

国立研究開発法人海上・港湾・航空技術研究所

# 港湾空港技術研究所 報告

---

REPORT OF  
THE PORT AND AIRPORT RESEARCH  
INSTITUTE

---

Vol.60 No.1 June 2021

NAGASE, YOKOSUKA, JAPAN

NATIONAL INSTITUTE OF MARITIME,  
PORT AND AVIATION TECHNOLOGY

## 総目次

1. 波の遡上域における海浜地形変化に及ぼす潮汐変動の影響に関する検討  
伴野 雅之・栗山 善昭
2. 2019年台風15号による横浜港に襲来したうねり性の波浪  
田村 仁・川口 浩二・岩本 匠夢・藤木 峻
3. 富山湾・寄り回り波の力学機構  
田村 仁・川口 浩二・藤木 峻
4. 仮設被覆工の耐波安定性について  
鈴木 高二朗・久保田 博貴・田中 敦
5. パラペット後退型護岸に働く波圧に関する検討  
鈴木 高二朗・久保田 博貴・鶴田 修己
6. プレート境界断層デコルマ帯におけるスロースリップ発生メカニズムに関する研究  
杉山 友理・橋 伸也・森川 嘉之
7. MPM-剛体シミュレーションのための最小二乗法を用いた摩擦接触アルゴリズムの開発と開端杭の地盤への貫入挙動への適用  
中村 圭太・松村 聡・水谷 崇亮

## MPM-剛体シミュレーションのための 最小二乗法を用いた摩擦接触アルゴリズムの開発と 開端杭の地盤への貫入挙動への適用

中村 圭太\*・松村 聡\*\*・水谷 崇亮\*\*\*

### 要 旨

本研究では、粒子と剛体の間の相互作用をシミュレートするために、particle-to-surface 接触に基づいた MPM による新しい摩擦接触アルゴリズムを提案する。格子ベースの multivelocity field technique は、MPM でよく用いられる手法であるが、このようなシミュレーションを行うには以下のようないくつかの欠点がある。(1) 早期の誤接触を防ぎ、また、非貫入条件を満たすためには特別な追加処理が必要である。(2) 剛体の接触検出は、剛体を構成する粒子の配置に依存するため、その配置によっては接触検出のパフォーマンスが低下する。これらの問題を解決するために、提案アルゴリズムでは、particle-to-surface 接触に基づくペナルティ法を用いる。しかし、粒子が剛体表面に非常に接近することがあるため、物理量が粒子から剛体内にある格子節点に輸送されてしまう可能性がある。本研究では、重み付き最小二乗法を用いることで、形状関数を構築する際に partition-of-unity を損なうことなく、この問題を効果的に解決する。提案したアルゴリズムは、数値シミュレーションと解析解および FEM の結果を比較することで検証した。その結果、提案するアルゴリズムは、摩擦接触現象に対して妥当な解を得ることがわかった。

また、本解析手法の地盤工学問題への適用例として、開端杭の地盤への貫入問題を解いた。解析では、既往の実験の再現解析を行い比較・検証を行った。その結果、まだ改善点はあるものの、杭の支持力推定、及び開端杭の先端閉塞現象の解明に有効に活用できることが確認できた。

**キーワード：**MPM, 摩擦接触, 重み付き最小二乗法, ペナルティ法, 開端杭, 先端閉塞現象

- 
- \* 地盤研究領域 研究官
  - \*\* 地盤研究領域 主任研究官
  - \*\*\* 地盤研究領域 グループ長

〒239-0826 横須賀市長瀬 3-1-1 国立研究開発法人海上・港湾・航空技術研究所 港湾空港技術研究所  
電話：046-844-5057 Fax：046-844-0618 e-mail：nakamura-ke@p.mpat.go.jp

Development of frictional contact algorithm  
using weighted least squares for MPM–rigid body simulation  
and its application to behavior of open-ended pile driven into the ground

