

岸本 勝

港湾技研資料

TECHNICAL NOTE OF
THE PORT AND HARBOUR RESEARCH INSTITUTE
MINISTRY OF TRANSPORT, JAPAN

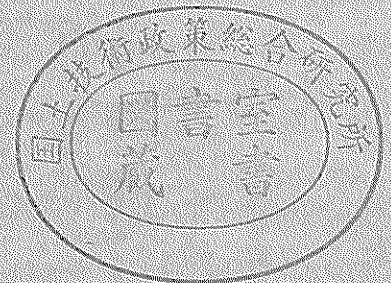
No. 148

Dec. 1972

三次元有限要素法の実用的プログラム法

岩崎 峯夫

運輸省港湾技術研究所



三次元有限要素法の実用的 プログラム法

目 次

要 旨	3
1. ま え が き	3
2. 使用した要素	3
3. SF 法による剛性マトリックス組立・解法	4
4. 本プログラムの仕様	5
5. あとがき	6
参 考 文 献	6

A Useful Programming Method of 3-Dimensional Finite Element Analysis

Mineo IWASAKI *

Synopsis

In order to solve a 3-dimensional problem by finite element method, a large stiffness matrix is required. A main storage of a computer is not enough for the request. So, auxiliary storages must be used. In conventional method, disks and direct access are used to assemble a complete stiffness matrix. This method takes much times to access and programming is difficult without those.

In this paper, a new method is described. Magnetic tapes and sequential access are used to assemble and to solve a complete stiffness matrix. In the new method, named sequential file method, the procedure that contributions to a nodal point are calculated and add the contributions is iterated. Therefore, row elements of the complete stiffness matrix can be output sequentially to magnetic tapes each the iteration and so, the field for superposition of finite element stiffness matrices must not occupy the main storage or disks. To solve the complete matrix stored on magnetic tapes, SOR iteration method is applied easily.

This programming method can solve 5,000 nodal-points 3-dimensional problem using 32K storage computer and magnetic tapes.

* Member of the Dredger and Construction Equipment Laboratory, Machinery Division

三次元有限要素法の実用的 プログラム法

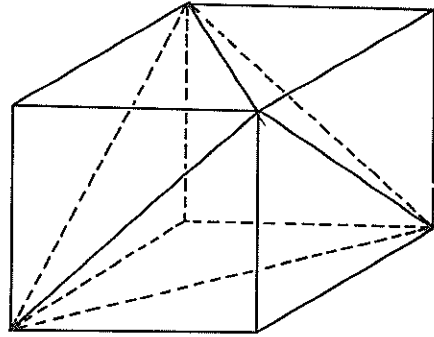
岩崎 峯夫*

要 旨

有限要素法が連続体の応力、ひずみの解析に用いられるようになってきたが、特に三次元物体の有限要素解析においては、非常に大きな剛性マトリックスが要求され、電子計算機の内部コアだけでは収容することができない。従来の方法による剛性マトリックスの組立法では、外部記憶装置との入出力はダイレクトアクセスを用いなければならず、時間的に効率が悪く実用に供されているプログラムはあまり発表されていない。本報告で発表する方法では、剛性マトリックス組立法が一般の方法と異なり、外部記憶装置との入出力にシーケンシャルアクセスを用い、時間的に高効率に処理している。本報告のプログラムの基本的手法は、すでに発表した港研報告¹⁾を基礎としたものである。

1. まえがき

有限要素法が連続体の応力、ひずみ解析に用いられるようになってきたが、特に三次元有限要素解析の場合、大きな容量の電子計算機が要求されると同時に、内部コアの効果的利用法と外部記憶装置との効果的入出力法が開発されなければならない。本報告では、構造全体の剛性マトリックス組立てに、すでに港研報告¹⁾に発表したS/F法を用い、外部記憶装置との入出力を効果的に行ない、外部記憶装置を用いて連立方程式を解く方法を採用した。その結果、大容量の問題に対して、十分実用できるのでこの手法を報告する。



2. 使用した要素

本報告で取り扱った要素は、図-1に示す六面体、8節点要素で、説明のため長方形であるが、かならずしも長方形である必要はない。図-1で示すように、この六面体要素を5個の四面体要素から組み立てる方法には二通りある²⁾。

