

港湾技研資料

TECHNICAL NOTE OF
THE PORT AND HARBOUR RESEARCH INSTITUTE
MINISTRY OF TRANSPORT, JAPAN

No. 328 Dec. 1979

地盤改良断面の最適設計

山 本 修 司
塩 沢 俊 彦

運輸省港湾技術研究所



目 次

要 旨	3
1. まえがき	3
2. 地盤改良形状最適化への定式化	3
2.1 床掘置換工法	4
2.2 サンドコンパクションパイル工法	4
2.3 深層混合処理工法	6
3. 最適化計算	6
3.1 最適化の内容	6
3.2 SUMTの適用	7
3.3 制約条件なしの最適化計算	8
3.4 円形すべり安全率の関数近似	9
3.5 計算手順	10
4. 数値計算例と考察	10
5. あとがき	16
参 考 文 献	16
付 録	17

Optimum Design of Sectional Form in Foundation Improvement

Shuji YAMAMOTO*

Toshihiko SHIOZAWA**

Synopsis

In the case of construction of port facilities on the soft ground, some foundation improvement is needed and the improvement cost accounts for fairly great part of the total construction cost. We have ever decided the economic sectional form from experiences or trials, but its design work is fairly intricate even for skilled engineers. Such being the case, we have developed a computer program for the purpose of saving time and labor.

In this paper, SUMT (Sequential Unconstrained Minimization Technique) which is one of the non-L.P optimizing techniques is applied to decision on the sectional form. In formularization we add some modifications to SUMT and the safety factor calculated on circular failure surface is approximated with Spline Function to reduce calculating time.

*Member of Automatic Design Laboratory, Design Standard Division
**Ex-Chief of Automatic Design Laboratory, Design Standard Division

地盤改良断面の最適設計

山本修司*
塩沢俊彦**

要 旨

軟弱地盤上に港湾施設を設置する場合、何らかの地盤改良が必要となる。その地盤改良に要する費用は全工費のかかなりの部分を占めるので、所定の安定条件を満たす範囲で、なるべく工費の安い断面が求められる。通常、改良断面を決定する作業は断面を種々変化させて、円形すべり計算を実行するものであるが、熟練した設計者でもかなりの労力を要する。本研究では、それらの作業の省力化と設計の最適化をめざして、非線形計画法のひとつであるSUMT (Sequential Unconstrained Minimization Technique) を用い、「所定の安定条件を満たし工費の最小となる断面」を求める手法を開発した。定式化においては、従来のSUMTに若干修正を加え、円形すべりの安全率を関数近似する事により計算時間を短縮した。本報告は、それらの手法を実際問題に適用した場合の数値計算例について考察し、手法の有効性、問題点について述べたものである。

1. まえがき

港湾構造物を軟弱地盤上に構築する場合、何らかの地盤改良が必要となる。その改良断面を決定する大きな要因は地盤の支持力と円形すべりに対する安定性である。熟練した設計者ならば、もっとも危険な円弧が地層のどの部分を通過するか、また、その場合、どの程度の地盤改良を行えば所定の安全率を満足するか見当がつくであろう。しかし一般的には、その作業は煩雑なものとなる。また、全工費のなかで、地盤改良の費用はかなりの部分を占めるので、その断面形状は極力安価なものが求められる。一般には安全率ぎりぎりの断面が最も安くなると考えられるので、設計作業ではある断面を仮定し、その断面を通過する円弧をグラフィックディスプレイで見ながら、断面を修正していき最終的な断面を決定している。当所の円形すべりプログラムは年間一万件近いジョブを処理しており、その内容の大半は上述の作業であろうと思われる。

また、上記作業は、与えられた制約条件(安全率)のもとで最小工費の断面を決定しようとする設計の最適化そのものである。制約条件、工費等が定式化されれば、線形計画法、非線形計画法のような数学的手法を用いて最小工費の断面を求めることが可能であり、上述の設計作業は計算機に任ず事ができる。ここでは、より経済的な改良断面を求めること、および設計における省力化を期すことから、地盤改良における最適断面を決定するプ

ログラムを開発するものである。

対象とする地盤改良工法としては、床掘置換工法、サンドコンパクションパイル工法、深層混合処理工法である。床掘置換工法を除いては、その設計法が完全に確立しているとは言い難いが今後需要の増大が期待されるので、二、三の設計例を検討してプログラムにとりいれることにする。なお、ここでいう工費とは、設計時に検討する概算工費を考へており、施工にもなり種々の工種を考慮したものではない。本報告では、地盤改良面積が最小となる断面を決定することを最適設計と定義する。

2. 地盤改良形状最適化への定式化

ここで取扱う工法は、床掘置換工法、サンドコンパクションパイル工法、深層混合処理工法である。サンドコンパクションパイル工法と深層混合処理工法については、その円形すべり計算に関する設計手法が、確立しているとは言い難いが既に実績もあるので検討対象とした。なお採用している設計法は一部の建設局で試みに行われている方法なので適用にあたっては十分な検討が必要である。上記の各方法について、決定すべき最適断面を規定する変数、および定数を以下に列挙する。(図-2.1～図-2.3参照)

変数 x_1 ; 地盤改良断面下端での法線前方の長さ

* 設計基準部 自動設計研究室

** 前設計基準部 自動設計研究室長

- x_2 ; 地盤改良断面下端での法線後方の長さ
- x_3 ; 地盤改良断面の高さ
- x_4 ; 捨石マウンドがある場合に、マウンドの一部をカウンターウェイトとして利用する場合の長さ。
- x_5, x_6 ; 円形すべり計算での円弧中心座標
- x_7 ; 円形すべり計算での円弧の通過点座標

- 定数
- a ; 床掘り配
 - β ; マウンドこう配
 - S ; 床掘り前面と後面の現地盤高の差
 - f_{min} ; 円形すべりの許容安全率
 - R ; 床掘り断面と埋戻砂の施工レベルの差
 - Q ; 法線前方のマウンド長さのうち一定とする部分の長さ
 - $x_{i,min}, x_{i,max}$; 各変数のとり得る最小値および最大値

上記の変数のうち $x_1 \sim x_4$ については、設計上、定数である場合も考えられるので、それを考慮する。

2.1 床掘り置換工法

前節で述べた最適設計の定義にもとづいて、目的関数制約条件を式(2.1)～式(2.3)に示す。

a) 制約条件

$$x_{i,min} \leq x_i \leq x_{i,max} \quad (i=1 \sim 7) \dots (2.1)$$

$$f(x_i) \geq f_{min} \quad \dots \dots \dots (2.2)$$

ここで f は円形すべりの安全率

b) 目的関数

経済性の評価は床掘り置換に含まれる工費の和とする。ここで考慮している工費としては、床掘り単価 c_1 (円/㎡)、埋戻砂単価 c_2 (円/㎡)、捨石マウンドをカウンターウェイトとして使用する場合の単価 c_3 (円/㎡)である。以上の単価を用いて単位幅あたりの全工費を算出すると次式のようになる。

$$C = c_1 \{ (x_1 + x_2 + a x_3) x_3 + 0.5 (x_1 + x_2 + 2a x_3) S \} + c_2 \{ (x_1 + x_2 + (x_2 - R) a) (x_3 - R) \} + c_3 h x_4 \quad \dots \dots \dots (2.3)$$

なお、カウンターウェイトを考慮しない場合には x_4 を変数に入れないものとする。また制限条件としては、床掘り下面における粘性土の支持力および下部粘性土層の圧密沈下等を考慮しなければならないと考えられるが、上部構造であるマウンド厚等が関係してきて複雑となるので、ここでは考慮していない。