**Keita NAKAMURA\***  
**Satoshi MATSUMURA\*\***  
**Takaaki MIZUTANI\*\*\***

**Synopsis**

This study presents a new particle-to-surface frictional contact algorithm for the material point method (MPM) to simulate the interaction between material points and rigid bodies. Although a grid-based multivelocity field technique is a common method that works well with MPM, there are several disadvantages in developing such simulations: (1) The technique needs additional treatment to prevent early contact and satisfy the impenetrability condition. (2) The method performs poorly in the contact detection of rigid bodies, as it depends on the arrangement of their constituent material points. To overcome these problems, the proposed algorithm uses the penalty method based on particle-to-surface contact. However, the possibility of physical quantities being transferred from the particles to grid nodes located within the rigid bodies arises since a particle can be very close to the surface. The weighted least squares approximation could effectively handle this problem, without forfeiting the partition-of-unity property while constructing the shape function, and is thus incorporated into the MPM framework in this study. The proposed algorithm is validated by comparing numerical simulations with analytical solutions and FEM results. The numerical results show that the proposed algorithm produces reasonable results for frictional contact phenomena.

As an application of the proposed algorithm to the geotechnical problem, behavior of open-ended pile driven into the ground is simulated. In the simulations, we compare the computed results with existing experiments. As a consequence, the proposed algorithm can help to estimate the bearing capacity of piles and elucidate the plugged effect.

**キーワード** : MPM, frictional contact, weighted least squares, penalty method, open-ended pile, plugged effect

---

\* Researcher, Foundation Group, Geotechnical Engineering Department  
\*\* Senior Researcher, Foundation Group, Geotechnical Engineering Department  
\*\*\* Head, Foundation Group, Geotechnical Engineering Department  
3-1-1 Nagase, Yokosuka, 239-0826 Japan  
Phone: +81-46-844-5057 Fax: +81-46-844-0618 e-mail: nakamura-ke@p.mpat.go.jp

# 目 次

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 1   | はじめに   | 6  |
| 2   | MPM (Material Point Method) とは                     | 7  |
| 3   | MPM における重み付き最小二乗近似                                 | 8  |
| 3.1 | 重み付き最小二乗近似を用いた局所近似 (Local approximation)           | 8  |
| 3.2 | Partition of unity を用いた全体近似 (Global approximation) | 10 |
| 4   | MPM 離散化の概要   | 10 |
| 4.1 | 支配方程式  | 10 |
| 4.2 | 空間離散化  | 10 |
| 4.3 | 時間離散化  | 10 |
| 5   | 接触アルゴリズム   | 11 |
| 5.1 | 接触している粒子の形状関数とその勾配                                 | 11 |
| 5.2 | 垂直方向の接触力と剛体の速度                                     | 11 |
| 5.3 | 接線方向 (摩擦に伴う) の接触力                                  | 12 |
| 6   | 摩擦による接触を考慮した WLS-MPM の計算手順                         | 12 |
| 6.1 | 形状関数とその勾配  | 12 |
| 6.2 | 粒子から格子への物理量の輸送 (Particle-to-grid transfer)         | 12 |
| 6.3 | 節点速度の更新  | 13 |
| 6.4 | 格子から粒子への物理量の輸送 (Grid-to-particle transfer)         | 13 |
| 6.5 | 時間ステップの決め方   | 13 |
| 6.6 | MPM, WLS-MPM, および Hu et al. [2018] による手法の違い        | 13 |
| 7   | 数値シミュレーションによる解析手法の妥当性の確認                           | 13 |
| 7.1 | スライドボックス   | 14 |
| 7.2 | 傾斜面を転がる円盤  | 14 |
| 7.3 | べた基礎の支持力問題   | 15 |
| 8   | 解析手法の適用例: 開端杭の地盤への貫入                               | 17 |
| 9   | 結論と今後の課題   | 19 |
|     | 謝辞   | 20 |
|     | 参考文献   | 20 |

