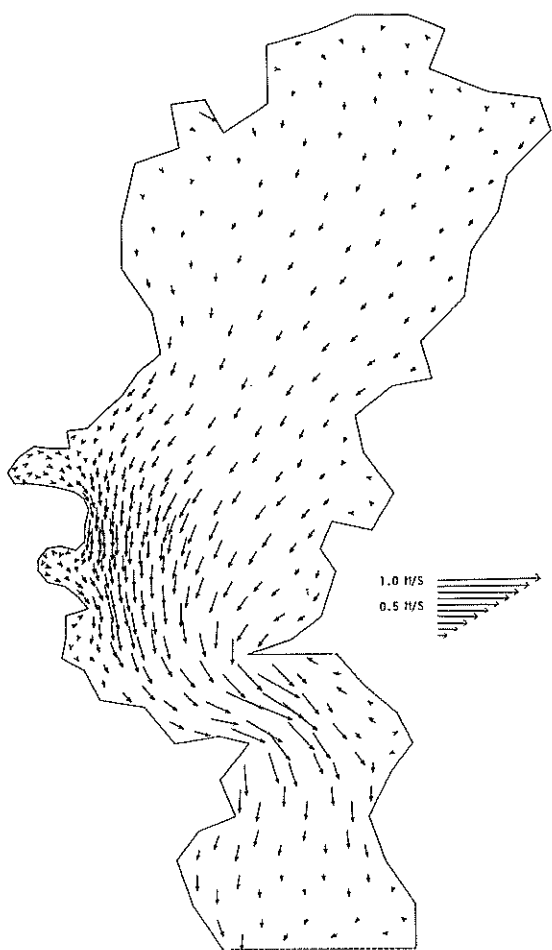
付図-7-6-6 潮流図, FEM-6, 46時間後



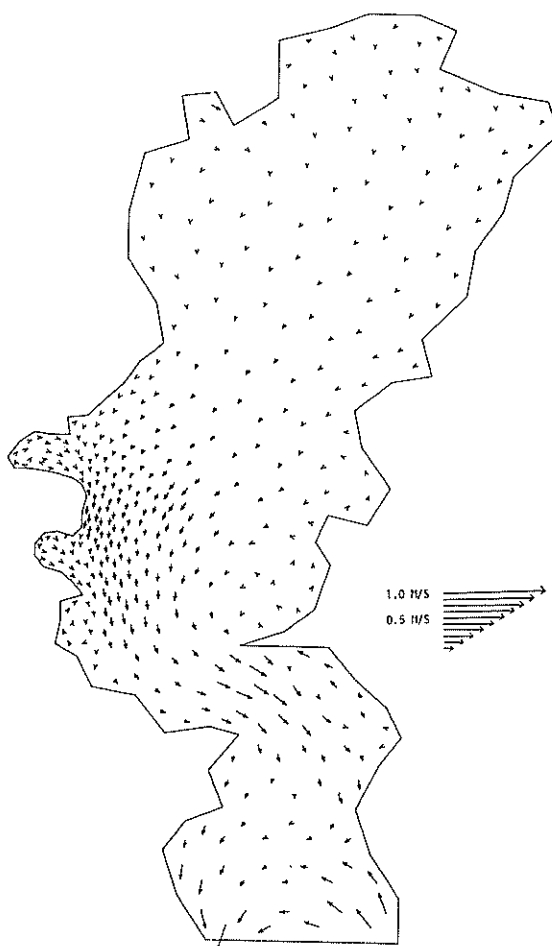
付圖-7-6-7 潮流圖, FEM-6, 48時間後



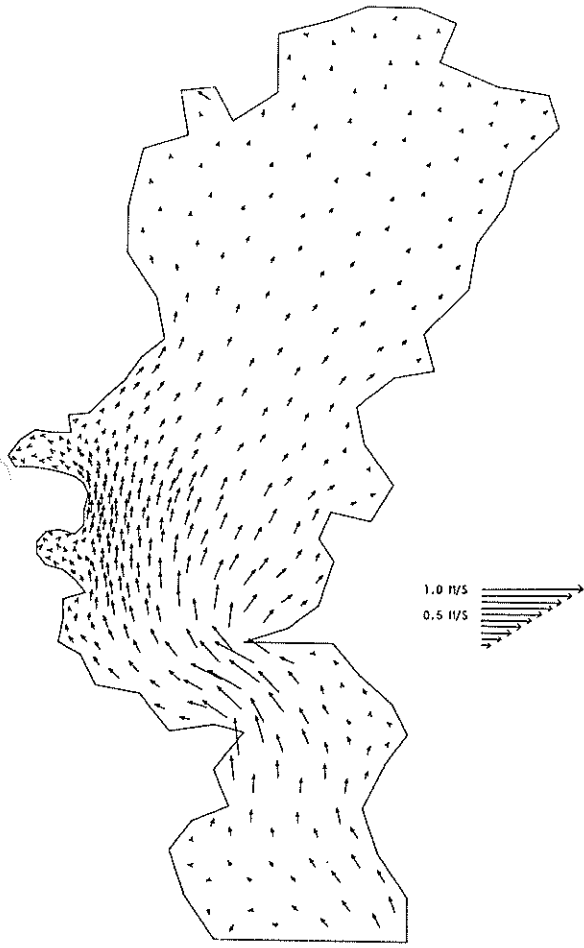
付圖-7-6-8 潮汐殘差流, FEM-6
 ($\Delta t = 30s$, $E_{xx} = 200 m^2/s$, $f = 0.01$, 慣性項無視)