2.2 サンドコンパクションパイル工法

図-2.2に検討対象とする形状を示す。制限条件は式(2.1)、式(2.2)と同じである。目的関数は式(2.4)で表わされる。

$$C = c_4 (x_1 + x_2) x_3 + c_3 h x_4 \quad \dots \dots \dots (2.4)$$

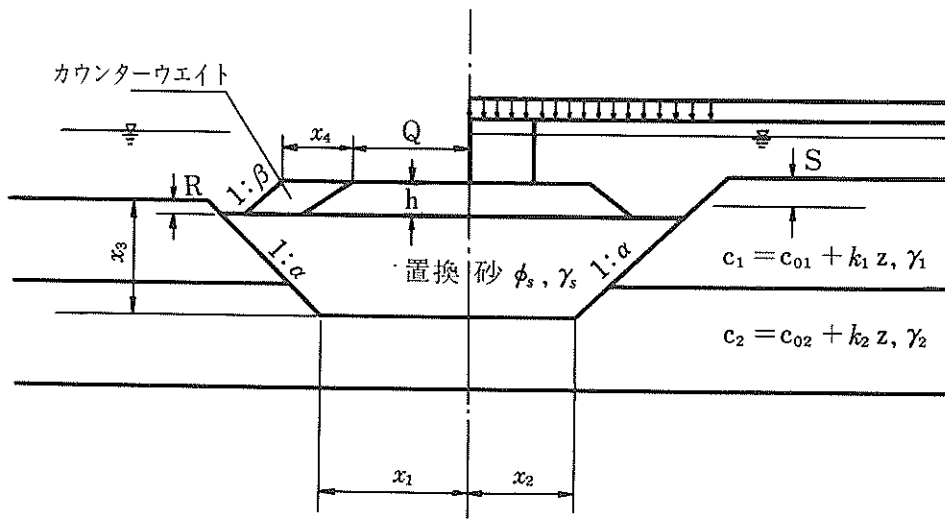


図-2.1 床掘り置換工法

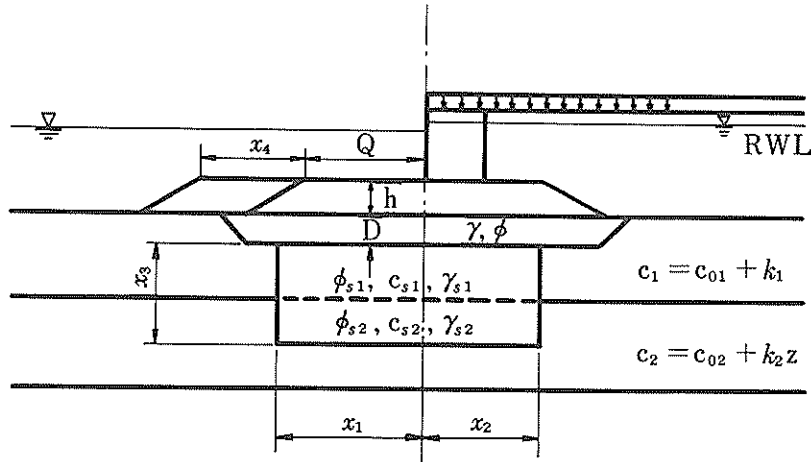


図-2.2 サンドコンパクションパイル工法

ここで c_4 (円/㎡) はサンドコンパクションパイルによる地盤改良単価である。^{注1)}

サンドコンパクションパイル工法は周知のとおり、ゆるい砂質地盤あるいは粘性土地盤中に砂ぐいを圧入するものであり、その地盤は複合地盤となる。複合地盤の支持力やせん断抵抗については、種々検討されているが、^{11), 12), 13)} いまだ、設計法が確立しているとは言い難く設計者がその都度判断しているようである。ここでは上記の参考文献を参照して、地盤改良断面内はせん断抵抗が一様な地盤と考えると以下に示すような簡便法を使用する。

a) 現地盤がゆるい砂層の場合

ゆるい砂層中に砂ぐいを打設して締め固めた地盤のせん断強度を算定する手法として確立したものは現在のところ見あたらないようで、ここでは砂ぐいとくの間地盤の面積比に比例した内部摩擦角を有する一様地盤と考え、その内部摩擦角を次式で算定することにする。

$$\phi_{s,i} = \tan^{-1}(a_s \tan \phi_s + (1-a_s) \tan \phi_i) \dots (2.5)$$

ここで ϕ_i はくの間地盤の内部摩擦角

ϕ_s は砂ぐいの内部摩擦角

a_s は置換率

b) 現地盤が粘性土の場合

粘性土の粘着力を無視して、応力分担比を1とし砂ぐいの内部摩擦角のみでせん断抵抗を考える場合には次式

による内部摩擦角を用いる。

$$\phi_{s,i} = \tan^{-1}(a_s \tan \phi_s) \dots (2.6)$$

また現地盤の粘性土の粘着力を考える場合には、次式でせん断抵抗を考える。ただし、この方式では土被り圧に対しても応力分担を考慮することになるが、通常は上載荷重にのみ応力分担比をかけているようである。

$$\left. \begin{aligned} \tau &= C_{s,i} + \sigma \tan \phi_{s,i} \\ \phi_{s,i} &= \tan^{-1}(\mu_s a_s \tan \phi_s) \\ c_{s,i} &= (1-a_s)(c_0 + kz) \\ \mu_s &= \frac{n}{1+a_s(n-1)} \end{aligned} \right\} \dots (2.7)$$

ここで、 n は応力分担比であり、通常2~4程度の値が採用されている。

このような地盤上に荷重がある場合は、砂ぐいと粘性土地盤とで応力の分担が異なるし、それらから伝達される応力の分散も異なり、すべり面上では一定とならない。式(2.7)では一応、応力の分担は考慮してあるものの、通常の円形すべりプログラムでは、荷重の分散を考慮していない。また未改良部分および改良範囲外の粘性土のかく乱と回復など未解決の問題もあるのでプログラムの使用に際しては、十分な注意を要する。早急に複合地盤

注1) ここていう改良単価は、原地盤1㎡あたりの単価であり、置換率によって大幅に変るが、ここでは単純化のため一定とした。プログラムの使用に際しては、適切な置換率と単価を想定するか、または置換率とそれに対応する単価の数種類の組合せについて計算し最小工費の断面を求める必要がある。

に対する円形すべり計算手法の開発が望まれるところであるが、ここでは、これ以上言及しない事にする。なお複合地盤内の単位体積重量は次式で計算するものとする。

$$\gamma_{s,i} = \gamma_s a_s + (1 - a_s) \gamma_i \quad \dots\dots\dots (2.8)$$

γ_s, γ_i は砂ぐいおよび現地盤の単位体積重量である。

2.3 深層混合処理工法

制約条件は、式(2.1)、(2.2)と同じであるが、目的関数は次のように表わされる。

タの設定には十分な注意を要する。

以上で三工法に関する最適設計への定式化ができた。制約条件式(2.1)は線形であるが、円形すべりの安全率 f は断面形状を表わす変数 $x_1 \sim x_4$ および円形すべりに関する変数 $x_5 \sim x_7$ の複雑な関数であり、一般的な数式で表現できないので一応非線形として扱う。目的関数はいずれの工法についても非線形な関数となっているので本最適設計は非線形計画法の問題となる。

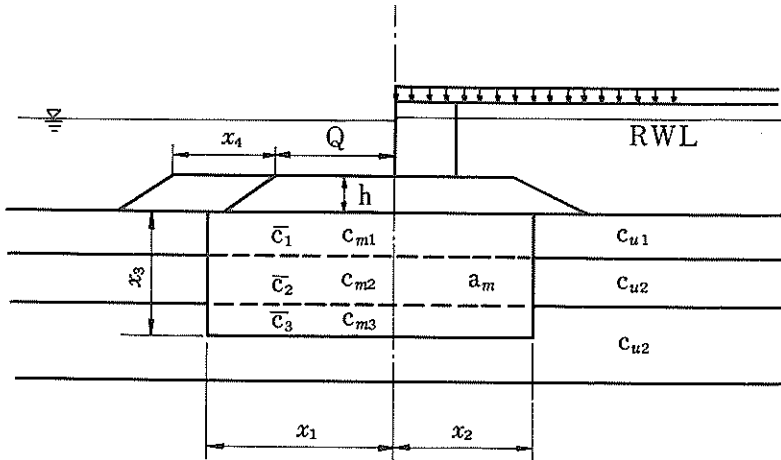


図-2.3 深層混合処理工法

$$C = c_5 (x_1 + x_2) x_3 + c_3 h x_4 \quad (\text{円/m}) \quad \dots\dots\dots (2.8)$$

c_5 (円/m³) は深層混合処理工法を採用した場合の単価である。^{注1)}

本工法の場合もサンドコンパクション工法の場合と同様に複合地盤となるが、一応次のような強度を有する粘性土地盤と考えることにする。

$$\bar{c}_i = a_m c_{mi} + (1 - a_m) c_{ui} \quad \dots\dots\dots (2.10)$$

ここに

- \bar{c}_i ; 複合地盤の平均粘着強度 (tf/m²)
- c_{mi} ; 第 i 層の混合処理部分の改良強度 (tf/m²)
- c_{ui} ; 第 i 層の混合処理土の破壊ひずみに対応する非改良土のせん断抵抗 (tf/m²)
- a_m 混合処理部分の全体に対する面積比