## 1 はじめに

メッシュフリー法は、固体力学の数値計算や解析に広く利用されている。これらの手法の大きな利点は、有限要素法 (FEM) ではメッシュが歪むような極めて大きな変形をシミュレートできることである。粒子法の代表的な手法の一つである MPM (Material Point Method; Sulsky et al. [1994, 1995]) は PIC 法 (Particle-in-Cell; Harlow, 1964) を拡張する形で開発された。MPM では、連続体をバックグラウンドメッシュ (背面格子) 内を移動する粒子で離散化する。速度や応力などの物理量は、粒子からバックグラウンドメッシュに形状関数を用いて輸送される (particle-to-grid transfer)。その後、バックグラウンドメッシュでは運動方程式が解かれ、格子節点で更新された速度に基づいて FEM と同様にメッシュが変形する。最終的に、このメッシュの変形に基づいて各粒子の物理量が更新される (grid-to-particle transfer)。なお、時間ステップの終了時には、変形したメッシュを元の状態に戻すため、FEM のようにメッシュが潰れることなく、大変形までシミュレート可能である。MPM シミュレーションの精度は、粒子-格子間の物理量の輸送 (particle-to-grid/grid-to-particle transfer) に大きく依存するため、これまでに多くの改良手法が提案されてきた。例えば、オリジナルの MPM (Sulsky et al. [1994]) では、形状関数の微分が連続ではないため、粒子がバックグラウンドメッシュの要素間を移動する際に誤差が生じる (cell-crossing problem)。Bardenhagen and Kober [2004] は、GIMP (Generalized Interpolation Material Point) 法を開発することでこれを解決した。Steffen et al. [2008] は、Smooth Particle Hydrodynamics (SPH; [Monaghan and Lattanzio, 1985]) 等で広く使用されているカーネル関数である B-スプライン関数を用いた MPM シミュレーションを行った。GIMP の拡張として、Sadeghirad et al. [2011] は Convected particle domain interpolation (CPDI) を開発した。これらの手法は、粒子-格子間の物理量の輸送の精度を向上させるが、角運動量は依然として保存されない [Jiang et al., 2015]。この問題を解決するために、Klár et al. [2016] は affine transfer [Jiang et al., 2015] を適用し、砂のシミュレーションを行なった。Hu et al. [2018] は、さらに、重みつき最小二乗近似 (WLS; weighted least squares) を用いて、より一般的な形式の affine transfer アルゴリズムを開発した。一方、Tran et al. [2019] は、移動最小二乗近似 (MLS; moving least squares) を適用し、要素内でのガウス求積を行う手法を開発した。

摩擦接触現象は、様々な工学問題において必要性が生じるため、MPM においても、これまでにいくつかの摩擦接触アルゴリズムが提案されてきた。Bardenhagen et al. [2000] によって提案された格子ベースの multivelocity field technique (節点において、2 物体の速度をそれぞれ分けて扱う) は、クーロン摩擦モデルを用いて摩擦挙動を表現した先駆的な研究である。Bardenhagen et al. [2000] はこのアルゴリズムに改良を加え、接触判定として接触面法線方向の圧縮力を考慮した。

また、計算量とコストを削減するために、local multimesh contact method [Ma et al., 2010] も提案された。しかし、Lemiale et al. [2010] が指摘するように、このアルゴリズム [Bardenhagen et al., 2000] は、速度などの物理量が同じ格子節点に輸送されたときに 2 つの物体が接触していると判定されるため、物体が実際に接触するより前に接触を検出してしまう問題がある。これは、特に影響範囲が大きい高次の形状関数を用いる場合に致命的となる。この問題を解決するために、Lemiale et al. [2010] と Nairn [2013] は体積勾配と粒子の位置を格子節点へ補完し、追加の接触判定基準を用いることで改善した。一方、Ma et al. [2014] は、ペナルティ関数を導入することで、接触検出の改善を図った。

これらの手法は接触アルゴリズムの精度を向上させるが、非貫入条件 (impenetrability condition; 2 つの物体は互いにオーバーラップしない) が破られる可能性がある。これは、粒子の運動はバックグラウンドメッシュを用いて陰的に解かれるため、格子の節点で非貫入条件を満たしていても、粒子についても同じように非貫入条件が満足されるとは限らないためである。Huang et al. [2011] はこの問題を解決するために、変形後の格子だけでなく時間ステップ開始時にリセットされた格子についても非貫入条件を課した。また、本問題に対処する簡単な方法の一つとして、ペナルティ法の適用がある。ペナルティ法は厳密には非貫入条件を満たさないため、制約としては弱いですが、非貫入条件が満足されるまで制約を課し続けることができるため、陰的に粒子の移動が解かれる MPM とは相性が良い。Hamad et al. [2017] は、ペナルティ法を用いて、CPDI [Sadeghirad et al., 2011] における接触判定法を改善した。ペナルティ法は簡単であるため広く用いられているが、計算結果はペナルティ係数の選択に大きく依存する。そのため、拡張ラグランジュ法 (Simo and Laursen [1992], Chen et al. [2017]) などの他のアプローチも提案されている。