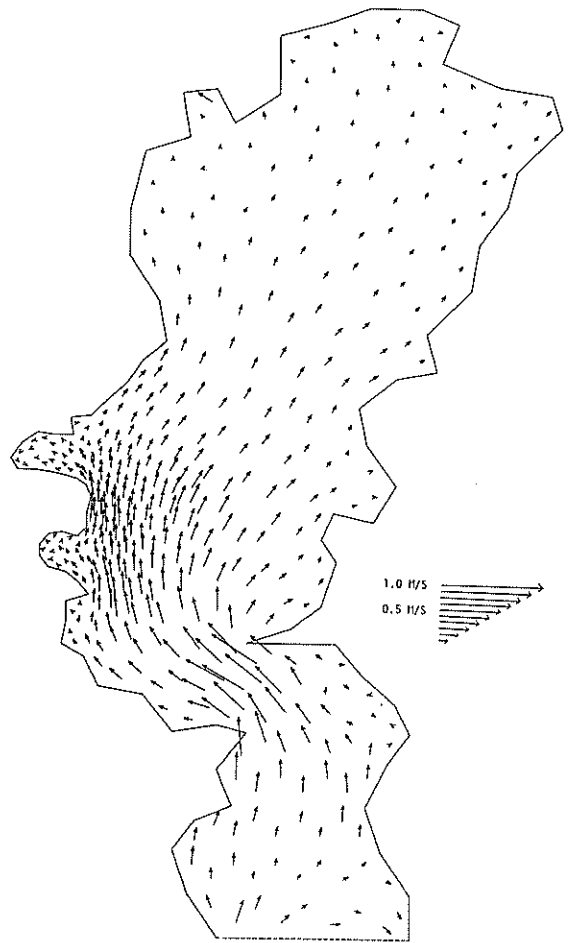
付図-7-7-1 潮流図, FEM-7, 36時間後



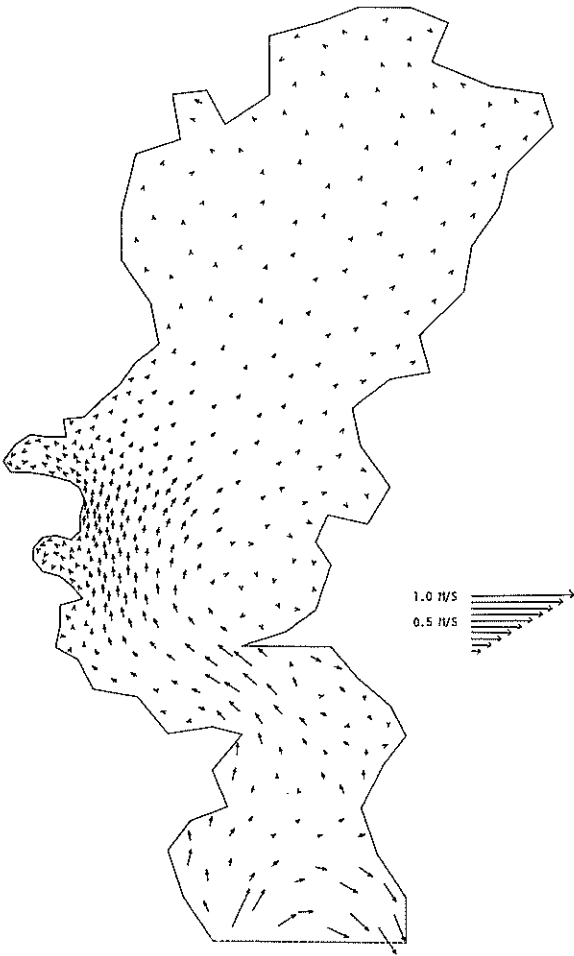
付図-7-7-2 潮流図, FEM-7, 38時間後



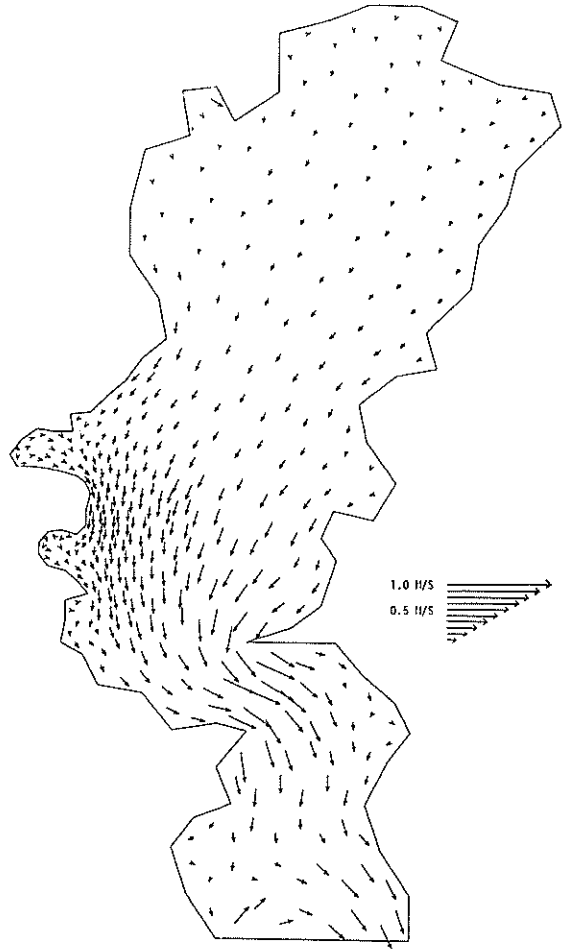
付図-7-7-3 潮流図, FEM-7, 40時間後



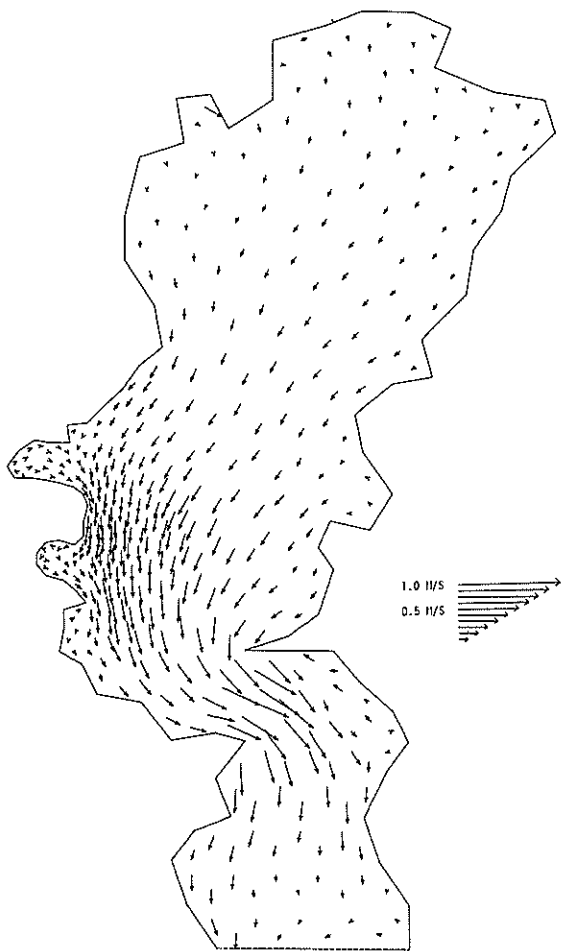
付図-7-7-4 潮流図, FEM-7, 42時間後



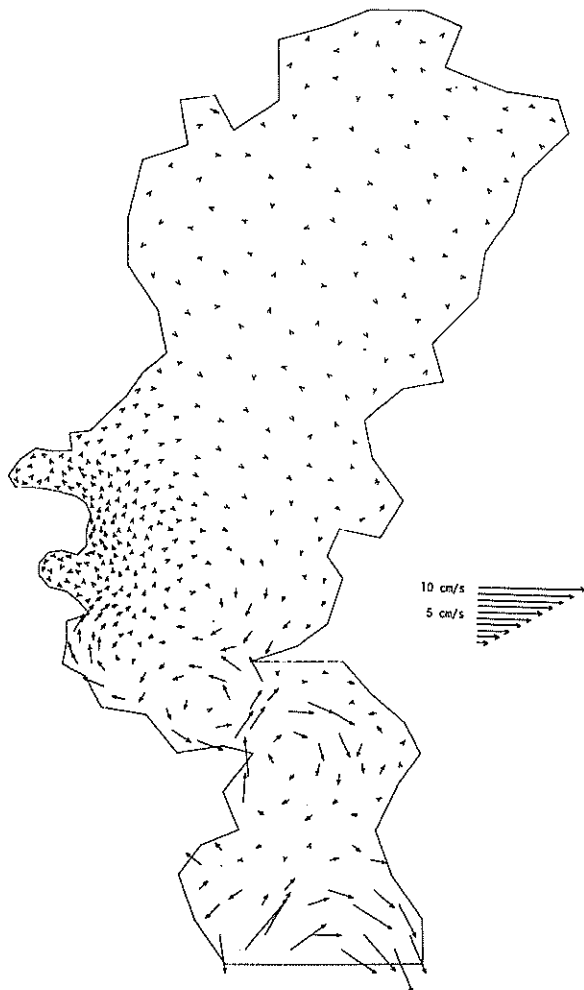