ただし、深層混合処理地盤の安定については円形すべり計算のみでは不十分と考えられており、殊に柱状改良の場合には(2.10)式で与えられる粘着強度が実態を表わしていないと考えられる実験結果もあるので入力デー

3. 最適化計算

3.1 最適化の内容

前節で定式化した制約条件および目的関数と以下に述べる最適化計算の関係を明らかにするために、本問題の意味を明確にしておく。式(2.1)で表わされる制約条件をまとめて、 $g_j(X) \leq 0$ とし、各工法の目的関数を $C(X)$ とすると本最適設計は次のようにあらわされる。

$$g_j(X) \leq 0 \quad \dots\dots\dots (3.1.a)$$

$$f_{\min} - f(X) \leq 0 \quad \dots\dots\dots (3.1.b)$$

$$C(X) \rightarrow \min \quad \dots\dots\dots (3.1.c)$$

上式は、各変数 $x_1 \sim x_7$ が指定された領域内で変化するとき、最小の円形すべりの安全率を与える円弧に対して、工費が最小となる断面を決定することを意味する。工費最小の断面形状を決定する最適化計算には次項で述べるSUMTの手法を用いるが、最小の安全率を与える円弧を求めるには計算手順の中でそれを考慮することにする。

一般に、円形すべりの安全率は複数の極値を持つ場合が少なくないので、 x_5, x_6, x_7 を完全な連続量として扱った場合、初期値の与え方によっては、非線形計画法の性質上、最小値を見落として、他の極値を求める恐れがある。そこで円弧の中心は図-3.1に示すような格子上の点とし、そのうち最小の安全率を与える格子点に対して断面の最適化を行う。また最適化計算にもなって、最小の安全率を与える格子点が変わるので、順次、その座標が格子の中心になるよう格子を移動する。

左辺の第3項は制約条件式中に等式条件がある場合に付加される項である。本最適設計の場合、最小工費の断面形状は、一般に円形すべりの制限条件で決まる場合が多いので式(3.2)の等号条件として式(3.1)の安全率に関する制限条件を代入すれば良いと思われるが、変数 x_i に関する制約条件によっては、必ずしも期待する最小の安全率で、最小工費の断面が求まるとは限らない。たとえば、岸壁本体とエプロンの不同沈下を防止するため x_2 の最小値 x_{2min} を大きくとったりした場合には、

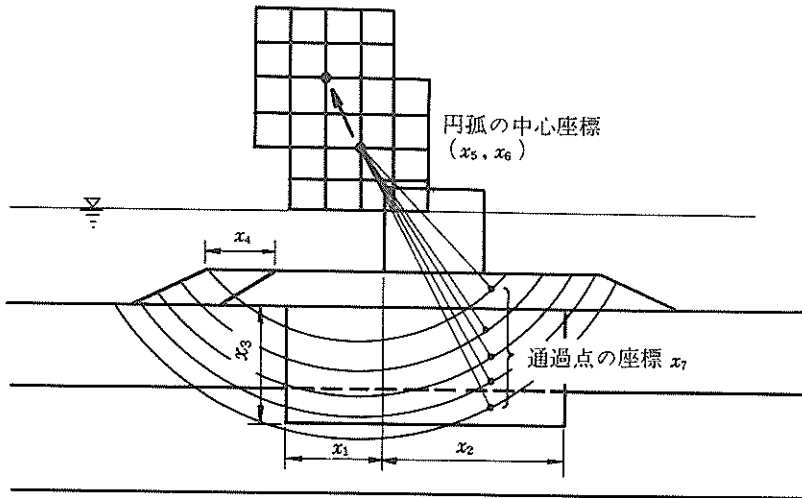


図-3.1 円形すべりの安全率に関する変数の取扱い

円弧の通過点を表わす変数 x_7 も同様の理由により、与えられた点列とする。このように x_5, x_6, x_7 を離散値として扱われる方が、かえて大局的な極値を求める可能性が大きいと考えられる。4数値計算例において、そのような例題を示す。

3.2 SUMTの適用

式(3.1)は制約条件付きの最適化問題であり、この種の問題を解く方法のひとつとして、SUMT (Sequential Unconstrained Minimization Technique)がある。本手法は最小化しようとする目的関数に、制約条件式で構成される罰金項を付加して、制約条件付き最適化問題を制約条件のない最適化問題に変換して解く手法である。一般的には次式で示されるような新しい関数 (Interior Penalty Function) の最小化を考える。

$$P(X, \tau_k) = C(X) - \tau_k \sum_{j=1}^m \frac{1}{g_j(X)} + \frac{1}{\sqrt{\tau_k}} \sum_{j=1}^j h_j^2(X) \dots \dots \dots (3.2)$$

当初、目標した安全率よりも大きい安全率で断面が求まることがあるであろう。

また、式(3.2)の第3項をとりのぞいて、円形すべりの安全率に関する制約条件 $f_{min} - f(X) \leq 0$ を他の制約条件とともに第2項に加えた場合には、工費最小の断面を求める最適化計算の過程で、各項の力関係によっては工費を最小化する行為と円形すべりの安全率の最小値を求める行為とが相反することがありえる。つまり工費を最小化する過程で円形すべりの中心を表わす変数 x_5, x_6 が必ずしも最小の円形すべりの安全率を表わす点の方向に移動せず、かえって大きい方に移動する事が考えられる。求めようとする断面形状は円形すべりの安全率が最小となる円弧に対して求めなくてはならないので、式(3.1.b)は制約条件式というよりも、むしろ目的関数に近いものと考えられる。以上の理由により、ここでは式(3.3)に示す罰金関数を試用することにする。

$$P(X, r_k) = C(X) - r_k \left(\sum_{j=1}^m \frac{1}{g_j(X)} + \mu(f_{\min} - f_k) \right) \dots \dots \dots (3.3)$$

ここで、 r_k ; 摂動パラメータで零に収束する正数数列。

μ ; 制約条件式間に重みをつけるパラメータであり、本問題の場合、一般的には円形すべりの安全率によって最小工費の断面が求まるので、第3項に重みをつけるものとする。

f_k ; 実際に計算した円形すべり安全率。

$f_{\min k}$ は r_k の各段階での仮の許容安全率で次式のような正の数列とする。

$$f_{\min k} = \frac{1}{2} (f_{k-1} + f_{\min})$$

上式は $r_k \rightarrow 0$ にするに伴って $f_{\min k} \rightarrow f_{\min}$ となるが、 $f_k > f_{\min}$ の条件を犯さないように定めたものである。式(3.3)の最小値を求める計算手順は次のとおりである。

- (1) 初期値 X_0 , 摂動パラメータ r_1 , $f_{\min 1}$ を与える。
このとき X_0 は制約条件を満足している必要がある。
- (2) $P(X, r_k)$ の X に関する最小値を、 X_0 を出発値として求める。そのときの X を $X(r_k)$, $P(X, r_k)$ を $P(r_k)$ とする。
- (3) $|(P(r_{k-1}) - P(r_k)) / P(r_k)| < \epsilon_s$

または $|f_k - f_{\min}| < \epsilon_s$

ならば計算を終了する。そうでなければ(4)へ行く。

- (4) r_{k-1}, r_k に対して得られた最小値を $X_M(r_{k-1})$, $X_M(r_k)$ とし、次の段階の初期値 $X_0(r_{k+1})$ を次式により求める。

$$X_0(r_{k+1}) = (\gamma^{1/2} + 1) X_M(r_k) - \gamma^{1/2} X_M(r_{k-1})$$

ここで $\gamma = r_{k-1} / r_k$ である。

$$f_{\min k+1} = \frac{1}{2} (f_k + f_{\min})$$

$k = k + 1$ として(2)へ行く。

手順(2)での最小値の求め方を次項で述べる。手順(4)は各段階での出発値を、前段階でわかっている $X_M(r_{k-1})$, $X_M(r_k)$ を用いて外挿して求めており、収束計算の改良をはかっている。

