

港湾技研資料

TECHNICAL NOTE OF
THE PORT AND HARBOUR RESEARCH INSTITUTE
MINISTRY OF TRANSPORT, JAPAN

No. 274 Sept. 1977

MEMによる波浪スペクトル計算に関する考察(2)
—FPE・スキームにそつた問題点—

鶴 谷 広 一
加 藤 始

運輸省港湾技術研究所



目 次

要 旨	3
1. まえがき	3
2. 最大エントロピー法 (MEM) によるスペクトル計算法	3
3. 計算結果と考察	5
3.1 風波の計算例	5
3.2 データの長さ と 分解能、精度について	6
a) データが短い場合の問題点	6
b) データが短い場合の分解能について	10
c) データが長い場合の分解能と精度	12
d) データの長さ と 精度について	14
4. ま と め	15
謝 辞	
参 考 文 献	
記号一覧表	

**Consideration on Wave Spectra Estimation by
MEM (Maximum Entropy Method) (2)
– Problems based on the FPE Scheme –**

Hiroichi TSURUYA*
Hajime KATO**

Synopsis

It is said that a new method (Maximum Entropy Method or MEM) for power spectral density estimation is superior to other conventional methods such as Blackman and Tukey or FFT. This technique is especially valuable for the short data samples and has much resolution. Making use of such merit, we have calculated the wind wave data especially in the currents. Consequently, it is possible to calculate the power spectral density, but gives less resolution for the short data. In order to improve the resolution it is required to increase the number of the prediction error filter. A large number of it, however, gives the unstable spectrum. It means that the degrees of freedom of the spectral estimate is decreasing. If we have enough data length, such problem became out of the question. In this case the peak frequency and the integrated power are estimated with great accuracy.

* Member of the Hydrodynamics Laboratory, Marine Hydrodynamics Division
** Chief of the Hydrodynamics Laboratory, Marine Hydrodynamics Division

MEMによる波浪スペクトル計算に関する考察(2)

FDEスキームにそつた問題点

鶴谷 広一*
加藤 始**

要 旨

最大エントロピー法(MEM)を用いて、主として風洞水路での風波についてスペクトル計算を行った。その結果、データが短い場合には Akaike の FPE の考えから予測誤差フィルターの数を決めたのでは近接するピークが分離しにくいことがわかった。予測誤差フィルターの数を多くすれば、分解能を上げることはできるが、それに伴って高周波数測の変動が激しくなったり、ピークが二つに分離してしまうなど精度が悪くなる傾向がある。データが十分に長ければ、これらの問題はなくなり、分解能のよいスペクトルが得られる。

MEMは本来短いデータの解析に優れていると言われているが、その場合にも注意すべき点があることが明らかになった。

1. まえがき

情報理論を用いてスペクトルを計算する最大エントロピー法(MEM)が1967年に Burg¹⁾によって発表された。この方法は分解能に優れ、短いデータからもスペクトルの計算ができるなど数々の特徴を持っている。これまでは、地球物理学の分野で主に応用され、地球の自転の不規則性や地震波の解析に使用されてきた(Lacoss²⁾, Smylie et.al.³⁾, Fryer et.al.⁴⁾)。しかし、海岸工学の分野で使用された例はまだ少なく、著者の知る限りでは日野⁵⁾が非定常スペクトルの計算に用いた程度であろう。従って、その特性を活かして現地や実験室の波にMEMが適用される機会がこれから多くなると思われるが、そのためにはデータの集積によるMEMの長所と問題点の正しい評価が必要と思われる。

ここでは主に、風波の計算にMEMを用いて、データの長さや分解能、精度などについて調べ、その適用性と問題点を明らかにしてゆくつもりである。

2. 最大エントロピー法(MEM)による スペクトル計算法

従来の相関法、FFT法とは全く異つた考えからパワースペクトルを求める方法は、Wiener によつてはじめられた最適フィルターの考えに基づいたものである。一つは最尤法(Maximum Likelihood Method)と呼ばれ、もう一つが最大エントロピー法(Maximum Entropy Method)と呼ばれる。最尤法についてはここでは述べないが、MEMとの関係が Burg⁶⁾によって示されている。

最大エントロピー法は、情報理論で良く知られている情報エントロピーの概念を用いてスペクトルを計算しようとするものである。情報エントロピーは普通は通信システムのチャンネルの容量に関連して用いられ、最大エントロピーは最大情報伝送率に対応している(Burg¹⁾)。

定常なガウス過程に従う時系列のエントロピー(正しくはエントロピー率)は次式で示される。

$$h = \frac{1}{2} \log 2f_N + \frac{1}{4f_N} \int_{-f_N}^{f_N} \log [S(f)] df \quad (2-1)$$

ここに、 $S(f)$ はスペクトル密度関数、 f_N はナイキスト周波数である(Smylie et.al.³⁾)。

Burg はスペクトルの Fourier 変換が自己相関関数であるという Wiener-Khinchine の関係を制約条件とし、そのもとで(2-1)式を最大にするスペクトルが最も実現される可能性が大きいとした。

Wiener-Khinchine の関係は次式で示される。

$$\int_{-f_N}^{f_N} S(f) Z^n df = \phi_n \quad -M \leq n \leq M \quad (2-2)$$

$$Z = \exp(i2\pi f \Delta t)$$

ここに、 ϕ_n はタイムラグが $n \Delta t$ の自己相関関数である。Lagrange の未定乗数 λ_n を用いて(2-1)式、(2-2)式の条件付変分問題を解くと

$$S(f) = \frac{1}{\sum_{n=-M}^M \lambda_n Z^n} \quad (2-3)$$

* 海洋水理部 水理研究室

** 海洋水理部 水理研究室長

が得られる。 λ_n は (2-2) 式を満足するように定める。
(2-2) 式を書きかえると

$$S(f) = 4t \sum_{n=-M}^M \phi_n Z^n \quad (2-4)$$

$$S'(f) = \frac{P_M / 2f_N}{(1+a_1 Z + a_2 Z^2 + \dots + a_N Z^N) (1+a_1^* Z^{-1} + a_2^* Z^{-2} + \dots + a_N^* Z^{-N})}$$

$$= \frac{P_M}{2f_N |1 + \sum_{n=1}^M a_n Z^n|^2} \quad (2-5)$$

が得られる。 $1+a_1 Z + a_2 Z^2 + \dots + a_M Z^M$ は最小位相 (minimum phase) である。つまりその解は単位円の外側にあって、内側とその境界では解析的でゼロ点を持っていない。(2-4) と (2-5) 式の Z のべき乗の係数を比較し、 ϕ_n が偶関数であることから次式が得られる (Burg⁷, Chen, et. al.⁸)。

$$\begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_1 & \dots & \phi_M \\ \phi_1 & \phi_0 & \dots & \phi_{M-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_M & \phi_{M-1} & \dots & \phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_{M1} \\ \vdots \\ a_{MM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_M \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

予測誤差フィルター (最小位相フィルター) と予測誤差の分散 P_M は (2-6) 式を解くことによって求められる。Burg は ϕ_n を計算せずに、データ列から直接予測誤差フィルターを求めた。

フィルターをデータ列の正及び逆方向に作用させ、その出力のパワーの平均を最小にすることを考える。2点フィルターの場合には、出力のパワーの平均は

$$\pi_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} [(x_i + a_{11} x_{i+1})^2 + (x_{i+1} + a_{11} x_i)^2]$$

となる。これを係数 a_{11} に関して最小にする。

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial a_{11}} = 0$$

より

$$a_{11} = -2 \sum_{i=1}^{N-1} \frac{x_i x_{i+1}}{x_i^2 + x_{i+1}^2} \quad (2-7)$$

が求めるべき2次の予測誤差フィルターである。

a_{11} が求まれば (2-6) 式から $\phi_1 = -a_{11} \phi_0$, $P_1 = (1 - a_{11}^2) \phi_0$ となってすべての未知数が求まったことに

なる。また (2-3) 式は実数でかつ非負という条件を用いて

なる。 ϕ_0 は $\phi_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2$ から計算する。3次の予測誤差フィルターを求めるには Levinson の recursion formula を用いる。

これは

$$\begin{bmatrix} 1 \\ a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a_{11} \\ 0 \end{bmatrix} + a_{22} \begin{bmatrix} 0 \\ a_{11} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2-8)$$