上記の MPM の接触アルゴリズムは、連続体は物質点で構成されている。これに対して、2 つの物体のうち一方を点ではなく面で構成する接触アルゴリズムも研究されており、これは、比較的軟らかい材料と剛体との相互作用をシミュレーションするのに適している。このようなアルゴリズムは、MPM-FEM (Lian et al. [2011]; Chen et al. [2015]; Cheon and Kim [2018]) や、MPM-DEM [Liu et al., 2018] の連成シミュレーション等にも用いられる。Hu et al. [2018] は MPM と剛体の連成シミュレーションを行なっている。

本研究では、MPM と剛体間の摩擦接触を考慮可能なシンプルな手法を提案する。これまでのアルゴリズム (例えば、Bardenhagen et al. [2000]) では、バックグラウンドメッシュを用いて接触を検出していたが、提案するアルゴリズムでは粒子と剛体表面の間で直接ペナルティ法を用いて接触検出を行う (particle-to-surface contact algorithm)。そのため、影響範囲の大きい高次の形状関数であっても正確な接触検出が可能となる。しかし、この方法では、物理量が粒子から剛体内に位置する格子節点に輸送されてしまう可能性があり、形状関数の Partition of Unity を維持するには (物理量を過不足なく粒子から節点へ輸送するために必要)、そのような無効