3.3 制約条件なしの最適化計算

式(3.3)は既に制約条件なしの関数になっているので、前項のSUMTの計算手順(2)での最適化計算には以下に述べるPowellのDirect-Search法やDFP法等が使用できる。それらの方法の理論的内容については文献(6), (8)に詳しく述べられているので、ここではその計算手順を簡単に説明する。

a) PowellのDirect-Search法

本手法は1次の導関数値を使わずに関数値のみを使い、直接に共役方向を求めて最小値を探索する方法である。計算手順は以下のとおりである。

- (1) $i = 1, 2, \dots, n$ について $P(X_{k-1} + \lambda S_k)$ を最小にする λ_k を求める。 $X_k = X_{k-1} + \lambda_k S_k$
- (2) $\delta = \max_{1 \leq i \leq n} \{P(X_{i-1}) - P(X_i)\}$ である整数 m を求める。 $f_1 = P(X_0), f_2 = P(X_n)$,

$$f_3 = P(2X_n - X_0)$$

- (3) $f_3 > f_1$ または $(f_1 - 2f_2 + f_3)(f_1 - f_2 - \delta)^2 \geq \frac{1}{2} \delta (f_1 - f_2)^2$

ならば $X_0 = X_n$,

いずれも満足しなければ $S = X_n - X_0$ を計算し、

$P(X_n + \lambda S)$ を最小にする λ を求め、 $X_0 = X_n + \lambda S$ として新しい探索方向の組みを $(S_1, S_2, \dots, S_{m-1}, S_{m+1}, S_n, S)$ とする。

- (4) (1)へもどる。

b) DFP法

本手法は点 X_k について求められた傾斜ベクトル G_k と各探索ごとに更新される正定値対象行列 H_k とでつくつくられる $D_k = -H_k \cdot G_k$ の方向に最小点を求めて行く方法である。計算手順は以下のとおりである。

- (1) $H_0 = I, X_0, G_0 = \nabla P(X_0), k = 0$
- (2) $G_k = \nabla P(X_k)$
- (3) $D_k = -H_k \cdot G_k$
- (4) $P(X_k + \lambda D_k)$ を最小にする λ_k を求める。
- (5) $X_{k+1} = X_k + \lambda D_k$
- (6) $Y_k = G_{k+1} - G_k$
- (7) $H_{k+1} = H_k + A_k + B_k$

$$A_k = \lambda_k \frac{D_k \cdot D_k^t}{D_k Y_k} \quad B_k = -\frac{H_k \cdot Y_k \cdot Y_k^t \cdot H_k}{Y_k^t H_k Y_k}$$

(8) $k=k+1$, (2)へ行く。

上記の計算手順のうちDirect-Search法の(1), DFP法の(4)において変数 λ に関する直線上の最小値を求めなければならない。最小値の求め方としては黄金分割による探索, Fibonacci探索, 最小値近傍の2次式近似による方法等が考えられるが, いずれにしても式(3.3)の関数値を求めなければならない。 $C(\mathbf{X}), g_j(\mathbf{X})$ は関数としてあらわされているが, f については円形すべり計算プログラムを利用して, その値を求めなければならない。しかし直線上の最小値を求めるには, いずれの方法を用いるにしても収束計算となり, そのたびに円形すべりの計算を行ったのでは非常に膨大な計算時間を必要とすることになる。そこで, 円形すべりの安全率 f を変数 $x_1 \sim x_4$ の関数として表わし, 極力, 円形すべり計算を省略できるようにする。

3.4 円形すべり安全率の関数近似

3.1において純粋な連続量としての変数を, 地盤改良断面の形状を表わす $x_1 \sim x_4$ としたので, 円形すべりの安全率を $x_1 \sim x_4$ の関数で表わすことにする。最適設計の分野では, 制約条件が関数として表わされない場合の例として骨組構造物の最適設計があげられる。最適形状の部材断面を求めようとする各段階で剛性マトリックスを作成し, これを解く演算が必要となり, その演算量は膨大なものとなる。文献3)では目的関数, 制約条件式の両関数を2次式展開して近似する方法を用い, その有効性を示してある。円形すべりの安全率は円弧の中心と通過

点が既知ならば, 円弧と改良地盤の位置関係で決まる。ある変数 x_i が円弧の半径の外側で変化するならば, その変数について, 安全率は一定であり, 変数 x_i が円弧を切るように変化する場合に安全率は複雑に変化する。その変化の状況が明らかでないうに, 多変数におよぶので, 次のような関数で円形すべりの安全率を表現することにする。SUMTの初期で仮定した断面またはSUMTの各段階で得られている断面の安全率 $f(X_0)$ を基準にして, それぞれの変数を単独に変化させた場合の安全率の増加分(減少分)を計算する。それを関数近似した式を $\Delta f(x_i)$ とすると, すべての変数の変化に対応する安全率の値は $\Delta f(x_i)$ の線形和として式(3.4)で与えられるものとする。

$$f(x_i) = \sum \Delta f(x_i) + f(X_0) \dots\dots\dots (3.4)$$

$\Delta f(x_i)$ を関数表示する場合, その関数形としては種々のものが考えられるが, 1次~3次式の多項式を使用して, 実際に最適化計算を行った結果, 関数値を計算する点の取り方によっては計算がうまく進まないケースがあったので, ここではSpline関数を用いて円形すべりの安全率を表現した。

$\Delta f(x_i)$ の関数を定めるには, X_0 周辺の自分自身を含めた5点の関数値(安全率)を計算し, それらの点を通るSpline関数を求める。(たとえば, x_2 について $\Delta f(x_2)$ を求める場合には, x_1, x_3, x_4 を固定し, x_2 のまわりの自分自身を含めた5点 $x_2 - 2 \cdot \Delta x_2, x_2 - \Delta x_2, x_2, x_2 + \Delta x_2, x_2 + 2 \cdot \Delta x_2$ について円形すべりの計算

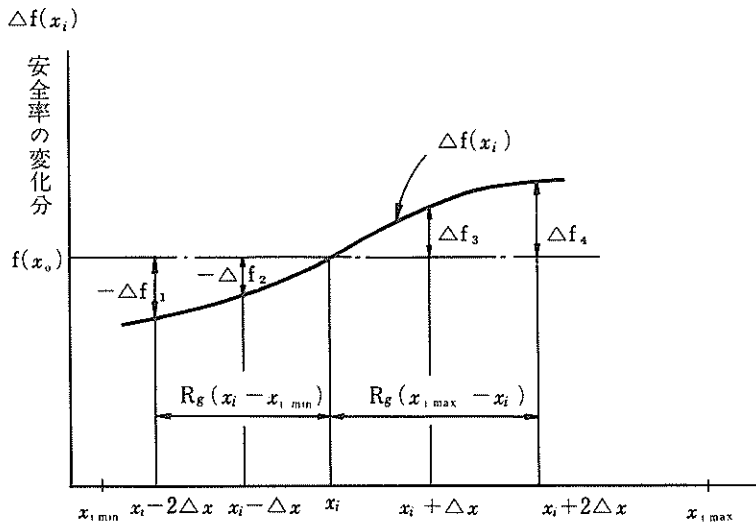


図-3.2 関数近似の範囲

を実施することになる)。したがって、SUMTの各段で実施する円形すべり計算は、 $4n+1$ (n は変数の数) 回でよいことになる。Spline関数の作成法については付録1で述べることにする。

上記の5点の決定法は、関数近似の精度を左右するものであり、 Δx を大きくすると、マクロ的に安全率を近似することができるが、現在求まっている断面の近傍の精度が悪くなる。逆に Δx を小さくすると精度は良くなるが、その適用範囲が狭くなる。よって本プログラムでは、図-3.2に示すように、近似の範囲を示すパラメータ R_p ($0 < R_p < 1$)を適切に定める事によって対応するものとする。数値計算例の結果、 R_p は0.5~0.7程度が適当のようである。

3.5 計算手順

以上の計算法を図-3.3に示す。各部の計算の内容は以下に示すとおりである。

- ① 制約式、円形すべりデータ等の読み込み。
- ② SUMTの各 r_k の段階の最初に、現在までにもとまっている断面の円形すべりに対する検討を行う。
- ③ 安全率が十分に所定の安全率に近いか、もしくは変数の変化が十分に小さくなれば最適断面がもったものとする。
- ④ 安全率に関する制約条件を満足しているかどうかを判定する。
- ⑤⑤ 改善の余地があれば、さらに最適断面を求め、安全率を割っていれば、安全率を満足している断面までもとす。
- ⑥⑥ SUMTの摂動パラメータを修正する。
- ⑧ 円形すべりの安全率をSpline関数であらわす。
- ⑩⑩ 最適化計算を行う。