の関係を用いて出力のパワーが a_{22} に関して最小になるよう a_{22} を決めるものである。簡単な計算ののち、

$$a_{22} = -2 \sum_{i=1}^{N-2} \frac{F_i B_i}{F_i^2 + B_i^2} \quad (2-9)$$

ここに、 $F_i = x_{i+2} + a_{11} x_{i+1}$, $B_i = x_i + a_{11} x_{i+1}$ である。再び (2-6) 式より $\phi_2 = -a_{22} \phi_0 - a_{11} (1 + a_{22}) \phi_1$, $P_2 = (1 - a_{22}^2) P_1$ となる。こうして順次 $M+1$ 次までの係数 a_{Mn} と P_M とを求めてゆき、(2-5) 式からスペクトルが計算できる。(2-7), (2-9) 式からもわかるとおり、 $a_{MM} \leq 1$ なので、 $P_{n+1} \leq P_n$ となっていることに注意しておく。 $M+1$ 次への一般化は Andersen⁹ に詳しい。

MEMを実際に使用しようとする者にとって最大の関心は、予測誤差フィルターをどこまで求めたらよいのかという問題にある。Akaike^{10,11} はAR(Autoregressive) モデルの理論から、FPE(Final Prediction Error) の概念を提案した。MEMによるスペクトル解析はランダム過程にARモデルを適用するのと等価であることが示されている (van den Bos¹², Ulyrch & Bishop¹³)。FPEは予測誤差の2乗の期待値として次式で定義される。

$$FPE = E[(x_i - \hat{x}_i)^2] \quad (2-10)$$

\hat{x}_i は x_i の予測値である。 M の値が小さい (フィルターが短い) と分解能は悪くなり、平均化されたスペクトルになってしまう。一方、 M が大きすぎると分解能はよくなるが、スペクトルの分散が大きくなり精度は悪くなる。従って、この間のどこかに最適の M が求まるはずである。

Akaikeはこのときの M の値が次式で求まるとした。

$$FPE(M, N) = \frac{N + (M+1)}{N - (M+1)} P_M \quad (2-11)$$

この場合、時系列から平均値が引かれていることが必要である。

平均値が時系列から引かれていなければ、

$$FPE(M, N) = \frac{N + M}{N - M} P_M \quad (2-12)$$

となる。

実際に M を決めるには、 M をあらかじめ可能な限り大きく与えておき（データ数の $1/2$ 程度）、(2-11) あるいは (2-12) 式より $FPE(M, N)$ を計算する。そして最小の FPE を与える M を最適なフィルターの長さとするのである。この過程を以後は AKAIKE にならって FPE scheme と呼ぶことにする。大内、南雲¹⁴⁾ は、周期的な信号に対しては FPE scheme では M を小さく与える傾向があると述べている。

3. 計算結果と考察

3.1 風波の計算例

ここで使われているデータは、すべて港湾技術研究所の大型風洞水路で測定、記録されたものである。実験装置の詳細については参考文献 15) を参照されたい。

水深は 50 cm で、風速はすべてのケースで吹出口での平均風速 \bar{V} が 8.2 m/sec となるように、送風機を調整した。

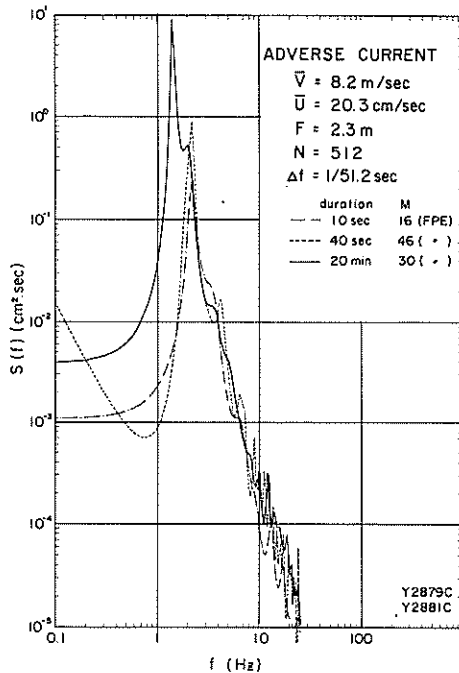


図-1 風波の発達(逆流)

図-1は風と逆方向に流れがあるところでの風波の発達を10秒間毎にMEMで計算したもので、平均流速 \bar{U} は 20.3 cm/sec、測定点のフエッチ F は 2.3 m である。時間と共に波の発達の様子がわかるが、通常の測定を開始する20分後には図の実線に示されるとおり 1.4 Hz の付近にかなり大きなピークがはっきりとあらわれている。これは加藤¹⁵⁾によって報告されている斜め波によるものである。図中に (FPE) と書いてあるのは、FPE scheme によって与えられた M で計算したことを示している。

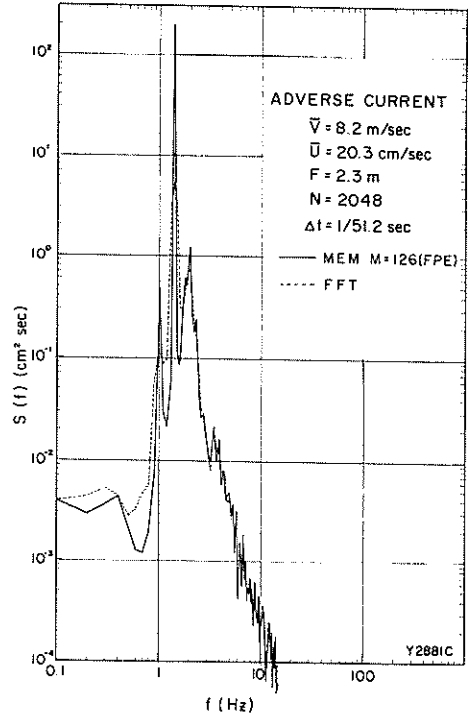


図-2 フエッチの短い所での風波(逆流)のスペクトル(MEMとFFTと比較)

図-2の実線は、図-1と同じ20分後から40秒間のデータのMEMによる計算結果であるが、図-1の10秒間の結果とはかなり違っているのがわかる。その第一は1 Hz にかなりのピークがあらわれていること。第二は風波と 1.4 Hz 付近の鋭いピークがはっきり分離されていること。第三は高周波数側の変動がかなり大きくなっていること、などである。

ピークの鋭いところはMEMの分解能の良さをあらわしているといえるであろう。破線で示したFFTの場合は、MEMと比較のためになるべく分解能を上げるためフィルターの幅を小さくとり、7点を三角フィルターに通したものである。従って、精度は犠牲になっているのだが、高周波の変動は驚くほどMEMと一致している。

図-2であらわれている1 Hzのピークが図-1の10秒間のデータの場合にあらわれないのも分解能が良いと言われているMEMの特徴からすれば、おかしいといえるだろう。単一正弦波では、極端な場合、 $1/2$ 波長でも分解能のよいスペクトルが得られる(Ulrych¹⁶⁾)ことから考えて、データ中に10波もあればはっきりと分離できるはずである。この理由はAkaikeのFPE schemeから決まる予測誤差フィルタが短かすぎるためのものである。これについては以下の節でくわしく述べることにする。

従来から行われてきた流れの中での風波に関する一連の実験において、風と反対方向に流れがある場合に、フェッチの短いところで図-2にみられるような風波とは別にかかなり集中したパワーを持つ波が生じてくるのがわかってきた。このような現象の発達段階での解析にMEMを用いるのが有効であろうと思われ、かなり計算を行ってきたが上に述べた一例のように風波に適用するにあたってはまだMEM自体に調べなければならぬ問題がいろいろあることがわかった。従って、ここではMEMの使用上の注意点とその特性について、主として定性的な議論を中心に話を進めてゆくことにする。

図-3、4はデータが比較的長い場合のMEMとFFTとの比較を示したもので、図-3は風のみ($F=2.78$ m)、図-4は風と逆方向に流れがある(平均流速 $\bar{U}=20.3$ cm)場合の例である($F=9.8$ m)。いずれもMEMと

FFTはピーク付近の大きさが多少違うだけで、かなり合っていると見える。図-3のように、特殊なピークがない風波ではデータ数がかなり多くあってもFPE schemeで求めた M がそれほど大きくなるものではなく、図-2のようにかなり鋭いピークがあるような場合には高い分解能が必要なために、 $N=2048$ でも $M=126$ と大きな M の値をFPE schemeは与える。

以上の例からも、データの長さが十分にあれば、FPE schemeで計算すれば従来から言われているように、ほぼ妥当なスペクトルが得られるようである。

AkaikeのFPEの理論は、データ数 N が大きいときの漸近理論なので、データが短くなってくると当然問題が生じるはずである。本来ならば、データが短い場合の予測誤差の問題等について議論する余地があるだろうが、それ自体かなりむずかしい問題を含んでいて、簡単に解決できる性質のものでもないと思われるので、そのことは今回考えずに、データが短い場合もFPE schemeを用いて計算を行い、その適用性について調べることにする。