本プログラムでは、四面体の剛性マトリックスを重ね合わせて、六面体の剛性マトリックスを求めているが、応力値の精度を向上させるために、一つの六面体要素を二通りの方法で10個の四面体要素に自動分割し、それらの四面体の剛性マトリックスを重ね合わせ、平均して、六面体要素の剛性マトリックスを求めている。この方法は、応力値の精度を向上させるのみならず次のような利点がある。

今、仮りに六面体要素に等分布荷重を一軸方向に与える場合、四面体要素分割を一通りで計算する場合と、二通りで計算し平均する場合とは、換算節点力が異なる。

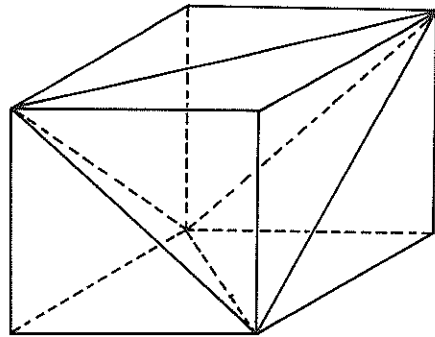


図-1 六面体要素の二通りの分割法

図-2にそれを示す。図-2の(A)が一通りの分割によるもので、三角形ABC、BDCに作用する各荷重を各三角形の三頂点の節点力に等分するので、(A)の

* 機材部 作業船研究室

ような結果となり、四頂点の節点力は等しくなく、節点力データを入力するとき分割法を考慮する必要がある。図-2の(B)は、平均されているので、四辺形ABDCに作用する荷重を四頂点に等分すればよい。本報告のプログラムでは自動的に(B)のように分割する。プログラムのユーザは分割法を考慮することなく、四辺形に作用する荷重を4等分して節点力を与えることができる。

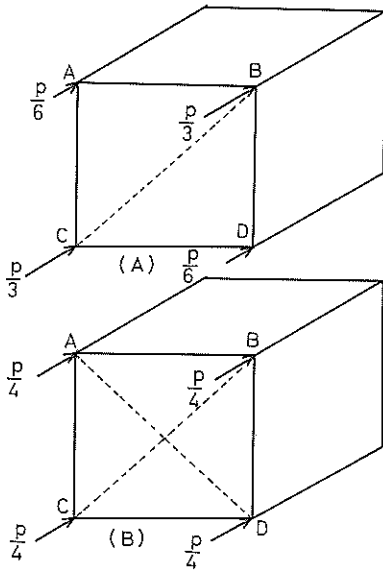


図-2 分割法と節点換算力の違い

10個の四面体要素に分割して平均剛性マトリックスを求める方法は、計算時間から考えると決して良いとは言えない。なぜなら、剛性マトリックスを作る時間が2倍必要になり、さらに剛性マトリックスの非零要素の数も増加し(表-1参照)連立方程式を解く場合も不利である。しかし、上述した利点のために、あえて、平均剛性マトリックス法を採用した。

表-1 節点を共有する要素と非零要素数の関係

節点を共有する四面体要素数	非零要素 3×3 マトリックスの数	
	二通り分割または、一通り分割の最大値	一通り分割の最小値
1	7	4
2	10	5
3	13	6
4	14	6
5	17	7
6	18	7
7	19	7
8	19	7

3. SF法による剛性マトリックスの組立て、解法

SF法の詳細については、すでに港研報告¹⁾に述べてある。この方法は、各要素の剛性マトリックスを求め、それを重ね合わせる一般的方法と異なり、全体の剛性マトリックスの各要素に対する寄与を計算する方法であり、各節点ごとに演算をして、全体の剛性マトリックスの各節点に対する行要素を求めて、シーケンシャルに内部コア、または外部記憶装置に出力する方法である。この方法は重ね合わせの場合を必要としないので、大容量の内部コア、またはダイレクトアクセス可能な外部記憶装置を必要とせず、ダイレクトアクセスをしないので時間的にもすぐれている。