4. 数値計算例と考察

3.で述べた最適化計算手法を2, 3の例題に適用してその数値計算上の問題について考察する。図-4.1に示すような土質条件のところに床掘置換工法を適用するものとする。初期条件として図-4.1に示すような $x_1 = 4.0\text{m}$, $x_2 = 1.0\text{m}$, $x_3 = 2.0\text{m}$ の断面を仮定し、これを最適化していく。他の計算条件は $0 < x_1 < 50$, $5 < x_2 < 30$, $5 < x_3 < 40$, $x_4 = 1.4$ (定数), 円形すべりの許容安全率 $f_{\min} = 1.2$, 円形すべりの安全率に関する収束判定定数 $\epsilon_s = 0.02$, 床掘単価 $1000\text{円}/\text{m}^3$, 置換砂単価 $3000\text{円}/\text{m}^3$, である。なお最適化手法としてはDP

P法を用いた。計算結果を表-4.1に、断面の変化を図-4.2に示す。表-4.1で x_5, x_6 は、水位線と岸壁法線の交点を原点とした場合の円形すべりの中心を表わす。また、 P はPenalty Functionを、COSTは工費を、 f_k は各iterationでの断面形状に対する安全率を表わす。備考欄の S, f は、それぞれ安全率を満たしている場合、満たしていない場合を示す。計算結果を見ると、最終的には通過点4を通る円弧に対して安全率1.220で最適化断面が求まっている。その時の工費は3504千円である。初期に仮定した断面では、通過点1を通り、安全率が1.33であるが、これは他の通過点を通る安全率が1.33以上あることを示す。SUMTの摂動パラメータ r_k を順次小さくして最適化計算を行う場合、通常は、設定した制約条件を犯すことはないのであるが、変数 x_5, x_6, x_7 を離散値として扱っていること、および円形すべりの安全率を関数近似していること等から円形すべりの安全率を満足しない断面を求める場合がある。そのような場合には、 r_k を逆に大きくしてそれまでに得られている断面のなかで最も安全率の小さな断面にもとす。本例題の場合、円弧中心が $(-4, 7)$ 付近で通過点4を通る円弧と円弧中心が $(-4, 20)$ 付近で通過点3を通る円弧の2種類の極値があるようである。通常最適化手法では極値が複数ある場合は、いずれかの極値を求める事になり、必ずしも最小値とは限らない。設計において、たとえ工費が最小の断面を求め得たとしても、安全率が最小となる点を見逃すことは非常に危険なので、本計算プログラムでは円弧中心を表わす変数(x_5, x_6)を連続量とせず、格子上的点とし、そのうち、最小の安全率を与える座標を円弧中心としている。表-4.1中のiteration 2において既に最終結果に近い断面を得ているが、さらに工費の安い断面を求めようとした場合に、iteration 3で最小の安全率を与える円弧の中心点と通過点が大きく変化し、安全率に関する極値が移動するために許容安全率を満足しない場合がある。

次にサンドコンパクションパイル工法を適用した場合の例題を図-4.3に示す。計算に使用した数値は、置換率50%, 応力集中係数3, 砂ぐいの内部摩擦角 30° , サンドコンパクション単価 $7000\text{円}/\text{m}^3$, 円形すべりの許容安全率1.2等である。本例の場合、得られた最終断面と円弧の関係(図-4.4)を見るともう少し x_1 が小さくなり図-4.5に示すような断面が得られるはずであるが、最適化の過程で変数 x_1 がほとんど変化し得ないため収束したと判定した。しかし安全率としては、ほぼ目標とする値に収束していると言えよう。次に深層混合処理工法に適用した例題を示す。計算に使用した数値は改良

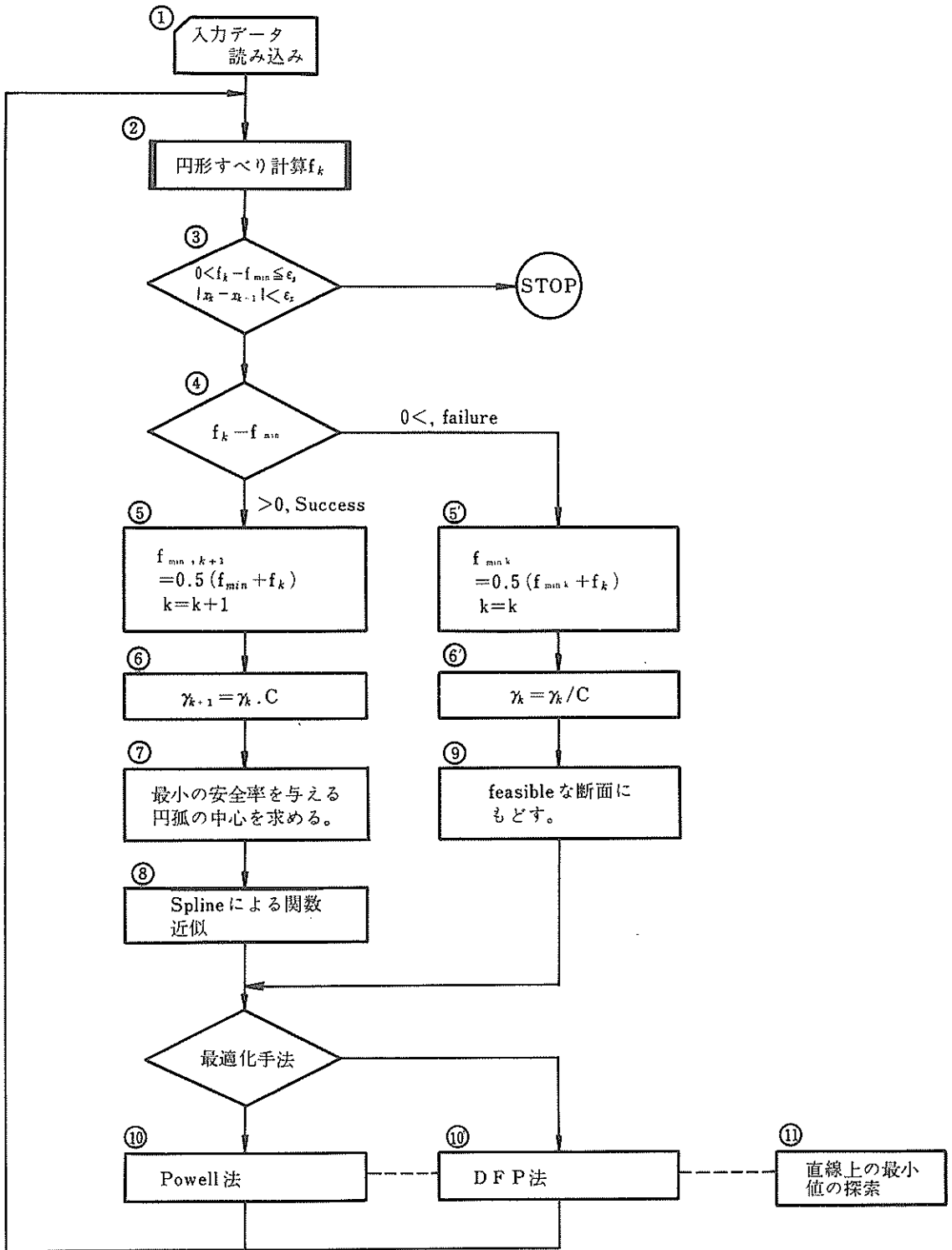


図-3.3 計算フローチャート

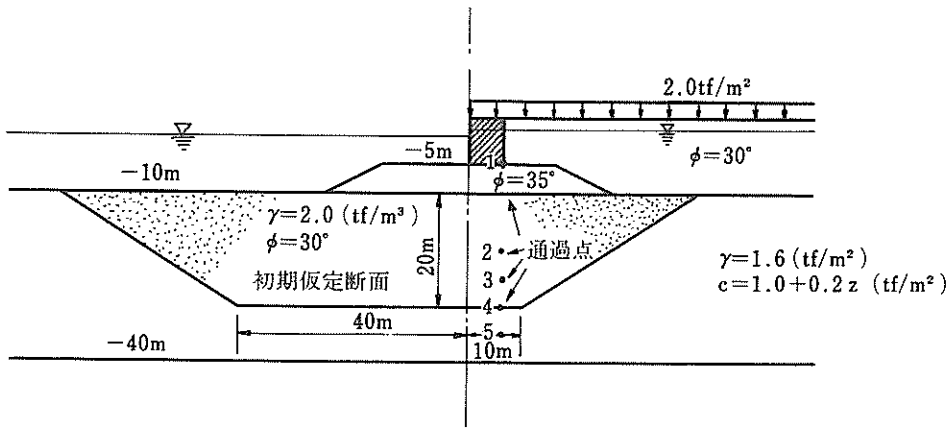


図-4.1 例題-1 (床掘置換工法)