Fryer et al.⁴⁾も、データが短い場合のFPE schemeの適用性について調べる必要があるだろうと述べている。

3.2 データの長さや分解能、精度について

a) データが短い場合の問題点

3.1で示したように、10秒間($N=512$, $4t=1/51.2$)

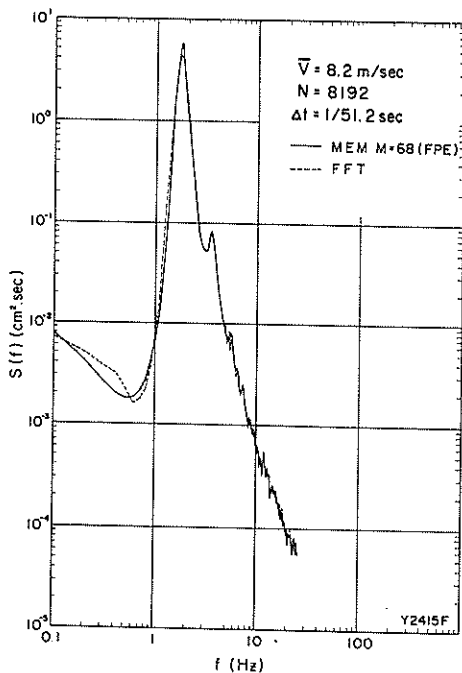


図-3 風波のスペクトル (MEMとFFTと比較, $N=8192$)

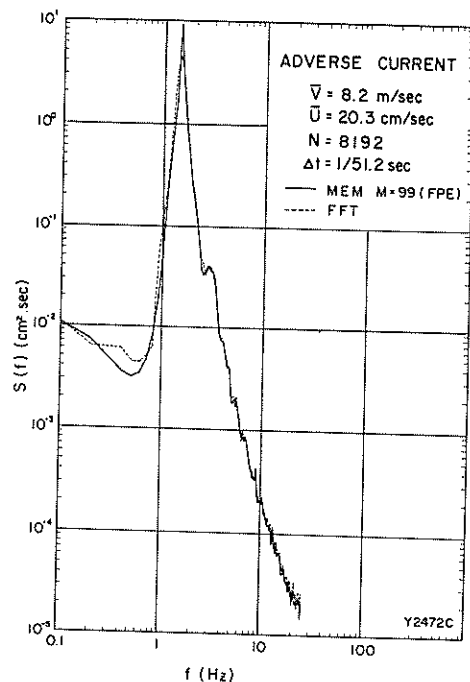


図-4 逆流中での風波のスペクトル (MEMとFFTと比較, $N=8192$)

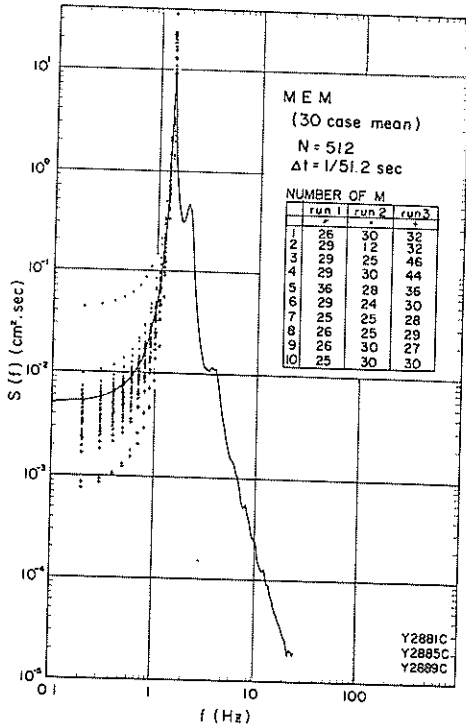


図-5 30 ケース平均のMEMのスペクトル (N= 512)

sec の計算では 40 秒間 (N= 2048) の場合と比べて 1 Hz のピークが出ていない。これはデータが短くなったために分解能が悪くなったと解釈できる。もっとも、現実のデータなので、この時間帯にたまたま 1 Hz の波がなかったといえるかもしれない。そこで同一の実験を 3 回行い、各ケース 100 秒間の波を 10 等分して合計 30 回について MEM によりスペクトル計算を行った結果が図-5 に 0.1 Hz ごとにプロットされている。図の実線は 30 回の計算の平均である。図-5 と同様の計算を FFT で行ったのが図-6 である。FFT では基本周波数バンド幅が 0.1 Hz なので、一次スペクトルの値をそのまま用いている。FFT では 10 秒間のデータからもしっかりと 1 Hz のピークがあることがわかる。従って、1 Hz の波はやはりある程度のパワーを持っているといってよいだろう。では MEM では 10 秒間のデータからはなぜ 1 Hz のピークを検出できないのだろうか。これでは分解能がよいといわれる MEM の特徴があらわれていないが、その原因は前に述べたとおり、M が小さく与えられたためであろうと思われる。

run 1 の最初の 10 秒間の M の数は 26 であるが、M を大きくしてゆくと 1 Hz 付近にピークがあらわれてくる。M=100 でははっきりとわかるが、M=200 にするとさらにこれがはっきりする。しかし、M=60 程度では 1 Hz

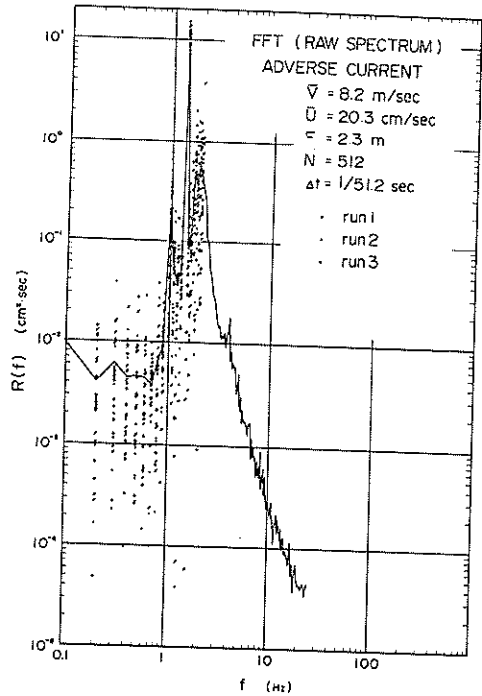


図-6 30 ケース平均の FFT のスペクトル (N= 512)

のピークは全く出ていない(図-7)。

それではこの場合は FPE scheme が M を小さく与え

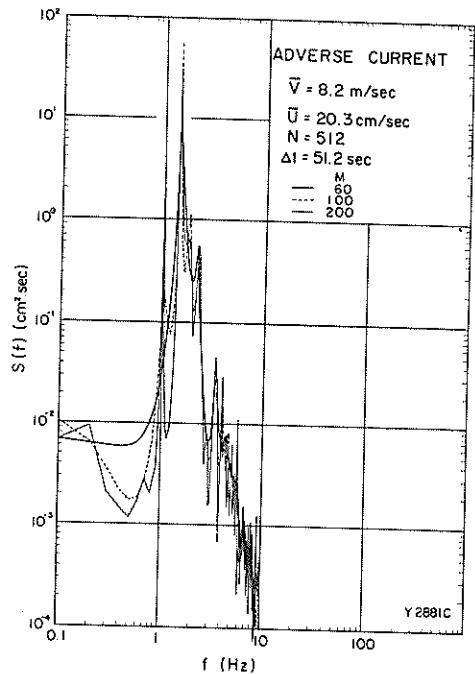


図-7 M によるスペクトルの形の違い

たと結論してよいのだろうか。しかしながら、細かいピークを出すために、つまり分解能を上げるために M を大きくすれば、2.で述べたとおり全体のスペクトルの分散が大きくなり精度が悪くなるのが図-7からも明らかである。

データの長さが十分でないと、分解能と精度が相反関係にあり、かなりきびしく効いてくるようである。

まず、正弦波を用いてこの問題を簡単にチェックしてみよう。用いたデータは1 Hzと1.4 Hzの正弦波で、そのパワーの4分の1のパワーのホワイトノイズを加えて、 Δt を1/20秒としてサンプリングした。図-8の実線は1 Hzの正弦波で、 $N=20$ の場合である。周波数が0.966 Hzとやや低周波数側へずれているが、データが短いとピーク周波数がずれやすく、初期位相の影響も受けやすいためと思われる(Chen et al.⁸⁾)。しかし、おおむね分解能の良いもともらしいスペクトルが得られている。そこで、さらに1 Hzの正弦波と同じ振幅の1.4 Hzの波を加えたときの計算結果が図の破線で示されているが、加えた周波数とは全く別のところに二つのピークがあらわれている。これは、あまりデータが短いと、一つの正弦波なら妥当な結果が得られても、二つの正弦波になるともはや正しくスペクトルが求められないということを示している。