付図-7-7-5 潮流図, FEM-7, 44時間後



付図-7-7-6 潮流図, FEM-7, 46時間後

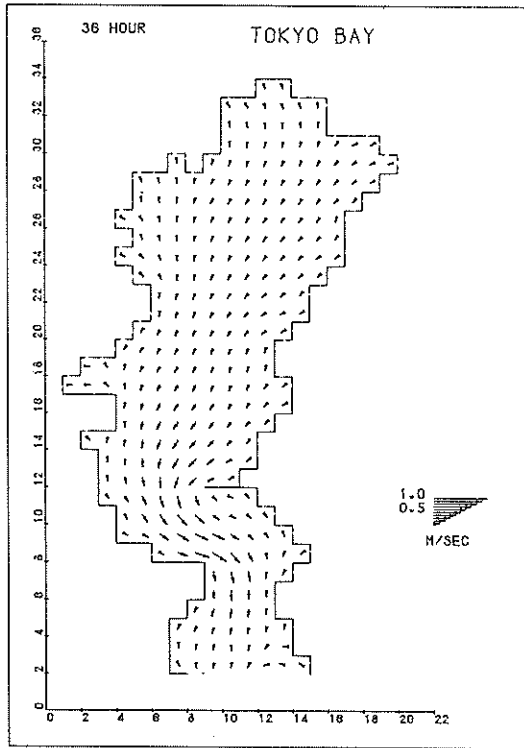


付図-7-7-7 潮流図, FEM-7, 48時間後

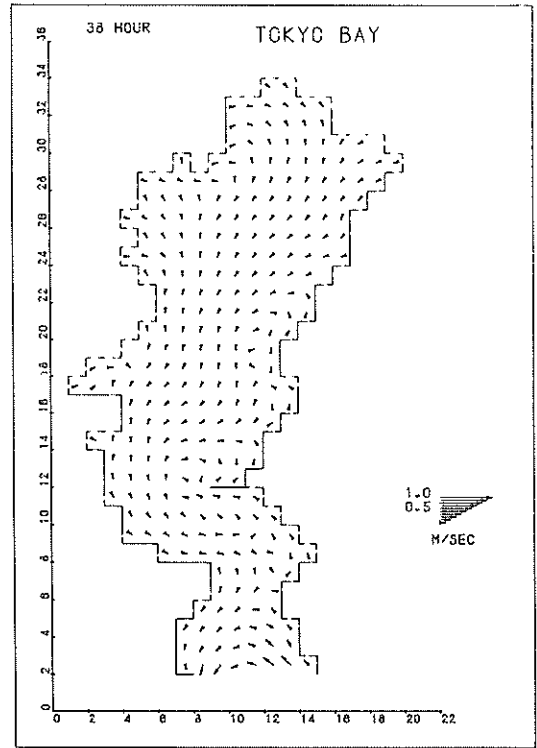


付図-7-7-8 潮汐残差流, FEM-7

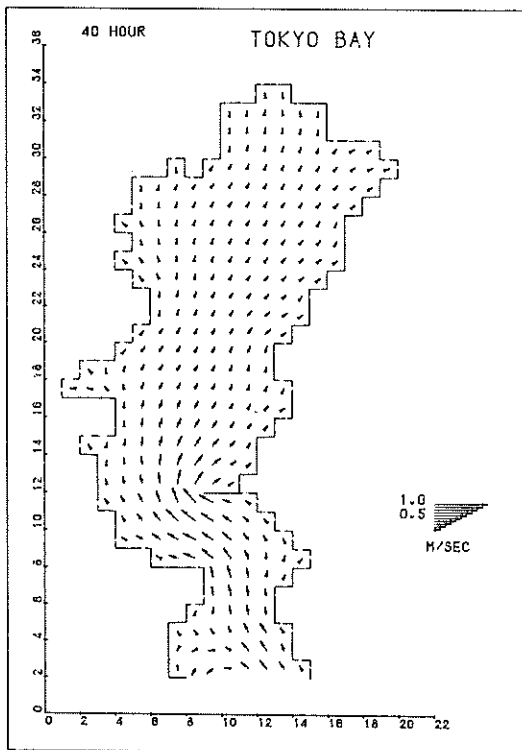
($\Delta t = 30\text{s}$, $E_{xx} = 200\text{m}^2/\text{s}$, $f = 0.01$, 一部細メッシュ)