表-4.1 変数および目的関数の変化 (例題-1)

iteration	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5^*	z_6^*	z_7^*	P	$\cos t$	f_s	$f_{\min t}$	τ_t	備考
0	40.0	10.0	20.0	定 数	-2.0	2.2	1	9229.2	6400.0	1.330	1.200		S
1	41.9	11.5	17.0		-4.0	11.2	4	8855.5	5375.5	1.293	1.264	4000	S
2	34.3	11.7	14.6		-4.0	8.19	4	4406.3	3966.5	1.238	1.247	400	S
3	29.1	10.0	12.4		-4.0	14.2	3	2927.7	2871.4	1.054	1.220	40	f
4	29.1	12.1	13.0		-4.0	21.2	3	3583.7	3159.3	1.094	1.228	400	f
5	34.6	10.8	14.7		-4.0	7.2	4	7972.1	3952.5	1.244	1.233	4000	S
6	29.4	12.2	13.3		-3.0	19.2	3	3650.3	3260.6	1.119	1.222	400	f
7	34.3	9.7	14.8		-5.0	7.2	4	8608.3	3931.4	1.254	1.233	4000	S
8	29.1	11.4	13.4		-4.0	21.2	3	3633.9	3256.0	1.114	1.227	400	f
9	34.0	8.3	15.1		-5.0	7.2	4		3909.0	1.271	1.241	4000	S
LAST	28.8	11.0	14.3	-6.0	13.2	4	3855.0	3503.7	1.220	1.235	400	S	

* z_5, z_6 は円弧の中心座標。 z_7 は円弧が通過する点の番号である。

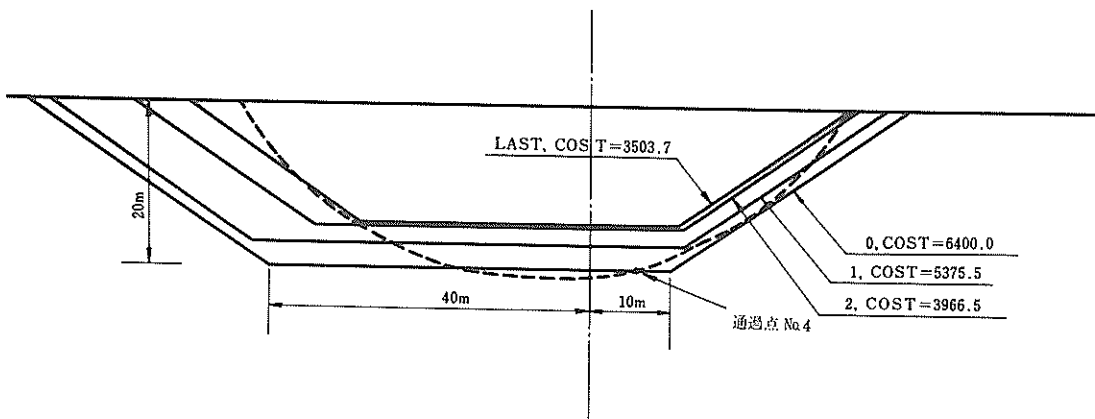


図-4.2 断面の最適化過程 (例題-1)

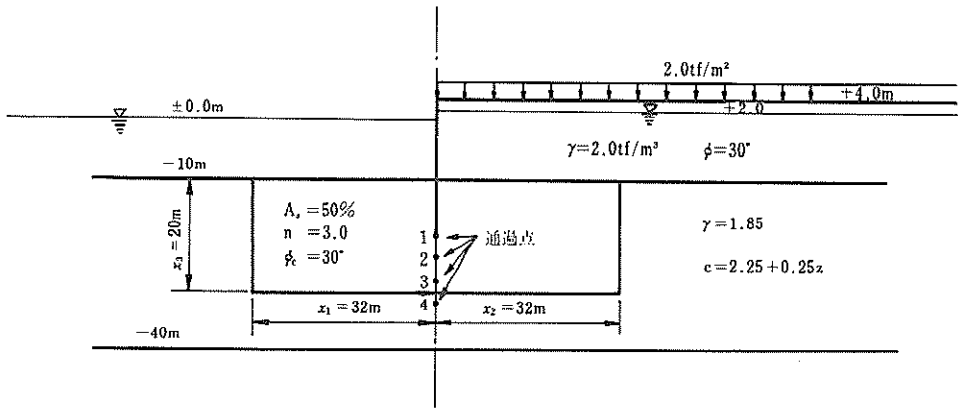


図-4.3 例題-2 (サンドコンパクションパイル工法)

表-4.2 変数および目的関数の変化(例題-2)

iteration	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5^*	z_6^*	z_7^*	P	$\cos i$	f_k	$f_{\min k}$	r_k	$f_k > f_{\min}$
0	32.0	32.0	20.0	定 数	-4.0	2.0	1	9870.2	8960.0	1.466	1.20	/	S
1	26.2	26.4	16.2		-4.0	2.0	1	6946.9	5959.2	1.466	1.333	10000	S
2	21.7	22.4	13.4		4.0	9.0	3	4484.8	4127.2	1.298	1.333	3000	S
3	18.7	19.2	11.8		6.0	8.0	2	3236.4	3113.2	1.152	1.249	300	f
4	18.8	19.3	11.6		6.0	6.0	2	3500.2	3089.7	1.148	1.274	3000	f
5	21.8	22.6	11.9		8.0	12.0	2	4728.4	3690.2	1.187	1.286	10000	f
6	21.8	22.2	13.5		10.0	14.0	2	7201.4	4137.9	1.282	1.292	3333.0	S
7	22.2	22.3	11.8		8.0	10.0	2	4736.5	3676.2	1.185	1.241	1000	f
8	22.2	22.4	13.2		10.0	13.0	2	7195.9	4100.8	1.266	1.262	3333.0	S
9	22.6	22.7	11.6		8.0	10.0	2	4738.9	3691.9	1.183	1.233	10000	f
10	22.8	22.6	12.9		9.0	14.0	2	7167.1	4079.2	1.252	1.249	3333.0	S
11	23.2	22.9	11.6		8.0	10.0	2	4768.6	3733.1	1.182	1.226	10000	f
LAST	23.7	22.8	12.5	9.0	14.0	2	/	4064.4	1.226	1.238	3333.3	S	