図-9は $N=60$ とした場合で、同じ振幅の1 Hzと1.4 Hzの正弦波を加えたデータの計算結果が実線で示されている。この場合には、二つのピーク周波数が真の値からややずれているものの、ほぼ正しいスペクトルを与えているといえよう。1.4 Hzの正弦波の振幅はそのままに、1 Hz

の正弦波の振幅を $1/2$, $1/\sqrt{8}$ (パワーではそれぞれ $1/4$, $1/8$)にしたときの計算結果も、図-9の中に一点鎖線と破線で示されている。1.4 Hzのピークの近くでは一点鎖線と破線は区別がつかないほど重なっている。この場合には、1.4 Hzの正弦波の振幅は変わっていないのに、1 Hzの正弦波の振幅が小さくなると1.4 Hzのピークがかなり大きくなり1 Hzのピークはなだらかなスペクトルしか得られない。つまり、パワーの小さくなった第二のピーク

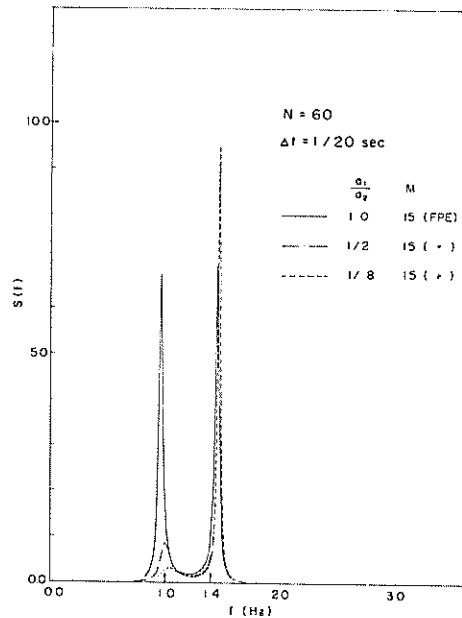


図-9 正弦波のスペクトル ($N=60$)

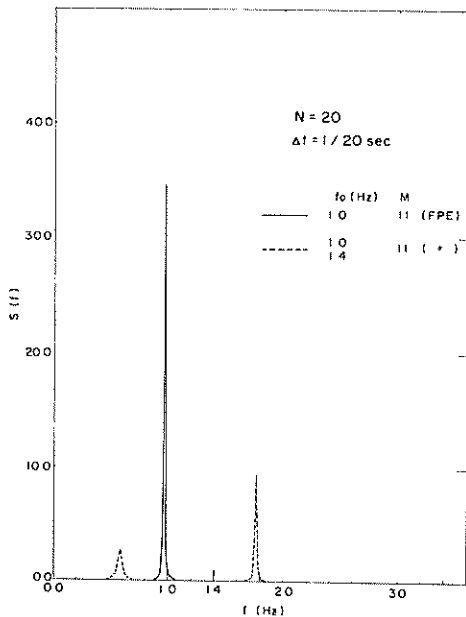


図-8 正弦波のスペクトル ($N=20$)

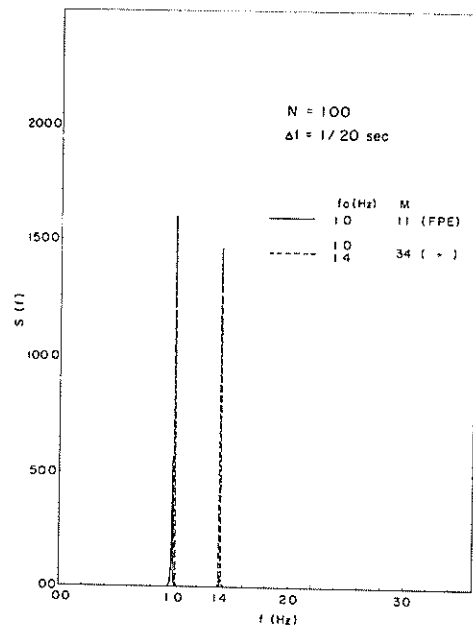


図-10 正弦波のスペクトル ($N=100$)

クにまで高い分解能を期待できないことになる。

さらにデータ数を増し、 $N=100$ として計算したのが図-10である。実線が1 Hzの正弦波とホワイトノイズ、破線が1 Hzと1.4 Hzの同じ振幅の正弦波を加えた場合である。データが長くなるほど周波数も正確で、分解能もよくなりダイナミックレンジの広いスペクトルが得られる。図-9, 10からも、同じ振幅の正弦波でも条件によってピークの値が大きく変わるのがわかる。

得られたスペクトルの上限と下限はBurg⁷⁾によって求められている。

$$\begin{aligned} \frac{M}{\prod_{n=1}^M} \left(\frac{1 - |a_{n,n}|}{1 + |a_{n,n}|} \right) &\leq \frac{P_M(f)}{\phi_0/2f_N} \\ &\leq \frac{M}{\prod_{n=1}^M} \left(\frac{1 + |a_{n,n}|}{1 - |a_{n,n}|} \right) \quad (3-1) \end{aligned}$$

ここに、 $P_M(f)$ は $M+1$ 次の予測誤差フィルターから求めたスペクトル密度である。

(3-1)式の上限と下限の比をとることにより、ダイナミックレンジ D が求まる。

$$D = \frac{M}{\prod_{n=1}^M} \left(\frac{1 + |a_{n,n}|}{1 - |a_{n,n}|} \right)^2 \quad (3-2)$$

前記の正弦波の場合、(3-2)式で計算された D の値は $10^9 \sim 10^{12}$ の範囲で、実際に得られたスペクトルのダイナミックレンジの値 10^6 程度よりかなり大きな値を与えるようである。

次に、実際の風波と似たスペクトルを持つように、ランダムな位相を持つ正弦波を加え合わせたモデルデータの計算例を示す。これは、1 Hzにピークを持ち、それより低周波数側で周波数 f の6乗、高周波数側で f の-5乗の傾きを持つように、0.1 Hzから5.0 Hzまで0.01 Hzきざみにランダムな位相を持つ正弦波を加え合わせたものである。 $\Delta t = 1/12.8$ secとした。

図-11は $N=64$ の場合で、このときはFPE schemeで M を求めたが、5秒間という比較的短いデータのためかなり不安定で大きなピークがいくつかあらわれた。これと同じような傾向は例えば図-21を見てもわかるように、実際のデータについてもみられる。従って、データを短くしてスペクトルを計算したときにあらわれる高周波数の変動は、FFTなどでも言えることだが、計算上出てきたものと言えそうである。

ただし、このようなデータは本来連続スペクトルを持つ波とは別のもので、特にMEMのようにデータが長い場合に分解能が非常によくなる方法には不向きなようである。

実際、データを長くしてゆくと、現実の波とは違ってFPEの値は上下をくり返しながらだんだん小さくなる傾

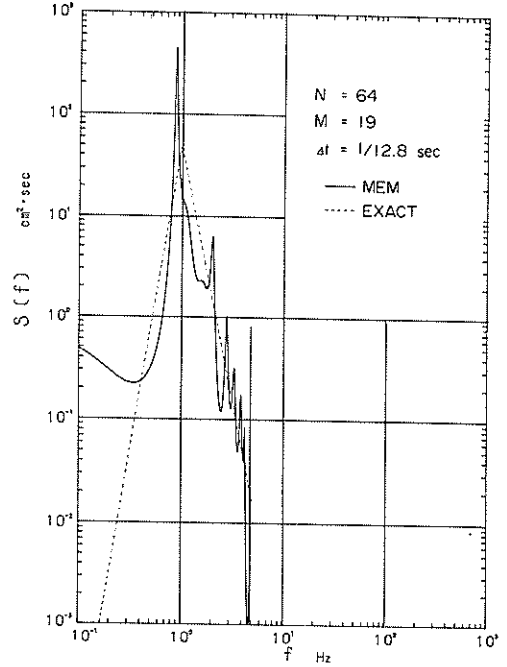


図-11 モデルデータのスペクトル ($N=64$)