全体の剛性マトリックスの節点に関する行要素を求めるには、二つの演算部分に分かれる。それは対角値を求める場合と非対角値を求める場合である。

a) 対角値を求める方法

構造全体の剛性マトリックスの節点*i*に関する対角値を求めるには、その節点*i*を共有している要素について(1)式の計算をすればよい。節点*i*を共有する要素のうちの一つの四面体要素の対角値は次の3×3のマトリックスで示される。

$$[K_{ii}] = [B_i]^T [D] [B_i] V \dots \dots \dots (1)$$

この計算を節点*i*を共有する四面体要素すべてについて行ない加え合わせれば節点*i*に関する対角値が求められる。

b) 非対角値を求める方法

節点*i*から放射している線分(四面体要素の稜)を共有する四面体要素について(2)式の計算を行ない、加え合わせれば、線分1本について計算が終わる。この線分他端の節点番号を*j*とすると次式で示される。

$$[K_{ij}] = [B_j]^T [D] [B_i] V \dots \dots \dots (2)$$

この計算により全体の剛性マトリックスの*i*行*j*列または*j*行*i*列の値が求められる。この計算を節点*i*から放射している線分すべてについて行なうと、節点*i*に関する剛性マトリックスの非対角値がすべて求められる。

平均剛性マトリックス法の場合、剛性マトリックスの非零要素の数は、各節点の回りの要素(節点を共有する要素)の数により異なり表-1のようになる。全非零要素の数は各節点に関する非零要素数を加えれば求められる。本プログラムでは、剛性マトリックスの対称性からほぼ半分の剛性マトリックスを組み立て、記憶している。また、非零要素の配列を示す索引は列の番号を示すのみで、3×3の非零マトリックスに1個の割合で付属し、索

引数は非零要素数のほぼ9分の1である。外部記憶装置を用いる場合の連立方程式の解法は、各節点に関する剛性マトリックスの行の要素と、その索引をシーケンシャルに2台の磁気テープに出力し、全体の剛性マトリックスのシーケンシャルファイルを作り、反復法(SOR法)で計算している。磁気テープは2台用いリワインドの時間を計算にあてている。また、バッファは2個取り、バッファの大きさも大きくとり、入出力の時間を非常に少なくしている。式(1)、(2)での変数は次のようにして示される²⁾。図-3に示す四面体要素の場合次の式で示される。ただ添字付の変数は、 $ijmp$ の順序に循環して得られる。

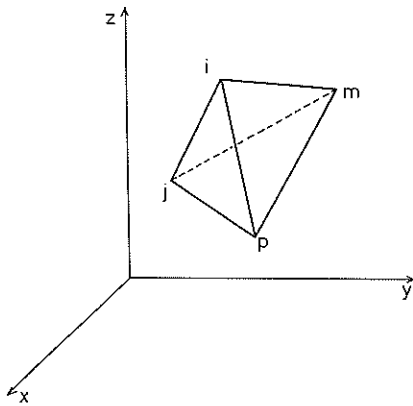


図-3 四面体要素の節点の順序

$$[B_i] = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_i & o & o \\ o & c_i & o \\ o & o & d_i \\ c_i & b_i & o \\ o & d_i & c_i \\ d_i & o & b_i \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3)$$

$$b_i = -det \begin{bmatrix} 1 & y_i & z_i \\ 1 & y_m & z_m \\ 1 & y_p & z_p \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4)$$

$$c_i = -det \begin{bmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_m & 1 & z_m \\ x_p & 1 & z_p \end{bmatrix} \dots\dots\dots (5)$$

$$d_i = -det \begin{bmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_m & y_m & 1 \\ x_p & y_p & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (6)$$

$$V = \frac{1}{6} det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{bmatrix} \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 x_i, y_i, z_i は i 点の座標値

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & \nu/(1-\nu) & o & o & o \\ & 1 & \nu/(1-\nu) & o & o & o \\ & & 1 & o & o & o \\ & & & 1 & o & o \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \\ & & & & & o \\ & & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \\ & & & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \\ & & & & & & & & \dots\dots\dots (8) \end{bmatrix}$$

E, ν はそれぞれ要素のヤング率とポアソン比。

4. 三次元プログラムの仕様

三次元プログラムを3種類作成した。それぞれ次の仕様を持っている。単一プログラムのフローチャートを図-4に示す。当研究所の電子計算機の記憶単位数は32Kである。

a) 単一プログラム1

このプログラムは、外部記憶装置をいっさい用いないプログラムで最大節点数216、最大要素数125である。

b) 単一プログラム2

このプログラムは、外部記憶装置を2台(MT)を用い、連立方程式を解く。最大節点数1,000、最大要素数729である。

c) 複数プログラム(オーバーレイプログラム)