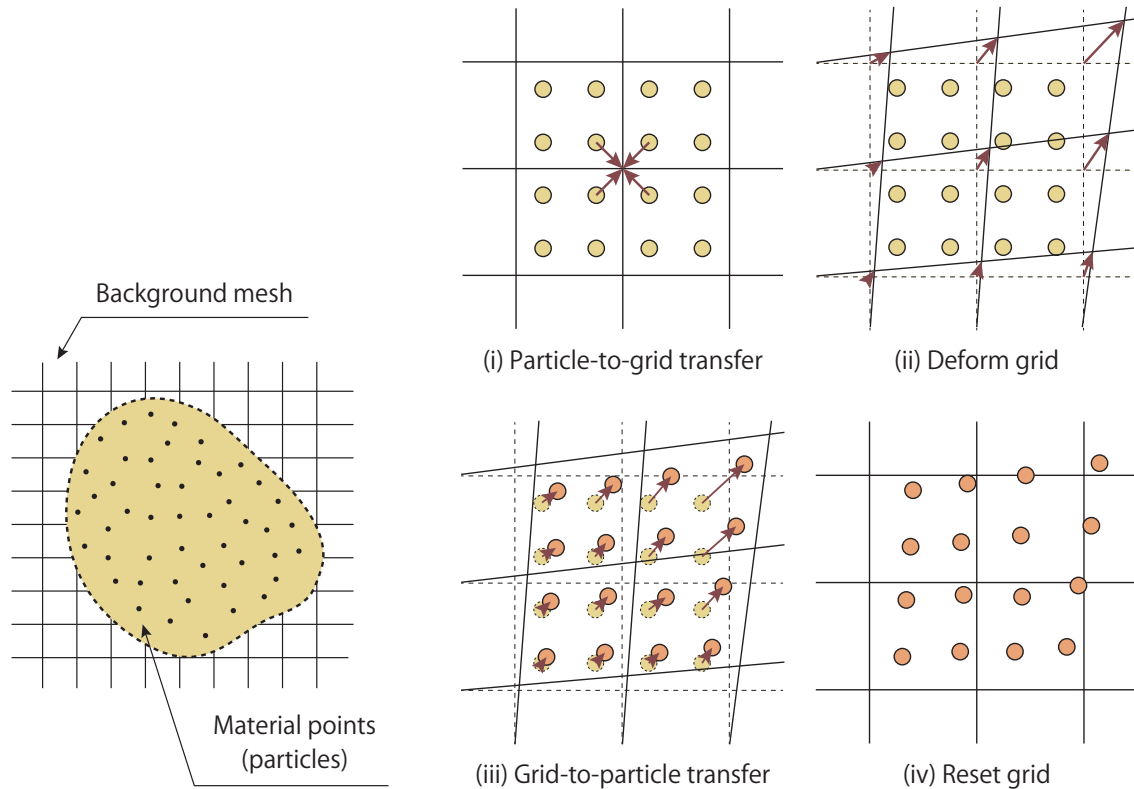


図 1: MPM の概略図

な節点を単純に除外するだけでは解決できない。そこで、本研究では、WLS (weighted least squares; 重み付き最小二乗法) 近似 [Hu et al., 2018] を用いて有効な節点に対して形状関数の再構築を行う。最小二乗原理を用いた形状関数の構築は、element-free Galerkin methods (EFG; Belytschko et al. [1994]) や reproducing kernel particle method (RKPM; Liu et al. [1995]) などの他のメッシュフリー法で広く用いられている。提案手法は particle-to-surface アルゴリズムに基づいているため、MPM-DEM や MPM-FEM の連成シミュレーションとも相性が良い。

本論文は以下のように構成されている。第 2 では、MPM 手法の概略について、第 3 節では MPM における WLS 近似の適用方法について、第 4 節では MPM の離散化方法について、第 5 節では新しい particle-to-surface アルゴリズムの詳細について、第 6 節では提案した摩擦接触解析法を用いた WLS-MPM の具体的な実装方法について説明する。第 7 節では、提案した定式化を 3 種類の数値シミュレーションによって検証する。第 8 節では、提案した摩擦接触解析法の工学分野への適用例について紹介する。最後に、第 9 節では、結論と今後の課題を述べる。なお、本論文の第 3-7 の内容については、Nakamura et al. [2021] に掲載されている。

本論文で使用されている表記と記号は以下の通りである。太字はベクトルと行列を表し、記号「 $\cdot$ 」は隣接する添字の 1 つの縮約を表す (例えば、 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i$ ,  $\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = c_{ij} a_j$ ,  $\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = c_{ij} d_{jk}$ )。記号「 $:$ 」は隣接する添字の 2 つの縮約を表し (例えば、 $\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ij}$ ,  $\mathbf{C} : \mathbf{A} = C_{ijkl} A_{kl}$ )、記号「 $\otimes$ 」

はテンソル積を表す (例えば、 $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = a_i b_j$ )。

## 2 MPM (Material Point Method) とは

MPM は粒子法の一つであるが、FEM のようなメッシュ (バックグラウンドメッシュ) も用いる。粒子とバックグラウンドメッシュの両者間でうまく物理量を輸送しあうことで計算を行うが、バックグラウンドメッシュは運動方程式を解くための物理量の一時保存場所に過ぎないため、連続体は粒子で離散化され、速度や応力などの物理量も粒子に保存される。具体的な手順の概略図を図 1 に示す。図にあるように、まず、速度や応力などの物理量が、粒子からバックグラウンドメッシュに形状関数を用いて輸送される (particle-to-grid transfer)。その後、バックグラウンドメッシュでは、運動方程式が解かれ、格子節点で更新された速度に基づいて FEM と同様にメッシュは変形する。最終的に、このメッシュの変形に基づいて各粒子の物理量が更新される (grid-to-particle transfer)。なお、時間ステップの終了時には、変形したメッシュを元の状態に戻すため、FEM のようにメッシュが潰れることなく、大変形までシミュレート可能である。

具体的なシミュレーションの例として、水の Dam break と砂~粘土の自由落下シミュレーションをそれぞれ図 2, 3 に示す。図にあるように、適切な構成則 (応力-ひずみ関係) を与えることで、様々な現象をシミュレートすることができる。特に、通常の FEM ではメッシュの潰れによって計算が困難な条件であっても計算可能である点がこの粒子法の利点の一つである。一方で、決して万能な数値解析手法ではなく、微