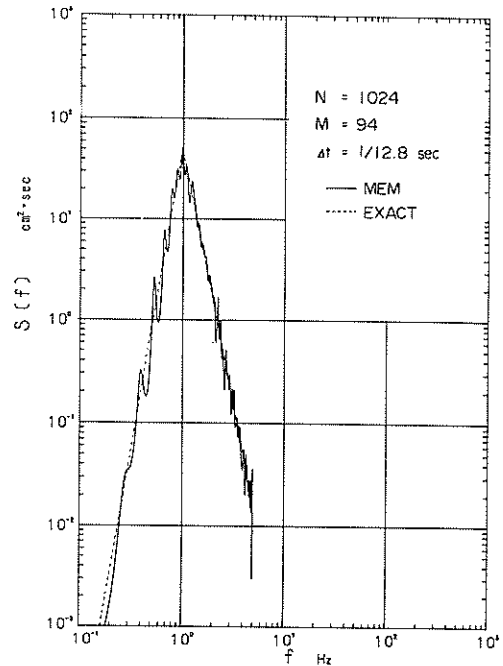


図-12 モデルデータのスペクトル ($N=1024$)

向があり、FPE schemeによって M の値を決めにくい。

図-12は $N=1024$ で、 $M=250$ まで計算して、その

うちの FPE の最小を与えた $M = 94$ の場合である。前図よりはかなり与えたスペクトルの形に近づく。しかし、図-13 のように、 $N = 512$ の場合でも、 $M = 256$ まで FPE を計算してみると、 $M = 256$ で最小の FPE が与えられたような場合には、MEM の分解能の良さがまともにはあらわれて正弦波を細かく分離する傾向がみられた。

図-14 は、図-2 のデータを用いてこのデータを 4 個おき ($N = 512$) と 8 個おき ($N = 256$) にサンプリングして計算したものである。従って、サンプリング時間は $N = 512$ で $1/12.8$ 秒、 $N = 256$ で $1/6.4$ 秒となるからナイキスト周波数もそれぞれ 6.4 Hz、 3.2 Hz となる。観測時間が同じならば、データ数の変動はサンプリング時間を変えて、高周波数のカットオフ周波数に影響を及ぼすだけで、得られたスペクトルはそれほど違ったものにはならない。すなわち、データ個数は少なくともデータ中に十分な波数 (この例では 40 波) があれば、分解能に関しては問題ないといえる。 $N = 256$ で $M = 21$ 、 $N = 512$ で $M = 36$ であるから、読みとばさないもとのデータのときの $M = 126$ ($N = 2048$) と比べても、FPE scheme は N に対して M をほぼ同じ割合で与えている。これまでデータ数が少ないと言わずにデータが短いと言っていたのはこのためである。

b) データが短い場合の分解能について

データが短いとは、ここでは風波のピーク周波数の波が 10 数波程度の観測時間とみなしている。

風波のデータに正弦波を加え、これがどの程度検出できるかを調べて分解能のチェックをしてみることにする。

図-22 は流れのない時の風波の $N = 512$ 、 $\Delta t = 1/51.2$ sec、10 秒間の MEM による計算例で、フェッチ F が 27.8 m である。このデータに振幅の異なる 1 Hz の正弦波を加えて、FPE scheme で計算したのが図-15 である。風波の全パワーに対して正弦波のパワーを $a^2/2$ (a は振幅) として、5%、20%、40% のパワーを持つ正弦波の振幅を計算してもとのデータに加えた。

風波のピーク周波数 (1.54 Hz) と加えた正弦波の周波数がかかなり近いこともあって、風波のパワーの 5% 程度の正弦波では検出できず、20% のパワーでも得られたピークは 1 Hz より高周波数側 (風波のピーク側) へかたよっているが、パワーが 40% の場合にはほぼ正しい周波数にピークが出現している。この場合では、加えた正弦波のパワーが大きくなるに従って M も大きくなっているが、正弦波に対応するスペクトルの幅が広く、かなりのパワーを持った正弦波でないと分離できないなど、データが短いと正弦波を分離できるという意味での分解能はあまり良くないようである。

図-16 の破線は前図におけるパワーの比が 20% の場

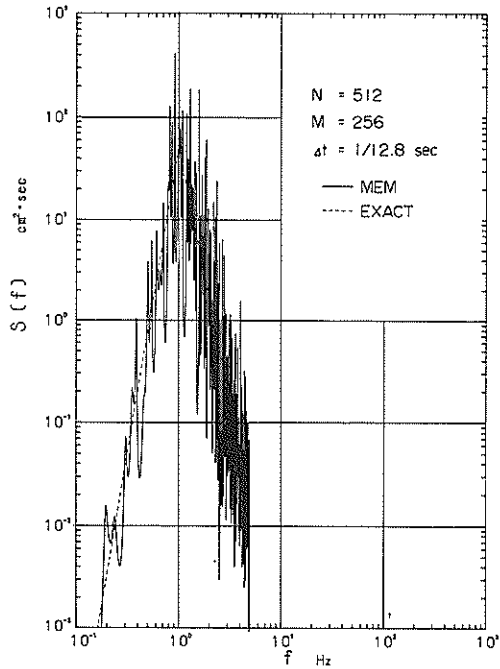


図-13 モデルデータのスペクトル ($N = 512$)

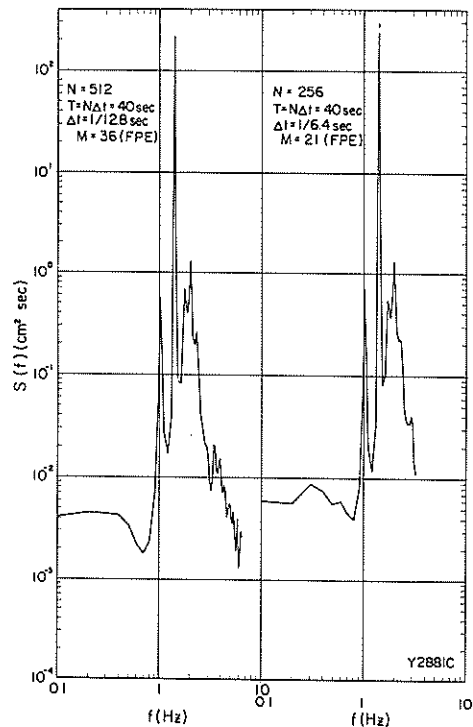


図-14 データ個数によるスペクトルの違い

合で、 M の数を100とした場合である。 M が増えたことにより分解能がよくなり、1 Hzの正弦波が鋭く分解されている。しかし、 M が増えたことによる他の周波数への影響も大きく、もとの風波のピークが同程度の大きさの二つ

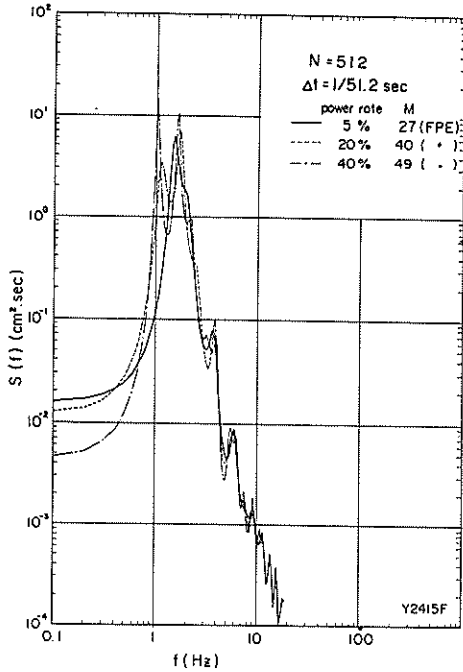


図-15 風波のデータに1.0 Hzの正弦波を加えた例

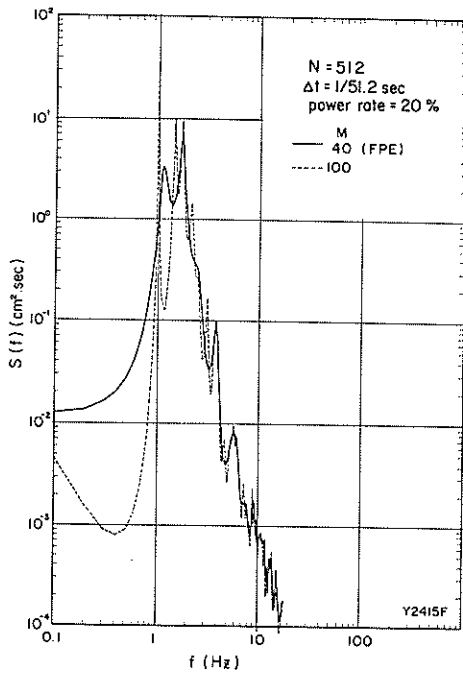


図-16 M の数を変えたときのスペクトルの変化

のピークに分離してしまう。これから、FPE schemeで決まる M の値より極端に大きな M でスペクトルを求めるのは現実的でないし、分解能を良くすることはできるが全体の精度の面からも好ましくないといえる。