このプログラムは、剛性マトリックス組立と、連立方程式、応力計算の二つのプログラムを分割し、外部記憶装置を利用して解くプログラムで、最大節点数1,500、最大要素数1,200である。

これらすべて、次の仕様をもつ。

剛性マトリックスは、半分組立、記憶する。要素のヤング率、ポアソン比、単位体積重量は、各要素ごとに指定できる。連立方程式解法は、SOR法である。剛性マトリックスが同じで、荷重、変位、支持条件の異なる場合は、剛性マトリックスを修正、再組立等を行わずに計算できる。

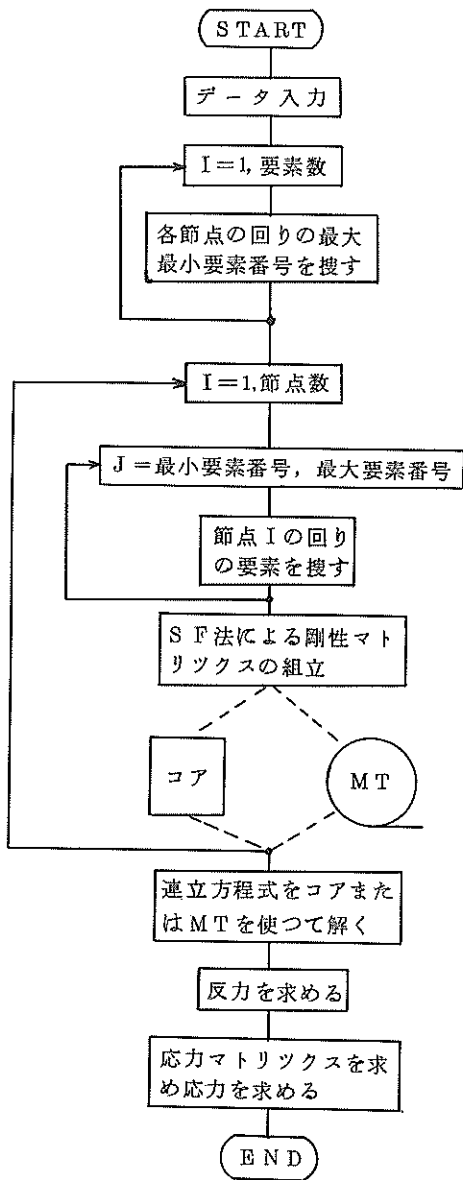


図-4 単一プログラムフローチャート

本プログラムの使用実績³⁾では、単一プログラム1で節点数216、六面体要素数125の問題を解くのに、連立方程式の反復を100回行い、約15分要した。単一プログラム2で節点数512、六面体要素数343の問題で、剛性マトリックスを組立するのに約14分要し、反復数200回の連立方程式解くのに約40分要した。

本プログラムの仕様は、当研究所での必要に合せてあるが、さらに大きな問題に対しては、節点、要素に関するデータを外部記憶装置に入れることにより拡張は容易である。図-5にそのフローチャートを示す。この方法で、当研究所の電子計算機を用いて、約5,000節点の問題を解くことが可能である。

5. あとがき

本プログラムでは、連立方程式解法に反復法を採用したが、直接法であるウエーブフロント法と、SF法とは、非常によく合うように思われるので、今後この方法についても検討する必要がある。

本報告の方法は、実用プログラムに大きな足がかりを与えるものであると信ずる。

(1972年9月30日受付)

参 考 文 献

- 1) 岩崎峯夫「剛性マトリックス組立の有効な一方法」港研報告 Vol. 11, ㉞1, pp151~162
- 2) O. C. ツィエンキーヴィッツ, Y. K. チューン原著「マトリックス有限要素法」邦訳培風館昭和45年
- 3) 石塚浩次「モルタルの掘削抵抗について」港研報告 Vol. 12, ㉞1