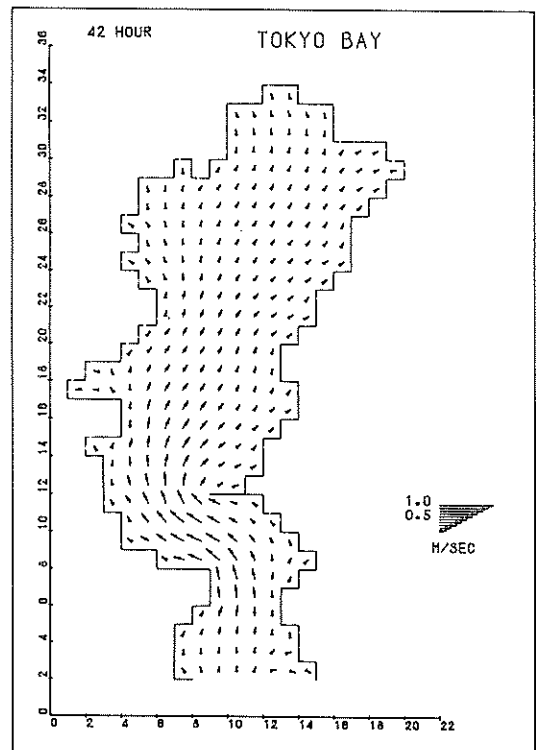
付図-8-1-1 潮流図, ADI-1, 36時間後



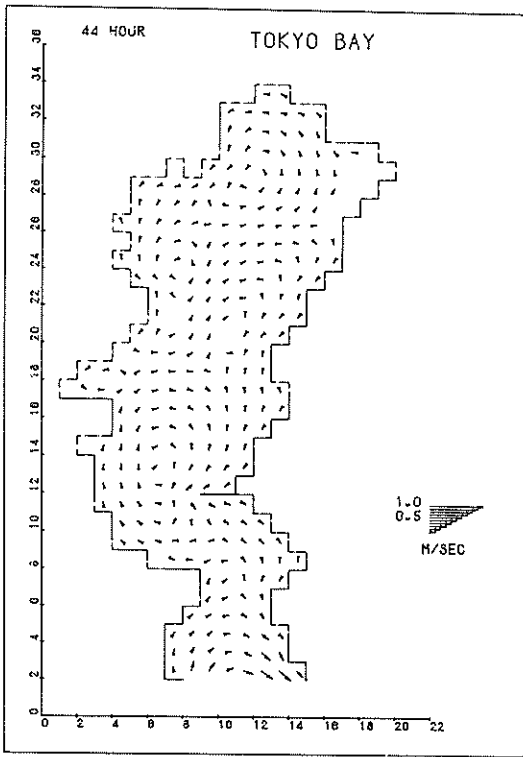
付図-8-1-2 潮流図, ADI-1, 38時間後



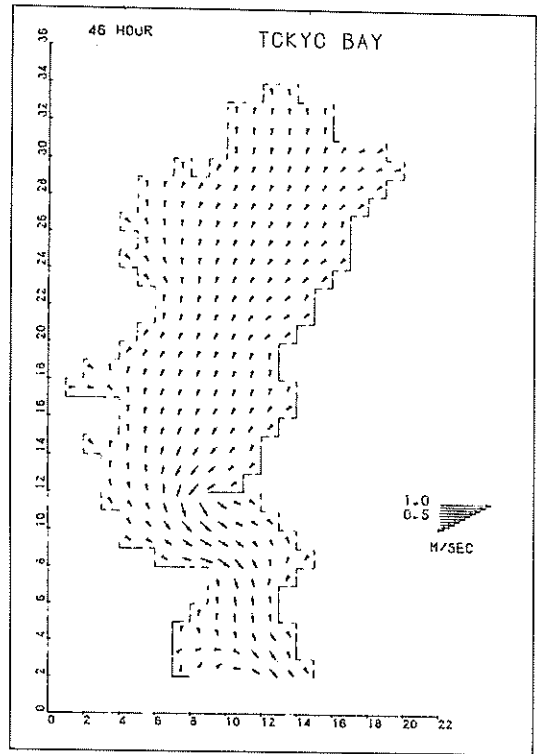
付図-8-1-3 潮流図, ADI-1, 40時間後



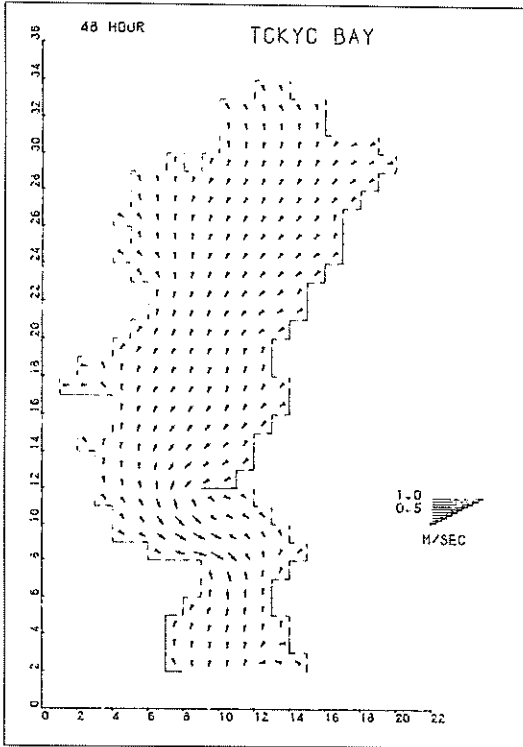
付図-8-1-4 潮流図, ADI-1, 42時間後



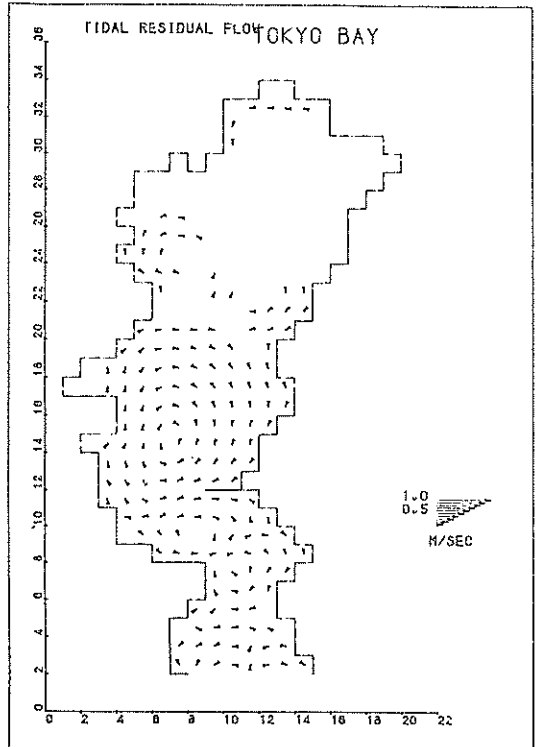
付図-8-1-5 潮流図, ADI-1, 44時間後



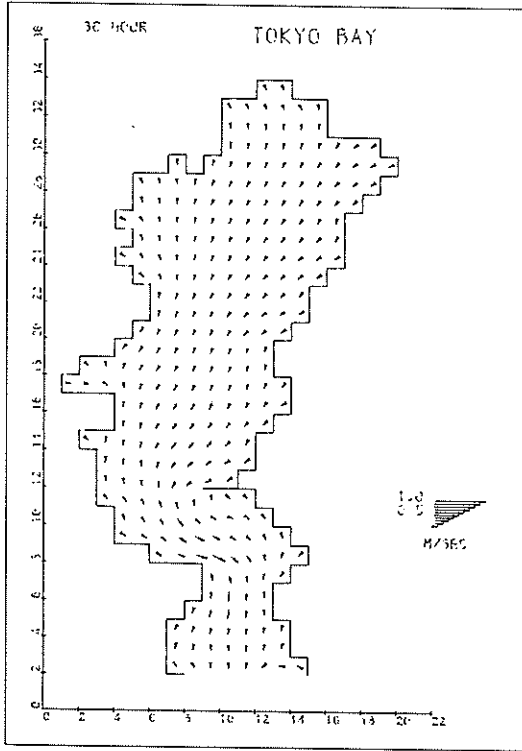