図-17の実線は風波のパワーの5%、破線は20%のパワーを持つ正弦波を加えたデータの計算結果で、左側の図は0.5 Hzに、右側の図は5 Hzに正弦波を加えたものである。0.5 Hzの正弦波を加えた場合では、 M の値が4と極端に小さく与えられて、正弦波も分離できないし、全体にかなり平均化されたスペクトルになってしまった。5 Hzの正弦波を加えた場合には、風波のピーク周波数とかなり離れていることと、データ中に含まれる波の数が50波と多いこともあって、正弦波のパワーが風波のパワーの5%の場合でもかなりはっきりと分離できている。 M の値が加えた正弦波のパワーに左右されないのが図-15と違う点である。

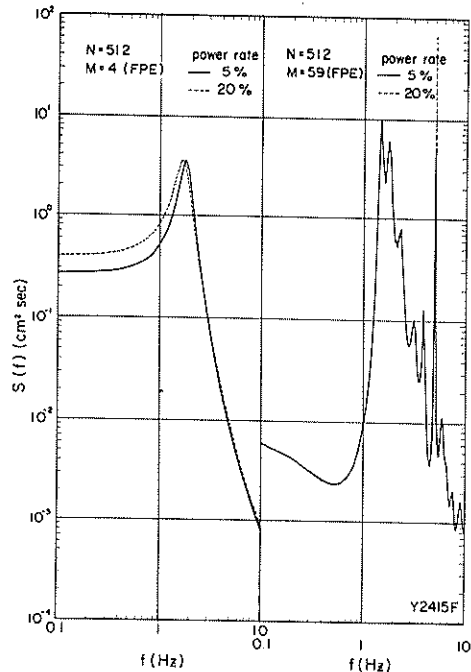


図-17 左は風波に0.5 Hzの正弦波を加えた例、右は5.0 Hzの正弦波を加えた例

0.5 Hzの正弦波はデータ中に5波入っているが、図-17の場合はもとのデータにかなり悪影響を及ぼしたようで、 M が4と極端に小さく与えられてしまう。

このデータについて、 $M=33$ と59で計算したのが図-18である。正弦波を加えないもとの風波の場合と同じ $M=33$ でも正弦波はあらわれず、 $M=59$ にするとほぼ0.5 Hzに正弦波があらわれている。この図と図-17の5.0 Hzの正弦波を加えた場合を比べると、 M が同じ59であっても風波の部分

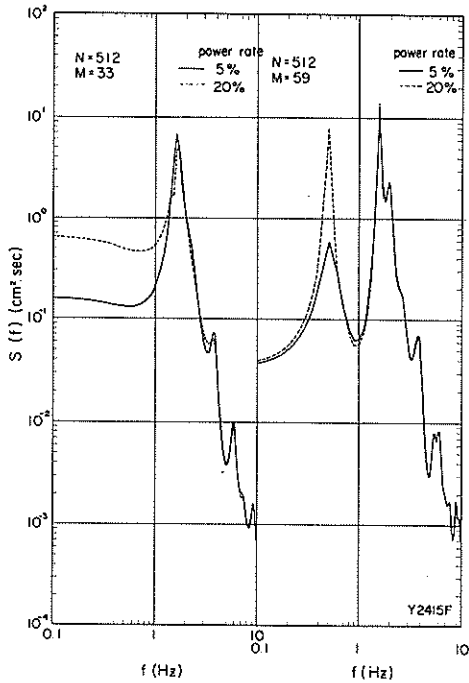


図-18 風波に 0.5 Hz の正弦波を加えたデータの M による違い

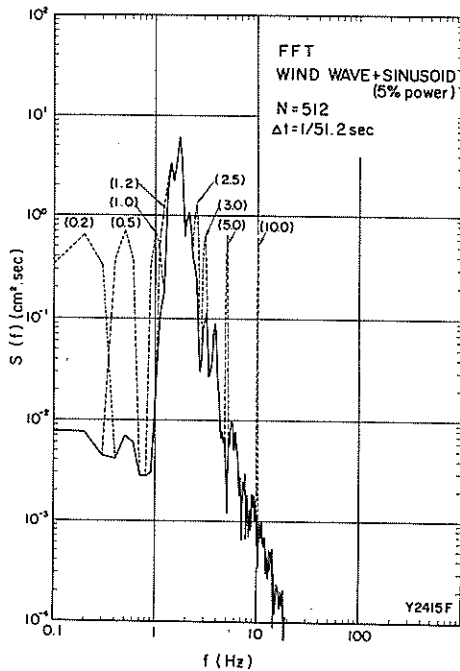


図-19 風波と正弦波を加えたデータを FFT で計算した例

のスペクトルの形が違っているのは興味あることである。

図-19のように、FFT の場合は風波のデータに正弦波を加えても、フィルターの関係する周波数以外は全く影響を受けない。これは、 $N=512$ の場合で、図-22 と同じデータにそのパワーの 5% のパワーを持つ正弦波を一つ加えたものである。加えた正弦波の周波数は 8 種類で、0.2, 0.5, 1.0, 1.2, 2.5, 3.0, 5.0, 10.0 Hz である。分解能を良くするために、一次スペクトルは 3 点を移動平均する三角フィルターに通した。図の実線がもとのスペクトルで、破線が加えた正弦波によって加わったスペクトルである。図のように、どの周波数に正弦波を加えても、フィルターで影響する範囲が変わるだけで、他の実線の部分は全く変わらない。

MEM では全体のデータに対して最も合理的なフィルターを求めるために、一部の周波数成分が変われば全体に影響が及んで、全体の積分値が変わらない範囲で (Wiener-Khinchine の関係は満足されている。) スペクトルの形は変わりえる。

以上の考察から、データが短い場合には最もパワーのあるピークは鋭い形が出るが、それよりパワーの小さいピークはたとえ鋭い形であっても互いに近くにあるほど FPE scheme では出にくく、 M の数を大きくすれば分解能は良くなるかわりに全体の精度としては悪くなるのがわかった。では、 M をどの程度にとったらよいのかというと、現在のところ FPE に変わる理論はなく、特にデータが短い場合は M の大きさによる形の変動が出やすいとか、ピーク同志の干渉がありえることを考慮して M をいくつか変えて計算してみるとか、FFT との結果を比較検討することが現象の本質的な議論には必要と思われる。

c) データが長い場合の分解能と精度

b) と同様のことを $N=2048$ (40 秒間) で調べてみることにする。もとの風波のスペクトルは図-24 に示されている。

図-20 はこの風波に、5% のパワーの正弦波を加えたデータの計算結果で、図の左側は風波にそれぞれ 0.2, 0.5, 1.0 Hz の正弦波を加えた場合、右側は 3.0, 5.0, 10.0 Hz の正弦波を加えた場合である。

各正弦波のスペクトルの上にある数字はピーク周波数を示し、カッコの中は FPE scheme で求められた M の値が示されている。

この場合、 $N=512$ のときは検出できなかった 1 Hz や 0.5 Hz の正弦波もはっきり分離されている。さらに 0.2 Hz の波までかなりの分解能で分離されている。0.2 Hz の波は 8 波しかないが、はっきり分離できるということはデータが比較的長ければ、分解能に関して問題がないということになる。これについては 3.1 で述べた通りである。

表-1 風波と正弦波の計算結果

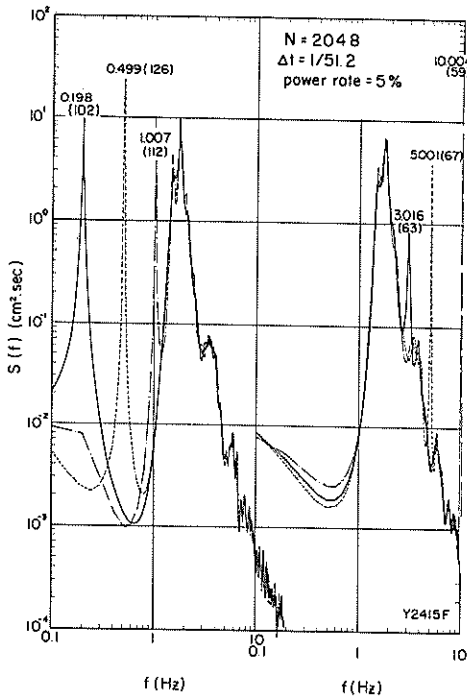


図-20 風波に周波数の違う正弦波を加えた例

この場合でも、 M の値が変動すれば、風波の部分も少しづつ変わっている。

$N=2048$ で、正弦波のパワーの風波のパワーに対する比を 5, 10, 20, 40 % と変えて、いろいろな周波数について計算した結果を表-1 に示す。 f_s は与えた正弦波の周波数を示す。