* z_5 , z_6 は円弧の中心座標。 z_7 は円弧が通過する点の番号である。

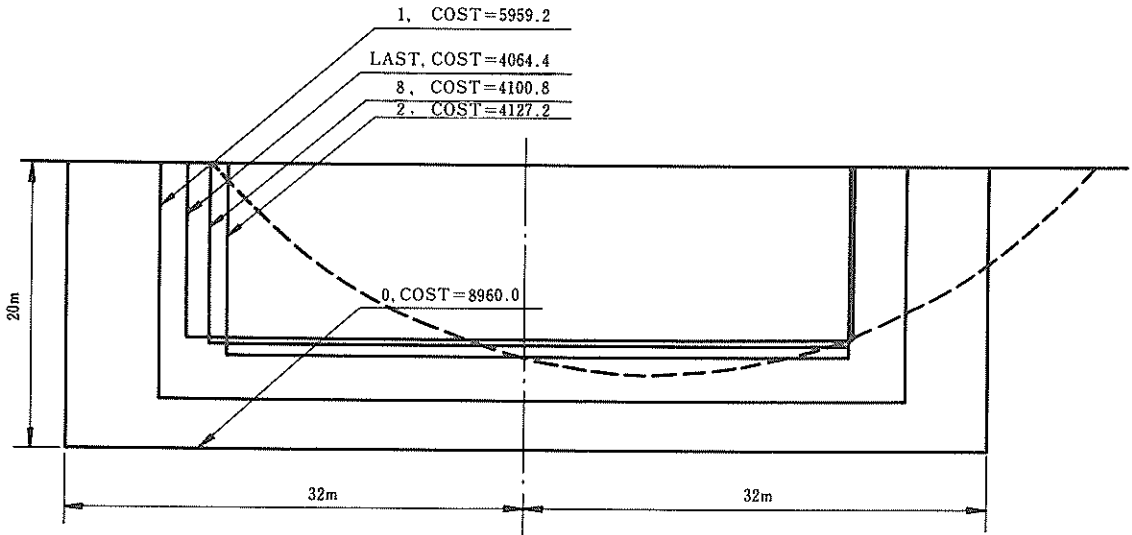
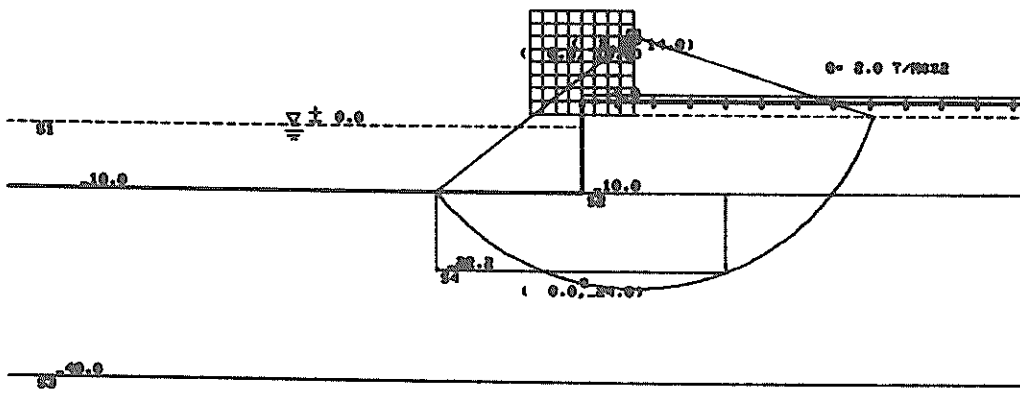


図-4.4 断面の最適化過程(例題-2)



C-1
 MINIMUM F 1 R= 38.8 F= 1.212 MR= 13820.0 MA= 11401.9

図-4.5 試行錯誤で求めた最適断面

率 $A_s = 40\%$ 、混合処理部分の強度を上層で 20 tf/m^2 、下層で 30 tf/m^2 、混合処理工法単価 8000 円/m^3 、円形すべりの許容安全率 1.2 等である。(図-4.6参照) 本例題の場合、円弧の中心、通過点がほとんど一定値をとるため、非常にスムーズに最終断面に到達している。iteration 5, 6で安全率を割っているのは、円形すべりの安全率を関数近似した場合の精度が十分でないためである。最適化計算の中の直線上の最小値の探索において、円形すべりの安全率を直接に算定すれば解決する問題であるが計算時間が膨大なものとなる。その他、数値計算を実際に行って次のようなことが判明した。

- ① 初期に仮定する断面は、最終断面に近いものの方が計算時間が短くなって有利であるが、見当のつかない場合は、大きな断面を仮定しても、最終結果にあまり差はない。
- ② 最適化計算に必要な各種パラメータの与え方によって最終結果に差異のあらわれることがあるが、一応次のような値を設定すれば良いであろう。
 - (i) SUMTの摂動パラメータの初期値

$$\tau_k = 100 \sim 1000$$
 - (ii) SUMTの摂動パラメータの減小率

$$\gamma = \frac{1}{10} \sim \frac{3}{10}$$

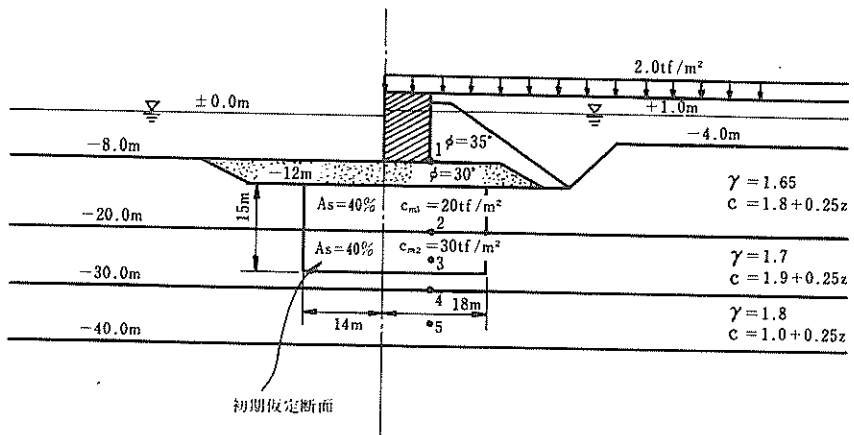


図-4.6 例題-3 (深層混合処理工法)

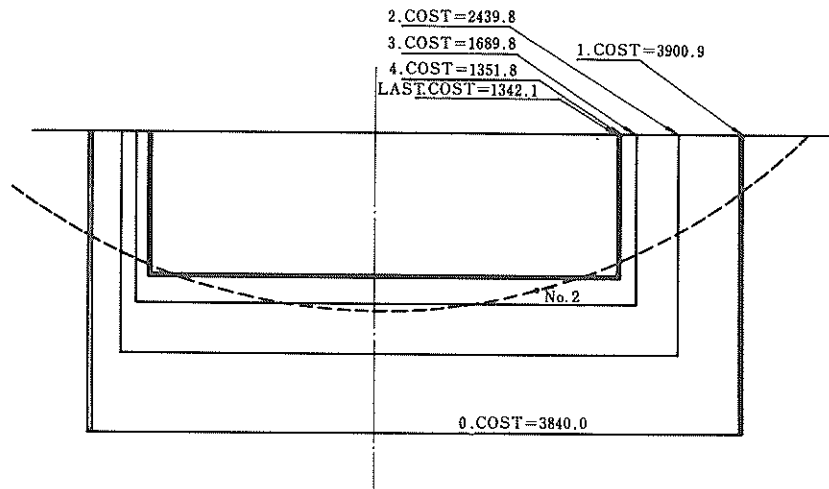


図-4.7 断面の最適化過程 (例題-3)

表-4.3 変数および目的関数の変化 (例題-3)

iteration	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5^*	z_6^*	z_7^{\dagger}	P	cost	f_k	$f_{min,k}$	r_k	備考
0	14.0	18.0	15.0	定 数	4.0	13.0	3	55128	3840.4	1.318	1.20		S
1	14.2	18.2	15.0		4.0	13.0	3	4957.2	3900.9	1.318	1.26	1000.0	S
2	12.6	15.0	11.1		4.0	13.0	3	2631.8	2439.8	1.328	1.26	100.0	S
3	11.8	12.9	8.6		-2.0	7.0	2	1712.7	1689.8	1.309	1.264	10.0	S
4	11.2	12.1	7.3		0.0	9.0	2	1354.9	1351.8	1.224	1.255	1.0	S
5	11.0	11.7	6.9		0.0	7.0	2	1244.6	1244.3	1.164	1.212	0.1	f
6	11.3	11.7	7.1		0.0	9.0	2	1565.9	1297.6	1.190	1.222	1.0	f
7	11.3	12.2	7.4		0.0	9.0	2		1382.2	1.243	1.223	1000.0	S
LAST	11.2	12.1	7.2		0.0	9.0	2	1342.3	1342.1	1.219	1.212	0.1	S

* z_5 , z_6 は円弧の中心座標。 z_7 は円弧が通過する点の番号である。

- iii) 円形すべりの安全率を関数近似する場合の範囲を示すパラメータ $R_s = 0.5 \sim 0.7$
- iv) 制約条件式に付加する重みパラメータ $\mu = 1.0 \sim 5.0$
- ③ 最適化手法としては、DFP法、Powell法のいずれを使用しても大差はないと思われる。
- ④ 円形すべりの安全率の極値が複数ある場合には、制約条件を犯す場合が多くなり、収束し難くなる。

5. あとがき

本研究では、非線形計画法のひとつであるSUMT法を地盤改良断面の決定に適用し、その計算プログラムを作成した。また数値計算例によって、その最適化手法の有効性を示した。しかし、本プログラムは、円形すべりプログラムのデータチェック機能、本計算部分等の全てをブラックボックスとして使用しているため、前述の計算例の場合、当所のACOS-IIで5~10分程度かかる。実際の設計に使用する場合には、さらに時間の短縮化を計る必要があると思われる。