付図-8-1-6 潮流図, ADI-1, 46時間後



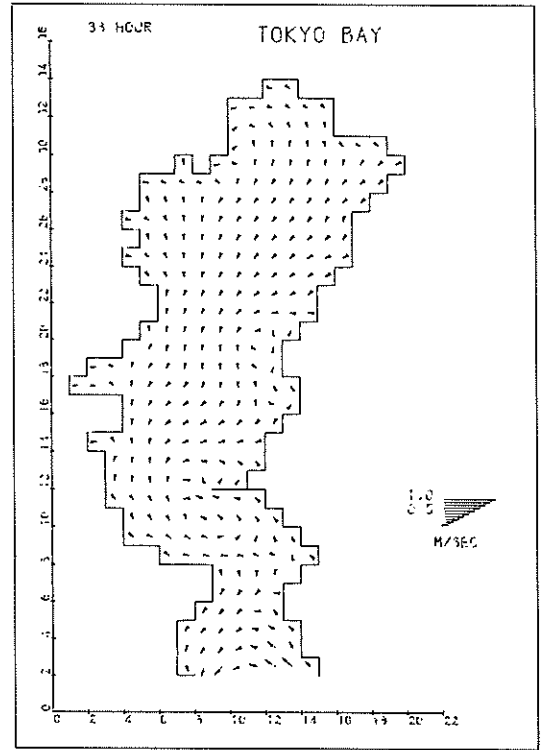
付図-8-1-7 潮流図, ADI-1, 48時間後



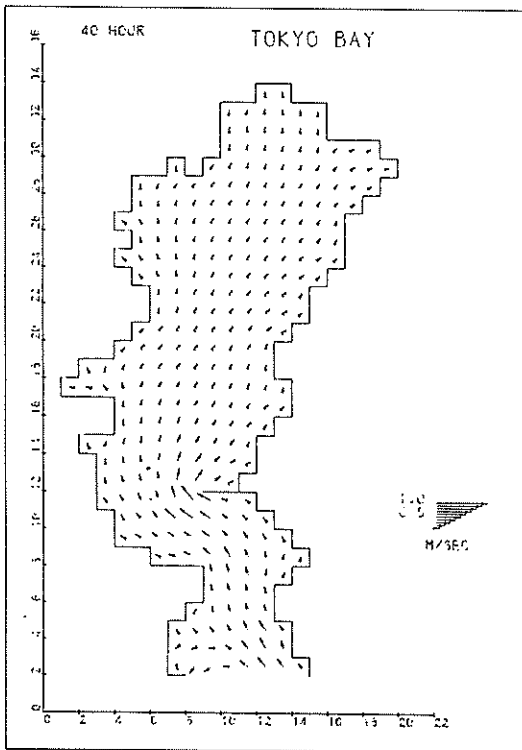
付図-8-1-8 潮汐残差流, ADI-1



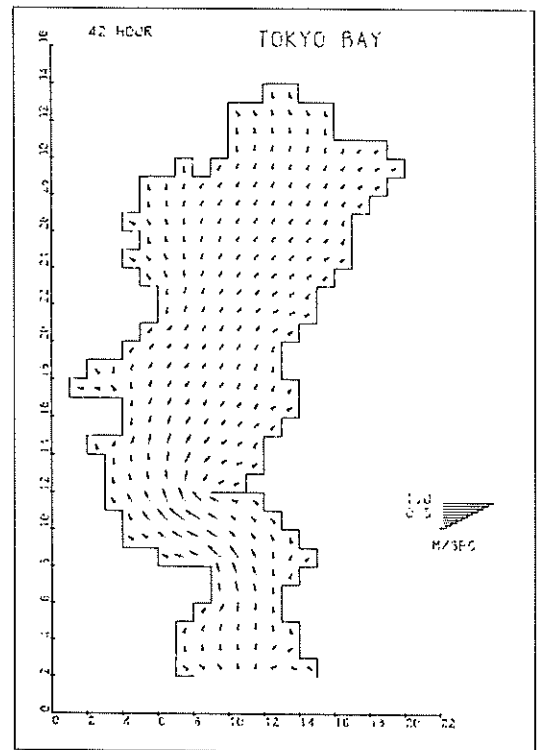
付図-8-2-1 潮流図, ADI-2, 36時間後



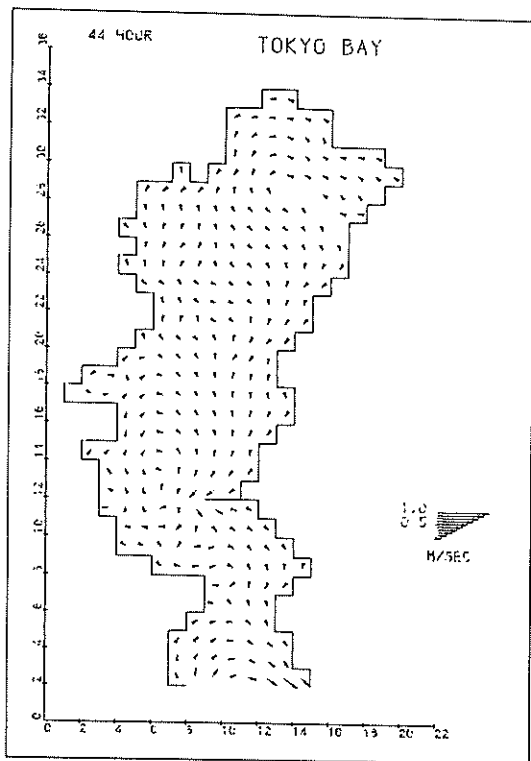
付図-8-2-2 潮流図, ADI-2, 38時間後



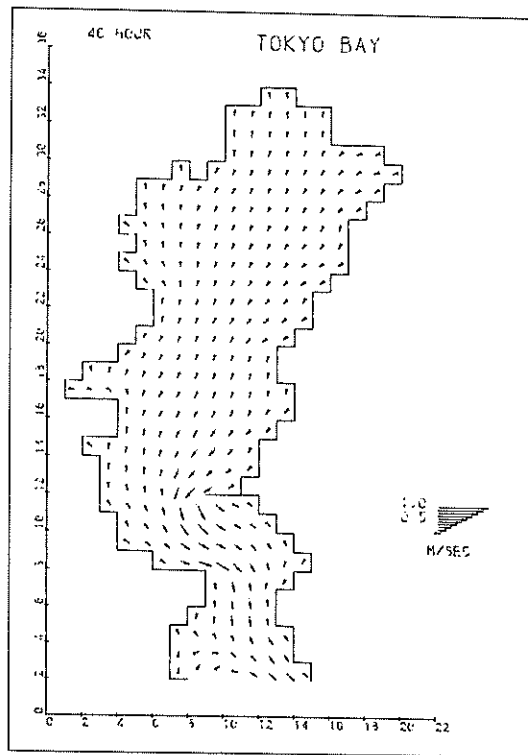
付図-8-2-3 潮流図, ADI-2, 40時間後



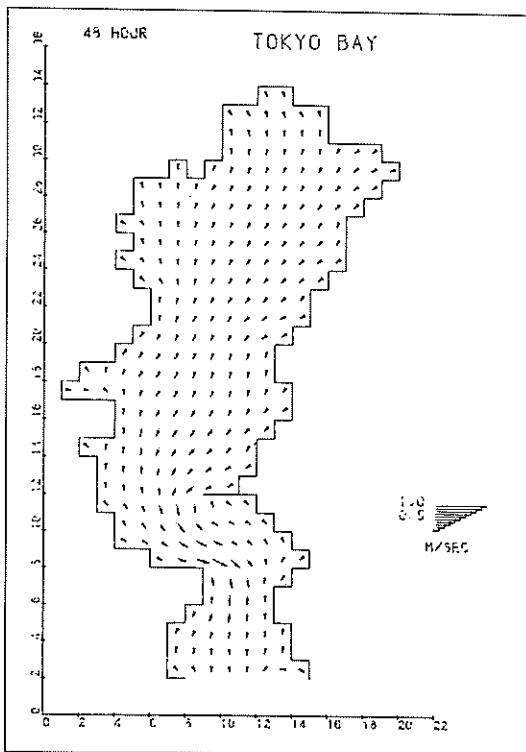