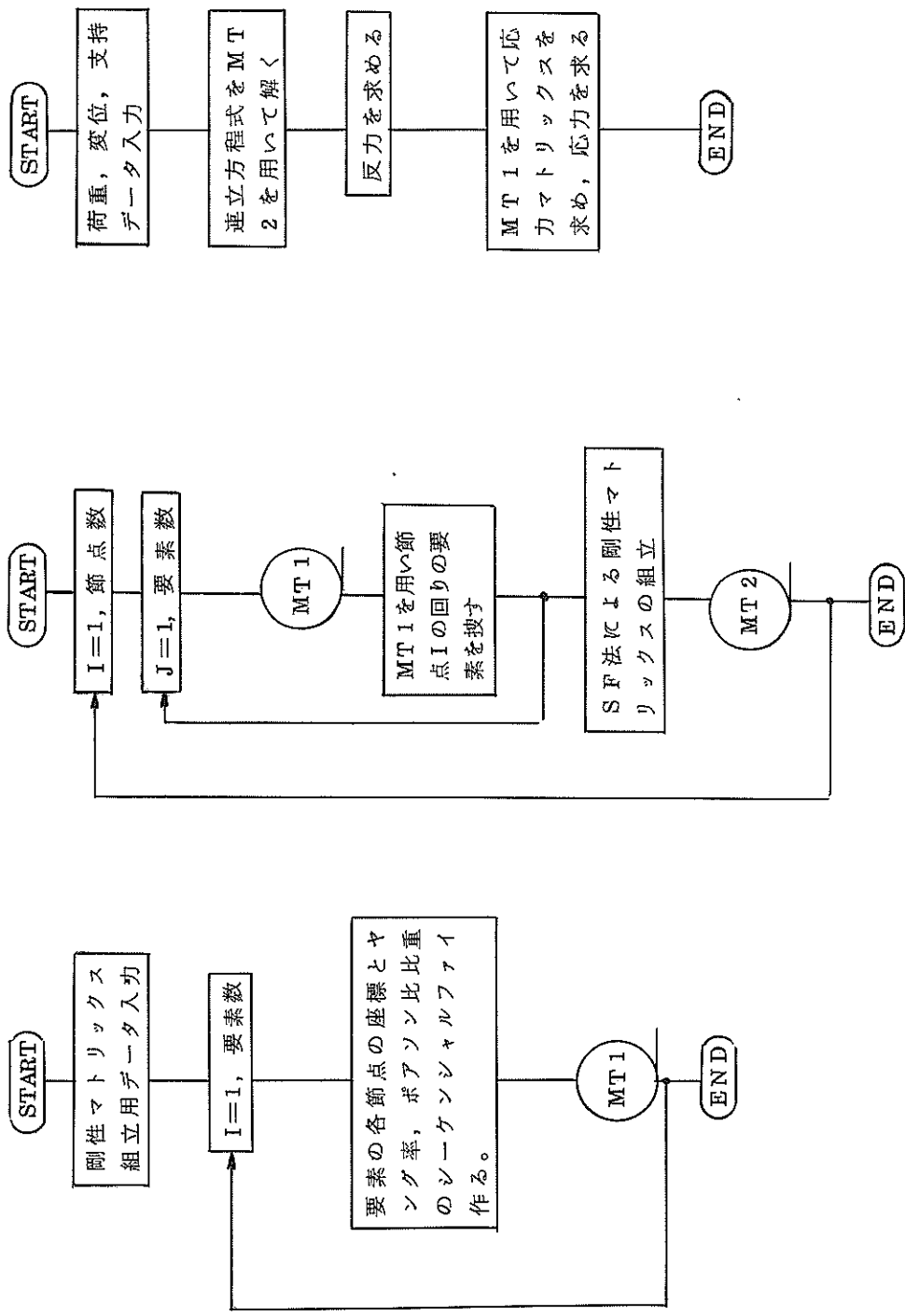


図 - 5 最大節点数 5,000 のフローチャート

港湾技研資料 No.148

1972・12

編集兼発行人 運輸省港湾技術研究所

発行所 運輸省港湾技術研究所
横須賀市長瀬3丁目1番1号

印刷所 日青工業株式会社

Published by the Port and Harbour Research Institute
Nagase, Yokosuka, Japan.