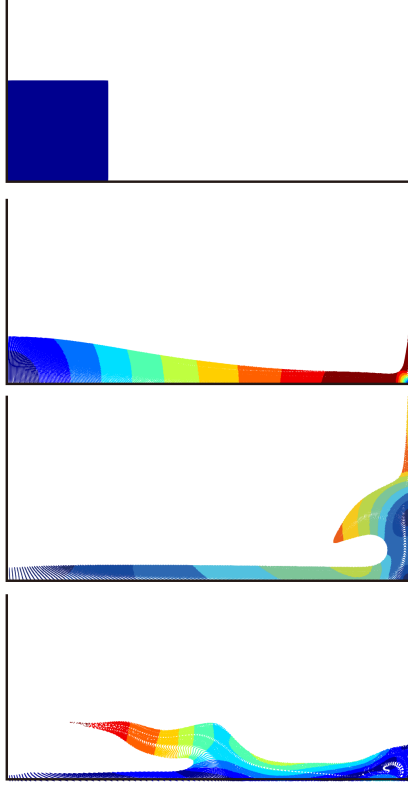


図 2: Dam break シミュレーション

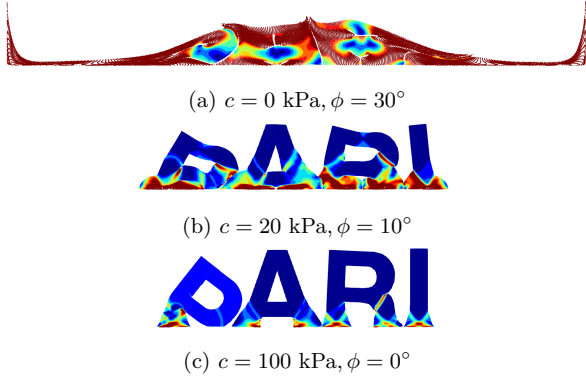


図 3: Drucker-Prager モデルを用いた砂～粘土の自由落下シミュレーション

小変形理論で収まる範囲であれば、通常の FEM を用いた方が精度や計算速度の両者において有利である。

### 3 MPM における重み付き最小二乗近似

本節では、Hu et al. [2018] によって提案された WLS (weighted least squares; 重み付き最小二乗法) を用いた MPM について紹介する。この手法は Hu et al. [2018] は MLS-MPM (moving least squares material point method) と名付けていたが、多項式の係数が MLS のような任意の点ではなく、固定点によって決まることから、本研究では WLS-MPM と呼ぶ。MPM における WLS 近似は、以下のように

(1) WLS を用いた局所近似 (local approximation) と、(2) Partition-of-unity 法 Shepard [1968] に基づく局所近似を組み合わせた全体近似 (global approximation) の 2 つの部分に分けられる。

#### 3.1 重み付き最小二乗近似を用いた局所近似 (Local approximation)

着目する領域  $\Omega$  において、座標  $\mathbf{x}_p$  にある粒子からなる連続体があるとする、WLS 近似では、関数  $u$  の  $\mathbf{x}_p$  付近の局所分布を次のように近似できる。

$$\tilde{u}_p(\mathbf{x}) = \sum_j^m c_j(\mathbf{x}_p) p_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \equiv \mathbf{c}(\mathbf{x}_p) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{p}$  は多項式の基底、 $\mathbf{c}$  は係数ベクトルである。例えば、3次元では、線形多項式は次のように表される。

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1, x, y, z], \quad m = 4 \quad (2)$$

ベクトル  $\mathbf{c}$  は、以下のような 2 乗誤差の和を最小化することで得られる。

$$J_p(\mathbf{c}) = \sum_i w_i(\mathbf{x}_p) [\mathbf{c}(\mathbf{x}_p) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_p) - u_i]^2 \quad (3)$$

ここで、 $w_i(\mathbf{x}_p) = w(\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_i)$  は重み関数、 $u_i$  はサンプル点  $\mathbf{x}_i$  における関数  $u$  の値である。重み関数は、 $\mathbf{x}_i$  から  $\mathbf{x}_p$  までの距離が大きくなるほど小さくなれば良く、B-spline 関数のようなよく知られた関数を適用することができる。ここで、 $w_i(\mathbf{x}_p) \neq 0$  を満たす局所領域  $\Omega_p$  を定義する (一般に MPM では直方体である)。この領域は、Element-free Galerkin (EFG; Belytschko et al. [1994]) 法や SPH 法 [Monaghan and Lattanzio, 1985] における粒子の支配領域とみなすこともできる。図 4 に示すように、格子節点は領域に固定されたサンプルポイント  $\mathbf{x}_i$  の役割を果たす。