付図-8-2-4 潮流図, ADI-2, 42時間後



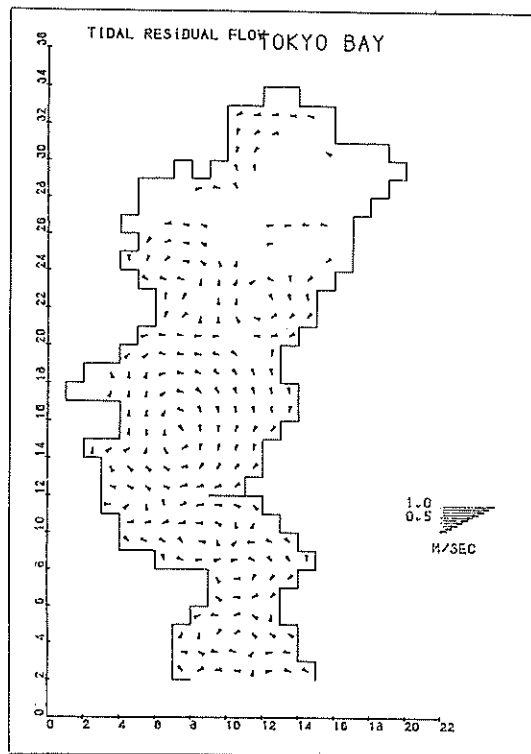
付図-8-2-5 潮流図, ADI-2, 44時間後



付図-8-2-6 潮流図, ADI-2, 46時間後

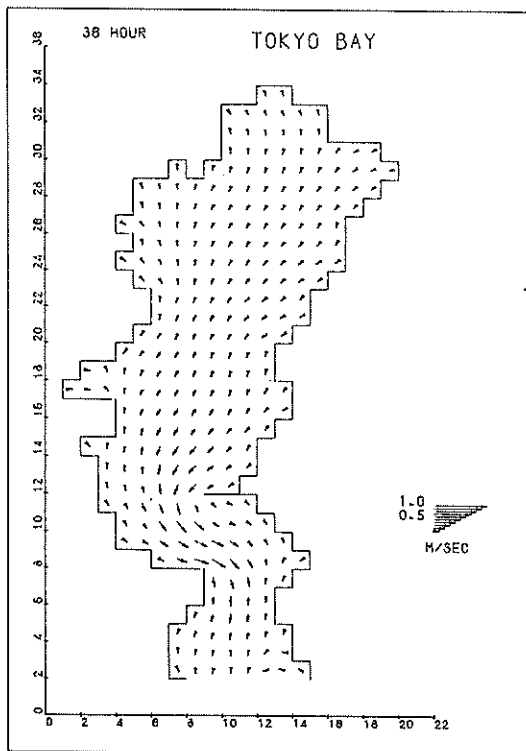


付図-8-2-7 潮流図, ADI-2, 48時間後

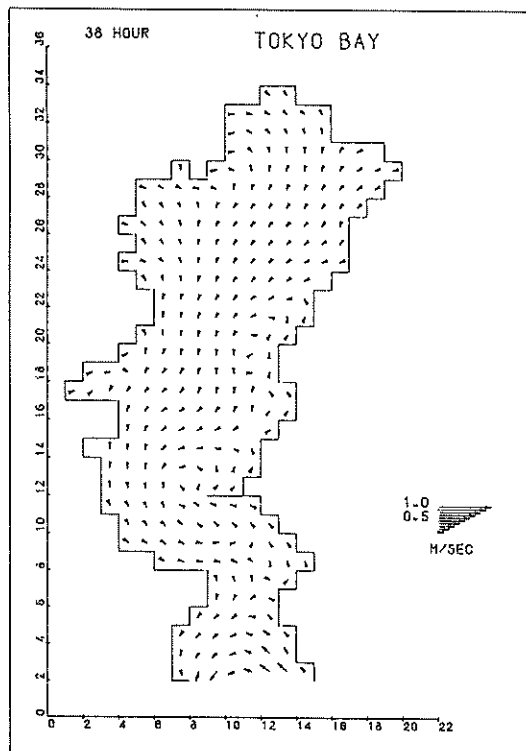


付図-8-2-8 潮汐残差流, ADI-2

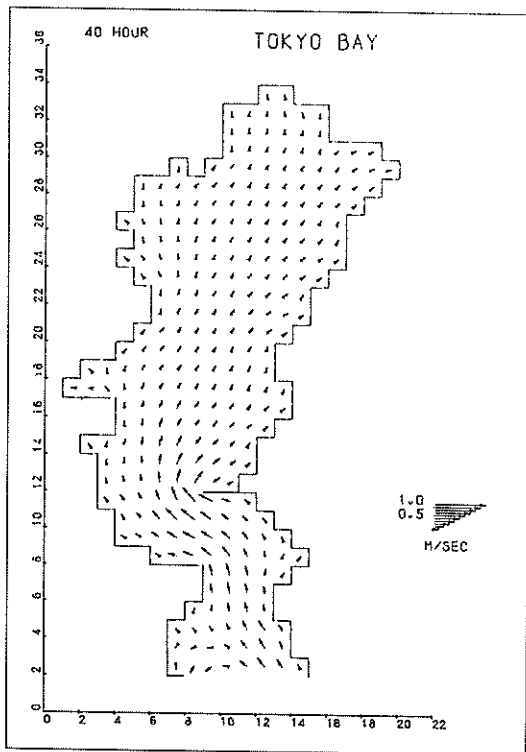
$$\left(\frac{\Delta t}{2} = 40s, E_{xx} = 58m^2/s, n = 0.025\right)$$