正弦波のピーク周波数 (f'_s) はかなり正確に求まり、3 桁目に誤差の出る程度である。また、 M の値は与えた正弦波のパワーの大きさに関係なく、風波との相対的な位置の関係で決まっているようである。 f_s が 1.9 Hz の場合は加えた正弦波と風波が重なって、両者の区別がつかなかった。

Lacoss²⁾ は、MEM で求められたスペクトルでは、狭いピークの値はパワーの 2 乗に比例するが、面積はパワーに等しいと述べている。

表-2 は、図-20 の中で正弦波の部分のピークより下の面積を計算したものである。 P_s は積分されたパワー、 $\bar{\eta}_s^2 (= 0.1163)$ は加えた正弦波のパワーである。積分されたパワー P_s に比べてその周波数の風波のパワーは無視したが、3.0 Hz の場合は風波のパワーが無視できないので P_s から引いてある。風波のピークに近い 1.0 Hz と 3.0 Hz の場合と、かなり周波数の低い 0.2 Hz の場合を除いて、かなり正確にパワーが求まっている。

パワー比 (%)	正弦波の周波数 f_s (Hz)	スペクトルのピーク周波数 f'_s (Hz)	風波のピーク周波数 f_p (Hz)	M
5.0	0.2	0.198	1.761	102
	0.5	0.499	1.734	126
	1.0	1.007	1.734	112
	1.2	1.286	1.675	75
	1.5	1.493	1.779	62
	1.9	—	1.789	62
	2.5	2.432	1.803	59
	3.0	3.016	1.759	63
	5.0	5.001	1.745	67
	10.0	10.004	1.793	59
10.0	0.2	0.198	1.761	102
	0.5	0.500	1.734	126
	1.0	1.006	1.733	112
	1.2	1.244	1.666	75
	1.5	1.495	1.780	62
	1.9	—	1.800	62
	2.5	2.462	1.804	59
	3.0	3.010	1.756	63
	5.0	5.003	1.745	67
	10.0	10.005	1.793	59
20.0	0.2	0.199	1.761	102
	0.5	0.501	1.733	126
	1.0	1.006	1.733	112
	1.2	1.225	1.661	75
	1.5	1.497	1.782	62
	1.9	—	1.818	62
	2.5	2.484	1.808	58
	3.0	3.007	1.755	63
	5.0	5.005	1.745	67
	10.0	10.005	1.794	59
30.0	0.2	0.199	1.760	102
	0.5	0.502	1.733	126
	1.0	1.006	1.733	112
	1.2	1.219	1.660	75
	1.5	1.499	1.784	62
	1.9	—	1.832	62
	2.5	2.491	1.807	58
	3.0	3.007	1.754	63
	5.0	5.006	1.745	67
	10.0	10.005	1.794	59
40.0	0.2	0.200	1.760	102
	0.5	0.502	1.733	126
	1.0	1.006	1.733	112
	1.2	1.216	1.659	75
	1.5	1.500	1.786	62
	1.9	—	1.843	62
	2.5	2.494	1.807	58
	3.0	3.007	1.754	63
	5.0	5.006	1.745	67
	10.0	10.005	1.795	59

表-2 パワーの計算例

正弦波の周波数	積分範囲 (Hz)	P_s	$\frac{P_s - \bar{\eta}_s^2}{\bar{\eta}_s^2}$ (%)
0.2	0.0 ~ 0.3	0.1103	- 5.2
0.5	0.4 ~ 0.6	0.1178	+ 1.3
1.0	0.9 ~ 1.18	0.1112	- 4.4
3.0	2.8 ~ 3.2	0.1274	+ 9.5
5.0	4.9 ~ 5.1	0.1142	- 1.8
10.0	9.9 ~ 10.1	0.1173	+ 0.9

d) データの長さや精度について
 データの長さと共にスペクトルにあまり大きな違いがお
 こらないように、定常状態に達した風波のデータを用いて

データの長さを変えて計算したのが 図-21 から 図-24
 までである。フェッチは 27.8 m で測定した。
 データの長さはそれぞれ $N=256$ (5 sec), 512 (10

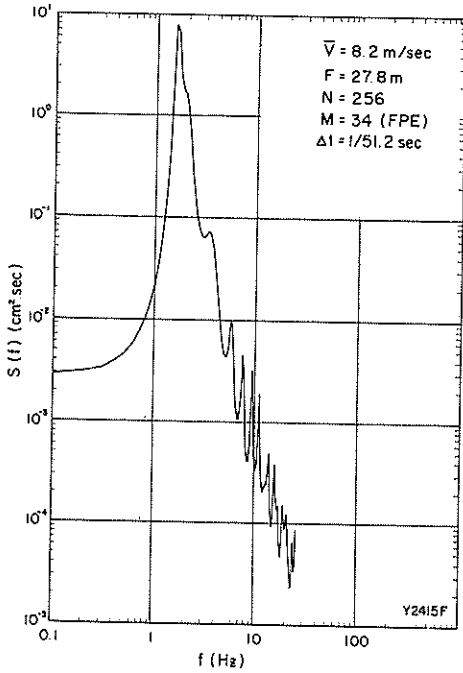


図-21 風波のスペクトル ($N=256$)

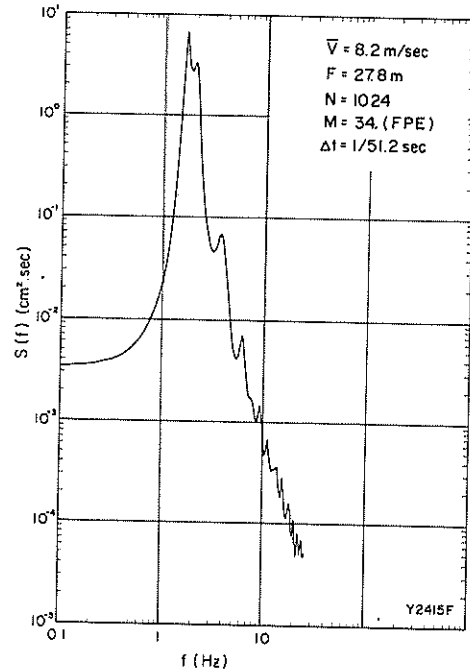


図-23 風波のスペクトル ($N=1024$)

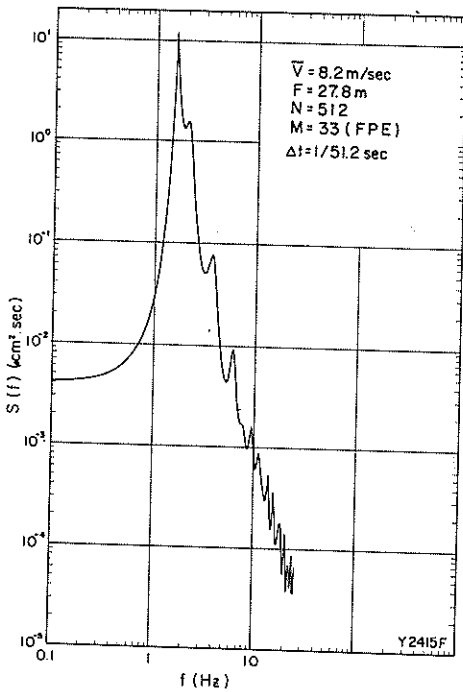


図-22 風波のスペクトル ($N=512$)

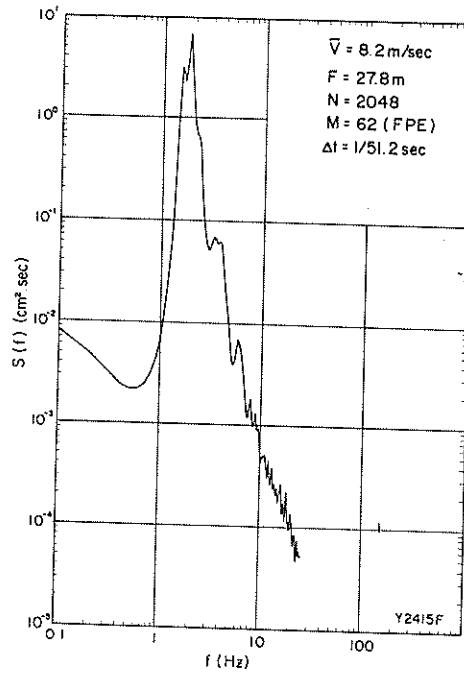


図-24 風波のスペクトル ($N=2048$)

sec), 1024 (20 sec), 2048 (40 sec) で、 $N=8192$ (160 sec) のケースは図-3 に示されている。

データ数が 256 から 8192 へと増加するにつれて FPE scheme で与えられる M のデータ数 N に対する割合は、それぞれ 0.133, 0.064, 0.033, 0.030, 0.008 とだんだん小さくなってゆく。図-21, 22 のように、 M/N が大きいほど高周波数の変動が激しくなりスペクトル推定の精度が落ちるのではないかと思われる。これまで述べてきたように、データが短いと分解能が悪くなる。分解能を良くしようとすれば、もともと高周波数の変動が大きいのにさらにそれが強調されることになる。図-16 のように、風波のピークの形まで変わることもあり得るので、データが短い場合の予測誤差フィルターの数の決定はかなりむずかしいと言わねばならないだろう。