式 (3) の  $J_p$  を最小化することで  $\mathbf{c}(\mathbf{x}_p)$  が得られる。

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}_p) = \sum_i u_i w_i(\mathbf{x}_p) \mathbf{q}_i(\mathbf{x}_p) \quad (4)$$

ここで、

$$\mathbf{q}_i(\mathbf{x}_p) = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}_p) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_p) \quad (5)$$

また、行列  $\mathbf{M}$  (moment matrix) は、

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}_p) = \sum_i w(\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_i) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_p) \otimes \mathbf{p}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_p) \quad (6)$$

である。式 (4) を式 (1) に代入すると、以下の式が得られる。

$$\tilde{u}_p(\mathbf{x}) = \sum_i \phi_i(\mathbf{x}) u_i \quad (7)$$

ここで、 $\phi_i(\mathbf{x})$  は以下のような WLS による形状関数である。

$$\phi_i(\mathbf{x}) = w_i(\mathbf{x}_p) \mathbf{q}_i(\mathbf{x}_p) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \quad (8)$$

この空間勾配  $\phi_i$  は、

$$\nabla \phi_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial \phi_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = w_i(\mathbf{x}_p) \mathbf{q}_i(\mathbf{x}_p) \cdot \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p)}{\partial \mathbf{x}} \quad (9)$$



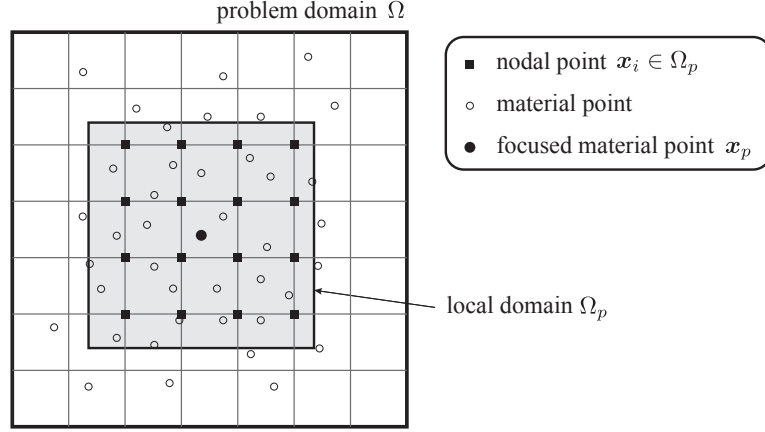


図4: 解析領域  $\Omega$ , 粒子 (物質点)  $\mathbf{x}_p$  の局所領域  $\Omega_p$ , 局所領域内の格子節点  $\mathbf{x}_i$ 。WLS 近似は  $\Omega_p$  内のサンプル点  $\mathbf{x}_i$  に対して行われる。