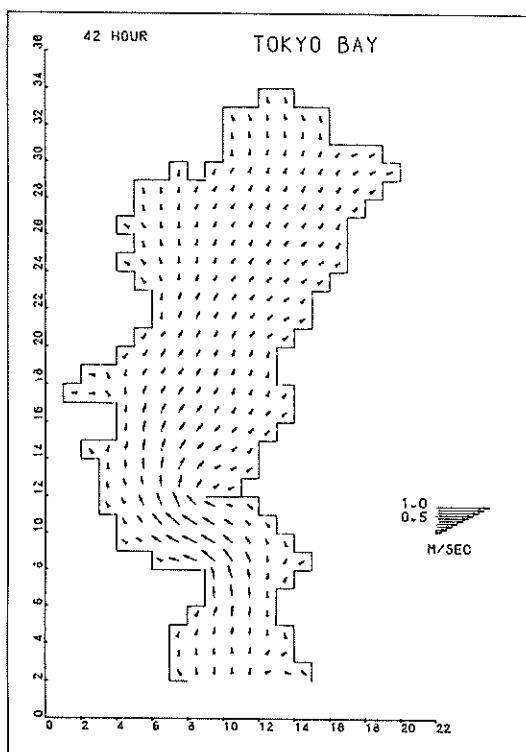
付図-8-3-1 潮流図, ADI-3, 36時間後



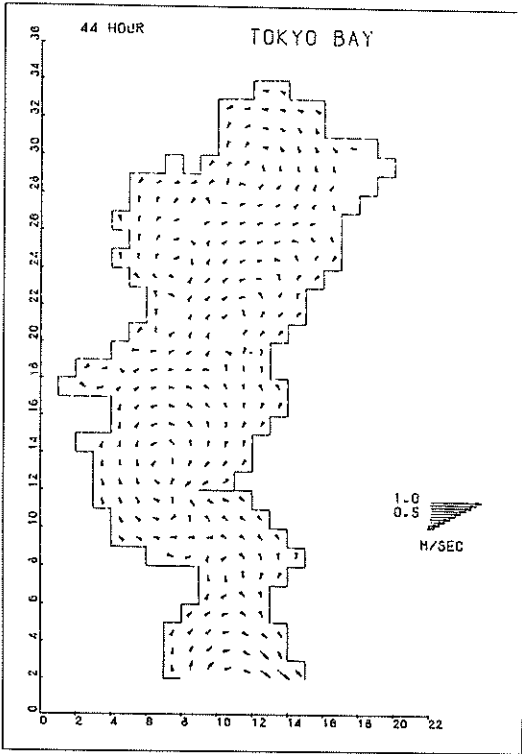
付図-8-3-2 潮流図, ADI-3, 38時間後



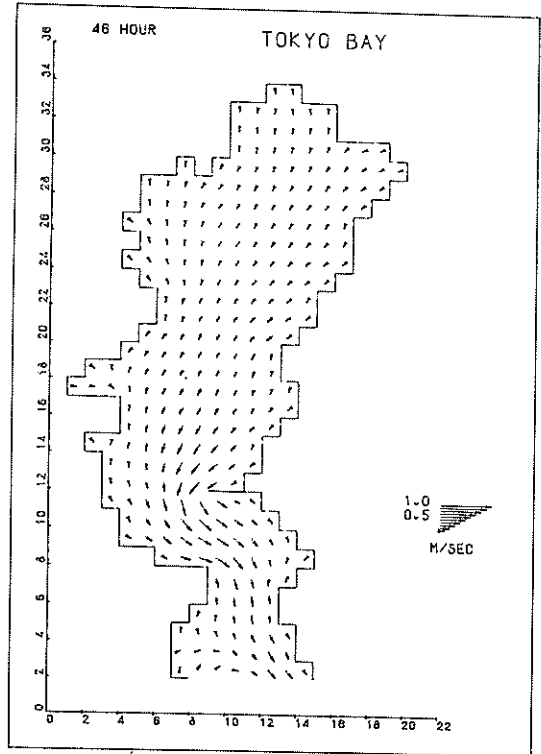
付図-8-3-3 潮流図, ADI-3, 40時間後



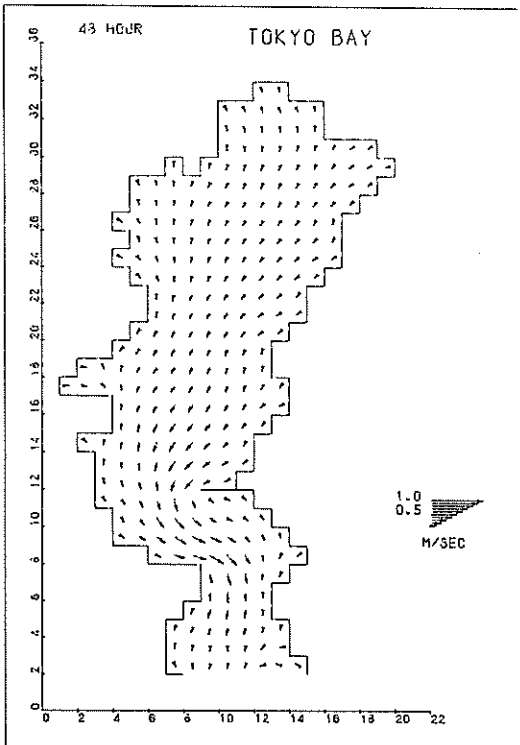
付図-8-3-4 潮流図, ADI-3, 42時間後



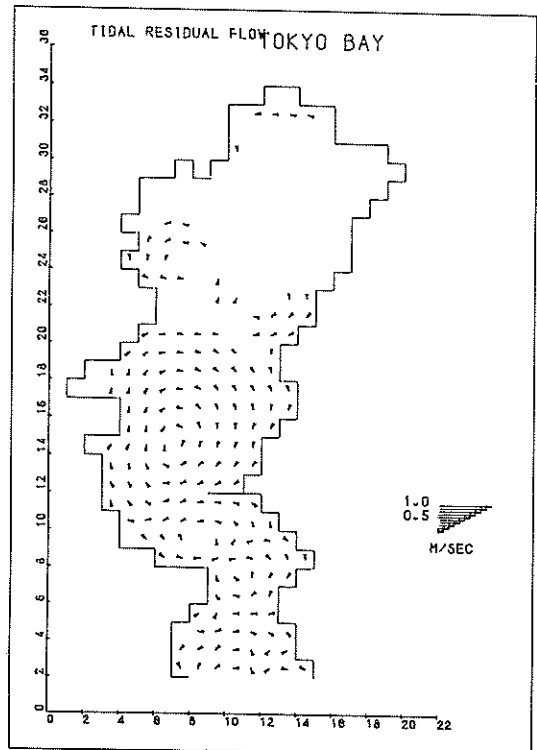
付図-8-3-5 潮流図, ADI-3, 44時間後



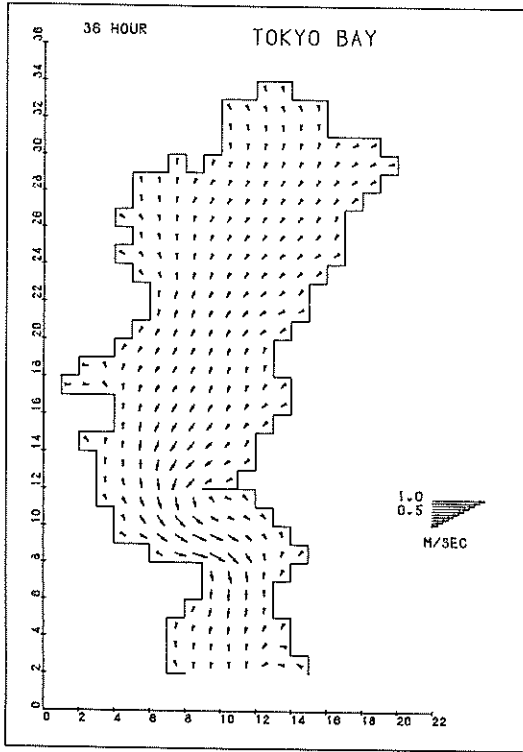
付図-8-3-6 潮流図, ADI-3, 46時間後



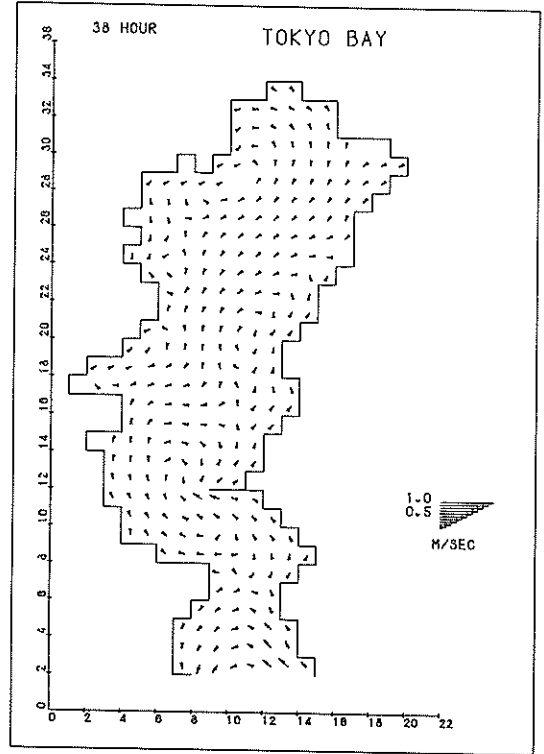
付図-8-3-7 潮流図, ADI-3, 48時間後



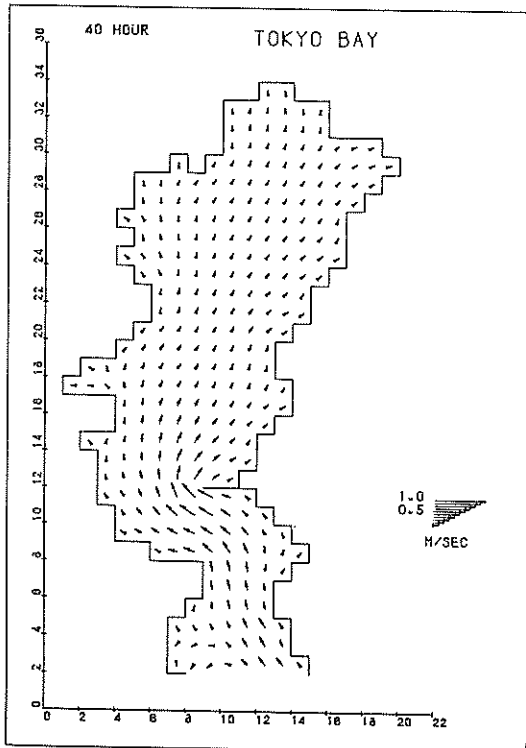
付図-8-3-8 潮汐残差流, ADI-3



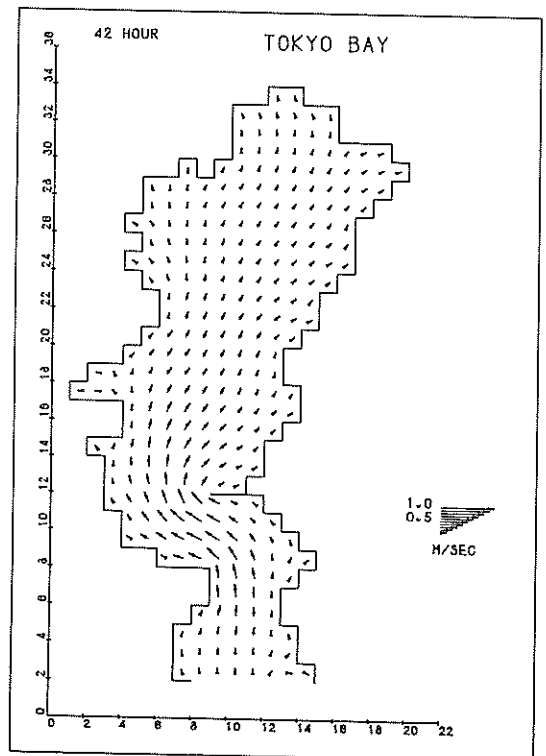