本研究を行うにあたって、信州大学 長尚教授には、最適設計全般、および、非線形計画法の円形すべり計算への適用について懇切丁寧な御指導を受けた。計算室の佐々木技官には当所の円形すべりプログラムのサブルーチン化にあたって多大の便宜を計っていただいた。ここに記して謝意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) J. コワリック, M.R. オスボーン; 非線形最適化問題, 培風館, 1970 (山本, 小山訳)
- 2) 長 尚 ; 構造物の最適設計, 朝倉書店, 昭和46.9
- 3) 北村勝英; 非線形計画最適化手法の実用化に関する研究-第2報 関数近似法および部分最適法による骨組構造の最適設計, 石川島播磨技報 Vol.14, No.4, 昭和49年7月
- 4) AHLBEG, Nilson, Walsh; The theory of spline and their applications, Academic press INC, 1967.
- 5) 穂坂 衛; 曲線, 曲面の合成および平滑化理論, 情報処理, Vol.10, No.3, May, 1969.
- 6) M, J. D. Powell; An efficient for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives, Computer Journal Vol.7, 1964 p.55
- 7) G. W. STEWART III; A modification of Davidon's Minimization Method to Accept Difference Approximations of Derivatives, Journal of the Association for Computing Machinery, Vol.14, No.1, January 1967, pp.72~83
- 8) R. Fletcher and M. J. D. Powell; A rapidly convergent descent method for minimization, Computer Journal Vol.6, 1963, pp.163~158
- 9) 高力健次郎; ブロック式係船岸の設計について(非線形計画法による最適設計), 港湾技術研究所報告, Vol.11, No.3, (1972.9)
- 10) 山本修司, 塩沢俊彦; 混成式防波堤の最適設計, 港湾技研資料, No.301, Sept, 1978
- 11) 松尾 稔; 砂ぐいを打設した粘土地盤の安定計算について, 土と基礎, Vol.15, No.12, Dec, 1967
- 12) 田村 勇; 地盤処理工法(1) サンドコンパクション工法の設計法, 調設広報, Vol.2, No.1
- 13) 丸尾祥二他; サンドコンパクション工法, 施工技術 Vol.5, No.6

付録-1 Spline 関数について

本文 3.4 で SUMT 法の各段階において $4n+1$ 回 (n : 変数の数) の円形すべり計算を行い, 円形すべりの安全率を Spline 関数によって近似する事にした。曲面および曲線の表現方法としては, 文献 5) に Spline 関数を包括した一般的な手法が発表されているので, それにもとづいて概要を説明する。関数を接続して合成していくためには, 各区間の境界値によって区間内部の関数を表す必要がある。保坂氏は, 区間 $(0, 1)$ で連続した 1 個の関数 $\phi(t)$ を $2m+1$ 次の代数式で近似し, その区間の両端における m 次までの微係数を用いて次のように表わしている。

$$\phi(t) = \sum_{i=0}^m \{ \phi_0^{(i)} p_i(m, t) + \phi_1^{(i)} q_i(m, t) \} \dots\dots\dots (A-1)$$

$\phi_0^{(i)}, \phi_1^{(i)}$ は $t=0$ および $t=1$ における $\phi(t)$ の i 次の微係数の値である。また $p_i(m, t), q_i(m, t)$ は

$$p_i(m, t) = \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^{m-i} (-1)^{i+j-1} \binom{2m+1-i}{j} t^{i+j} \times (t-1)^{2m+1-i-j} \dots\dots\dots (A-2)$$

$$q_i(m, t) = \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^{m-i} (-1)^j \binom{2m+1-i}{j} t^{2m+1-i-j} \times (t-1)^{i+j}$$

とあらわされる。通常の場合, 実用的には $m=0, m=1$, 程度であり, その場合には

$$m=0 \text{ のとき } p_0(0, t) = 1-t, q_0(0, t) = t \quad (A-3)$$

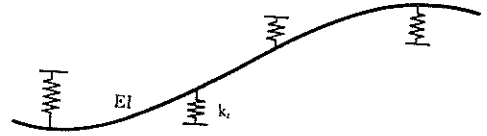
$$m=1 \text{ のとき } \left. \begin{aligned} q_0(1, t) &= 1-3t^2+2t^3 \\ q_1(1, t) &= 3t^2-2t^3 \\ p_1(1, t) &= t(t-1)^2 \\ q_1(1, t) &= t^2(t-1) \end{aligned} \right\} (A-4)$$

(A-3) 式は直線の式であり, (A-4) 式は梁の剛性マトリックスを導くときに, たわみを 3 次式で近似し, 梁の両端のたわみとたわみ角で表わした場合の形状関数と同じものである。

与えられた点列を滑らかに結ぶ曲線(曲面)の創生において, 「与えられた拘束条件のもとで曲率の 2 乗の曲

線に沿う積分値を曲線の評価関数として, それが最小値になるよう曲線を定める操作をフェアリングである」という仮定をたて以下の手順で曲線を定めている。

付図-1 に示すように, 与えられた点列に初期長さ 0 の



付図-1 スプライン曲線

バネの一端が固定してあり, 他端は弾性梁に引きかけてある系を想定し, 全体は弾性的平衡状態にあるとする。系全体の弾性エネルギーは

$$V = \frac{1}{2} \sum k_i (y(x_i) - a_i)^2 + \frac{1}{2} EI \int y''(x)^2 dx \dots\dots\dots (A-5)$$

であり, これを最小にするよう次式で $y(x)$ を定める。

$$\frac{\partial V}{\partial y_i} = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial y'_i} = 0$$

この操作は, 弾性支承上の梁の剛性マトリックスを最小エネルギーの原理を用いて導びくことと同じである。式 (A-4) において $p_0(1, t), q_0(1, t)$ 等を以後 $p_i(t), q_i(t)$ と表わすことにすると, 曲線の式は区間 $(i-1, i)$ で次のようになる。

$$y_{i-1, i} = y_{i-1} p_0(t) + y_i q_0(t) + y'_{i-1} l_i p_1(t) + y'_i l_i q_1(t) \dots\dots\dots (A-6)$$

$$\text{ここで } l_i = x_i - x_{i-1}, t = (x - x_{i-1}) / l_i$$

さらに $p_0(t), q_0(t)$ 等を代入して微分すると

$$y'_{i-1, i} = y_{i-1} (-6t+6t^2) / l_i + y_i (6t-6t^2) / l_i + y'_{i-1} (3t^2-3t+1) + y'_i (3t^2-2t) \dots (A-7)$$

$$y''_{i-1, i} = 6(y_i - y_{i-1})(1-2t) / l_i^2 + y'_{i-1} (6t-4) / l_i + y'_i (6t-2) / l_i \dots\dots\dots (A-8)$$

式(A-8)を式(A-5)に代入すると最終的に式(A-9)が得られる。(式の誘導はかなり複雑なので結果のみを記す。)

$$\begin{aligned}
& l_i y_{i-1}'' + 2y_i''(l_i + l_{i+1}) + l_{i+1} y_{i+1}'' + (6/l_{i+1})(\lambda_{i+1} \\
& \cdot \delta^2 y_{i+1} - \lambda_i \delta^2 y_i) - (6/l_i)(\lambda_i \delta^2 y_i - \lambda_{i-1} \delta^2 y_{i-1}) \\
& = 6\delta^2 a_i \qquad \dots\dots\dots (A-9)
\end{aligned}$$

ここに $\delta^2 f_i$ の形は $(f_{i+1} - f_i)/l_{i+1} - (f_i - f_{i-1})/l_i$ を表わすものである。式(A-9)は y_i'' に関する5項方程式となるが、与えられた点列を必ず通過するものとするとき、 $\lambda_i = \frac{EI}{k_i}$ を0、 a_i を y_i とおくことにより3項方程式となる。式(A-9)より y_i'' が定まると、 y の形状は次のように決定する。

$$\begin{aligned}
y_{i-1,t} &= y_{i-1} + (y_i - y_{i-1})t - (2y_{i-1}'' + y_i'')(l_i^2/6) \\
& \cdot t(t-1)^2 + (y_{i-1}'' + 2y_i'')(l_i^2/6)t^2(t-1) \\
& \dots\dots (A-10)
\end{aligned}$$

港 湾 技 研 資 料 No. 328

1 9 7 9 · 1 2

編集兼發行人 運輸省港湾技術研究所

發 行 所 運輸省港湾技術研究所
橫須賀市長瀬3丁目1番1号

印 刷 所 阿部写真印刷株式会社

Published by the Port Harbour Research Institute
Nagase, Yokosuka, Japan.