もっとも図-21 の場合には $N=256$, $dt=1/51.2$ sec なので、FFT で計算するとすれば一次スペクトルの基本周波数バンド幅は $1/Ndt=0.2$ Hz となって、さらにフィルターをかけることになるので分解能は MEM と比べてかなり悪くなる。その意味では MEM はかなり分解能よくスペクトルが求まっていると言えるだろう。ただし、ピークがいくつかあっても、データが短くなるほど第 2 のピークまで出にくくなるのは、 N が小さくなるために、 M の値そのものが大きくなれないためと思われる。

4. まとめ

これまで言われてきた、MEM の長所であるといわれる分解能の良さと、短いデータからもスペクトルの計算が可能であるということについて、実験室の風波を使って調べてみた。

結論は次のとおりである。

1. データを短くすると、スペクトルの高周波数側の分散が大きくなり、精度が悪くなる傾向にある。
2. データが短いと、特に近接したピークをはっきりと分離するのがむずかしく、データが長いときに比べて分解能がかなり悪くなる (FPE scheme で予測誤差フィルターの数を決めた場合)。

予測誤差フィルターの数を多くしてゆけば、分解能を上げることはできるが、それと共にスペクトル全体の変動が激しくなって、精度の面からは悪くなる傾向にある。

従って、短いデータを MEM で計算した場合には、FPE scheme で求めた予測誤差フィルターの数ではいくつかピークのあるような現象では第二、第三のピークは分解能よく分離されていない可能性があることに注意すべきである。また、むやみに予測誤差フィルターの数を増すのも精度上から問題が生ずる。

3. データが十分に長ければ、FPE scheme で決めた予測誤差フィルターの長さで分解能、精度共に満足ゆく結果が得られる。

かなり鋭いピークの周波数は正確に求まるが、その高さは意味がなく、その下の面積がほぼ正確にパワーをあらわしている。

4. スペクトルの計算においては、得られたスペクトルの積分値と波の分散の値とがある基準 (たとえば 1% の誤差) 以内であるかどうかを絶えずチェックする必要がある。あまり周波数をあらく計算すると、積分値と分散の値に大幅なくい違いが生ずる。こうした場合には、鋭いピークが見逃されている可能性が大きい。

以上、MEM を実際に使用してきて問題となる点を列举してきた。MEM を使用する場合に最も困るのは、予測誤差フィルターの数を客観的に決めにくく、使用者の主観が入りやすいことである。その点で Akaike FPE の考えはスペクトルが自動的に求まるという意味で有利であり、データが十分に長ければ問題はない。大内・南雲¹⁴⁾ も述べているように、時系列がガウス過程であり、定常で A. R. 過程に従うような場合には、MEM は最もよいスペクトル密度関数の推定を与えるが、その時系列が A. R. 過程に従うという保証はない。一般にはデータが短いほど非定常性が出てくるので、MEM を使用する際にはこれらの点に注意しておかなければならない。なお、データの集録には岩崎通信機製の A-D 変換機 (DATAC-2000 B) を使用し、データの処理と計算には当研究所計算センターの電子計算機 (TOSBAC 5600/160) を使用している。

謝 辞

今回の実験と作図には水理研究室、土肥俊満、宮崎豊両技官の協力を得た。ここに感謝致します。

また、貴重な文献を提供して下さった、東京工業大学、日野幹雄教授に感謝致します。

参考文献

- 1) Burg, J.P.: Maximum entropy spectral analysis, paper presented at 37th Annual International Meeting, Soc. of Explor. Geophys., Oklahoma City, Okla., Oct. 31, 1967.
- 2) Lacoss, R.T.: Data adaptive spectral analysis methods, Geophysics, Vol. 36, 1971, pp. 661-675.
- 3) Smylie, D.E., Clarke, G.K.C. and Ulrych, T.J.: Analysis of irregular

rities in the earth's rotation, in Methods in Computational Physics, Vol. 13, Academic, New York 1973, pp. 391-430.

4) Fryer, G.T., Odegard M.E. and Sutton G.H.: Deconvolution and spectral estimation using final prediction error, Geophysics, Vol. 40, No. 3, June 1975, pp. 411-425.

5) 日野幹雄: 発達過程にある風波の非定常スペクトル, 第23回海岸工学講演会講演集, 1976年, pp. 313-316.

6) Burg, J.P.: The relationship between maximum entropy spectra and maximum likelihood spectra, Geophysics, Vol. 37, 1972, pp. 375-376.

7) Burg, J.P.: Recommendations concerning maximum entropy spectral estimation, (unpublished note).

8) Chen, W.Y., and Stegen, G.R.: Experiments with maximum entropy power spectra of sinusoids, J. Geophys. Res., Vol. 79, 1974, pp. 3019-3022.

9) Andersen, M.: On the calculation of filter coefficients for maximum entropy analysis, Geophysics, Vol. 39, 1974, pp. 69-72.

10) Akaike, H.: Fitting autoregressive models for prediction, Ann. Inst. Statist. Math, Vol. 22, 1969, pp. 243-247.

11) Akaike, H.: Statistical Predictor identification, Ann. Inst. Statist. Math, Vol. 22, 1970, pp. 203-217.

12) van den Bos, A.: Alternative interpretation of maximum entropy spectral analysis, IEEE Trans. Inform. Theory, IT-17, 1971, pp. 493-494.

13) Ulrych, T.J. and Bishop, T. N.: Maximum entropy spectral analysis and autoregressive decomposition, Review of Geophy. and Space Phy. Vol. 13, No. 1, 1975, pp. 183-200.

14) 大内 徹・南雲昭三郎: Maximum Entropy Methodの地震波解析への応用, 地震研究所彙報, Vol. 50, 1975年, pp. 359-384.

15) 加藤 始・鶴谷広一・土肥俊満・宮崎 豊: 流れの中の風波についての実験的研究(第2報), 港湾技術研究所報告, 第15巻, 第4号, 1976年12月, pp. 3-48.

16) Ulrych, T.J.: Maximum entropy power spectrum of truncated sinusoids, J. Geophys. Res., Vol. 77, 1972, pp. 1396-1400.

記号一覧表

a_{Mn}	: $M+1$ 次の予測誤差フィルターの $n+1$ 番目の成分
a_n^*	: a_n の共役複素数
D	: スペクトルのダイナミックレンジ
$E[\]$: 期待値
f_N	: ナイキスト周波数 ($= 1/2 dt$, Hz)
f_p	: 風波のピークの周波数 (Hz)
f_s	: 風波に加えた正弦波の周波数 (Hz)
f_s'	: スペクトルから求めた正弦波の周波数 (Hz)
F	: フェッチ (m)
h	: エントロピー率
i	: 虚数単位
M	: 予測誤差フィルターの数
N	: データ個数
P_M	: $M+1$ 次の予測誤差の分散
P_s	: 正弦波の部分を積分したパワー (cm^2)
$S(f)$: スペクトル密度 ($\text{cm}^2 \cdot \text{sec}$)
dt	: サンプリングタイム (sec)
\bar{U}	: 平均流速 (cm/sec)
\bar{V}	: 平均風速 (m/sec)
x_i	: データ列
\hat{x}_i	: x_i の予測値
Z	: $= \exp(i 2 \pi f dt)$
γ_s^2	: 加えた正弦波のパワー (cm^2)
λ_n	: ラグランジュの未定乗数
ϕ_n	: タイムラグが ndt の自己相関関数
π_n	: n 点フィルターの出力のパワーの平均

港湾技研資料 No. 274

1977・9

編集兼発行人 運輸省港湾技術研究所

発行所 運輸省港湾技術研究所
横須賀市長瀬3丁目1番1号

印刷所 株式会社 東京プリント

Published by the Port and Harbour Research Institute
Nagase, Yokosuka, Japan.