付図-8-4-1 潮流図, ADI-4, 36時間後



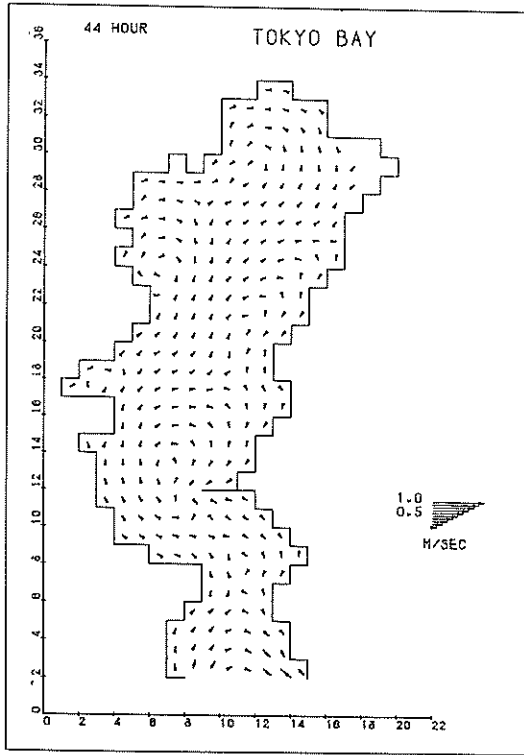
付図-8-4-2 潮流図, ADI-4, 38時間後



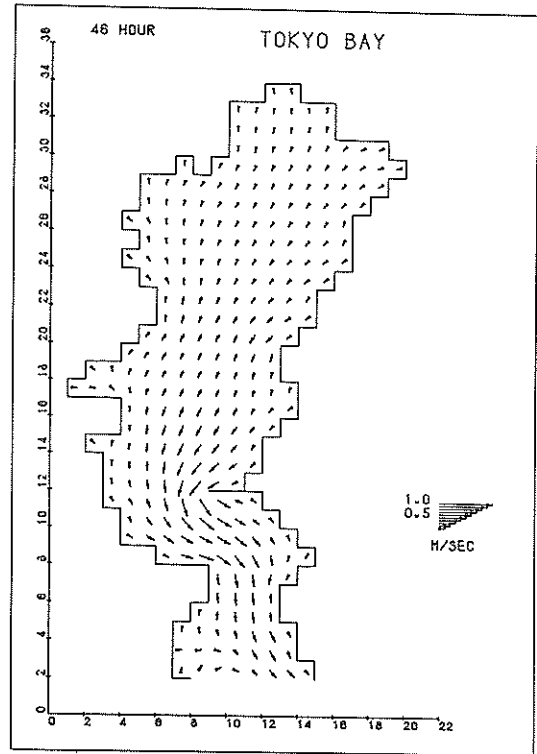
付図-8-4-3 潮流図, ADI-4, 40時間後



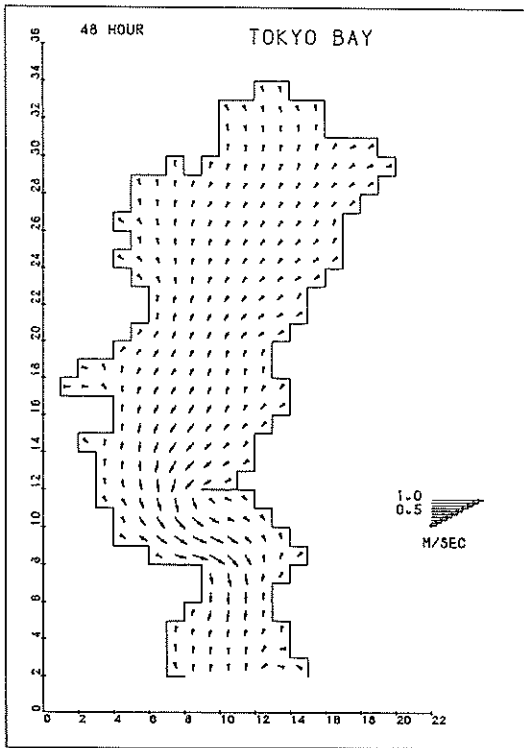
付図-8-4-4 潮流図, ADI-4, 42時間後



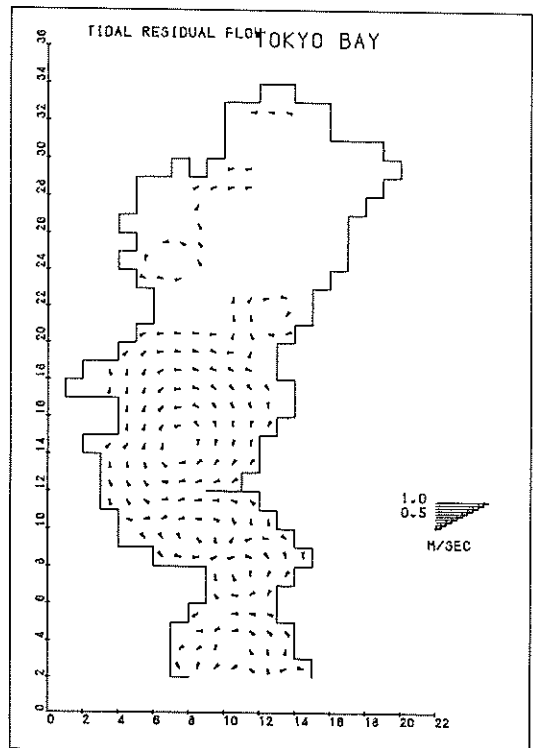
付図-8-4-5 潮流図, ADI-4, 44時間後



付図-8-4-6 潮流図, ADI-4, 46時間後



付図-8-4-7 潮流図, ADI-4, 48時間後



付図-8-4-8 潮汐残差流, ADI-4

港湾技研資料 No. 404

1981・12

編集兼発行人 運輸省港湾技術研究所

発行所 運輸省港湾技術研究所
横須賀市長瀬3丁目1番1号

印刷所 株式会社 東京プリント

Published by the Port and Harbour Research Institute
Nagase, Yokosuka, Japan.