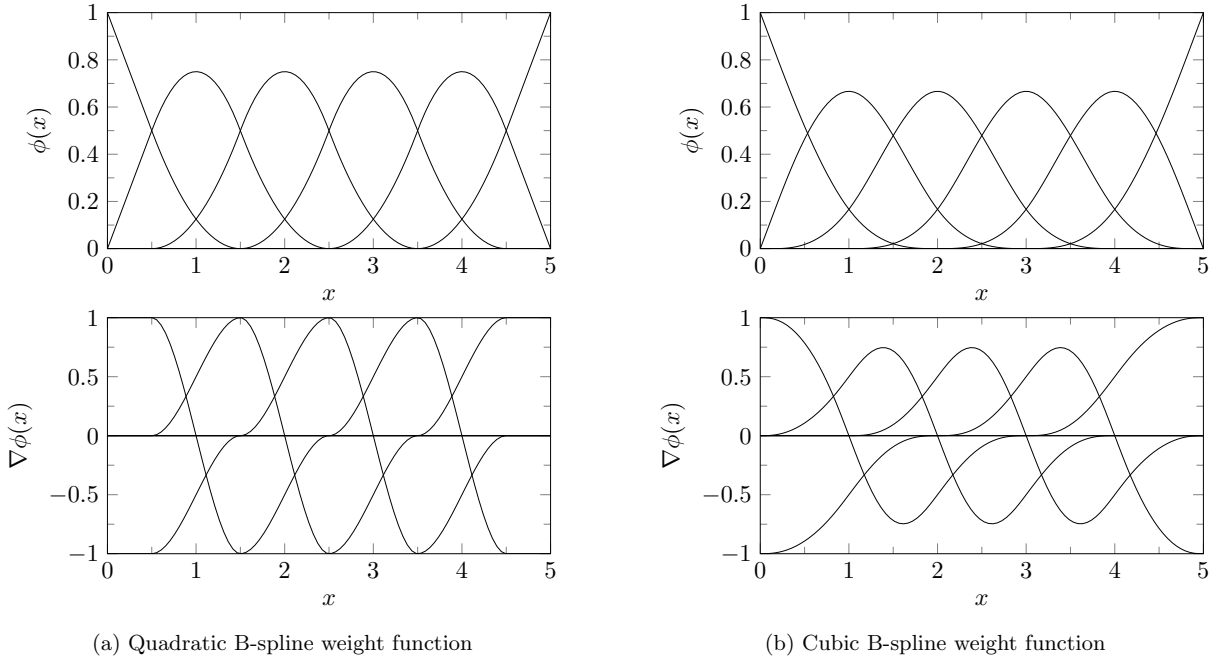


図5: 1次多項式とB-スプラインの重み関数を用いたWLSの形状関数とその勾配。

となる。

このWLS近似の重要な点は、節点  $\mathbf{x}_i$  を領域に固定されたサンプル点として局所的な近似に使用することである。これにより、他のメッシュフリー法のような近傍粒子探索の必要性がなくなり、計算コストが大幅に削減される。さらに、係数  $\mathbf{c}$  が  $\mathbf{x}$  ではなく  $\mathbf{x}_p$  に依存することで、式 (1) の  $\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p)$  のみが  $\mathbf{x}$  に依存することになり、勾配  $\nabla \phi_i(\mathbf{x})$  の表現が単純化される。実際、1次の多項式 (2) を式 (1) に適用すると、式 (9) における  $\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p)$  は一定になる。これにより、重み関数の勾配  $\nabla_{\mathbf{x}} w_i(\mathbf{x}_p)$  を計算する必要がなくなる [Hu et al., 2018]。

一般にWLS近似は、Kronecker delta property  $u(\mathbf{x}_i) \neq u_i$  を失う (節点での形状関数の値が1ではなくなる) ため、境界条件の扱いが困難となる。しかし、本定式化におけるWLS

近似では、次のようなアプローチでこの問題に対処できる。例えば、1次元の  $n$  次の多項式の基底を考えた場合、粒子の局所領域  $\Omega_p$  は、WLS近似のために少なくとも  $n+1$  個の節点が必要である。より具体的に、粒子が境界上に位置するときに領域  $\Omega_p$  内の節点数が  $n+1$  であれば、 $n$  次の多項式近似が関数  $u$  を正確に補間することになるため、形状関数の値は境界上に位置している粒子に支配される。結果として、図5に示すように、境界上ではKronecker delta propertyが満足することになる。このように、WLS-MPMは、他のメッシュフリー法 (例えば Mukherjee and Mukherjee [1997]) のように境界で特別な処理を必要とせず、オリジナルのMPMと同様に境界条件を扱うことができる。

### 3.2 Partition of unity を用いた全体近似 (Global approximation)

ここで、 $\Omega_p$  における局所近似  $\tilde{u}_p(\mathbf{x})$  が揃ったため、続いて、 $u$  の局所近似をつなぎ合わせ、領域全体での近似を構築する。局所近似は重なり合っており、一般的に互いに連続していないため、適切な手順をもってつなぎ合わせる必要がある。本研究では、重み付き平均により局所近似を全領域に拡張できる Shepard 法 [Shepard, 1968] を用いる (図 6)。Shepard の内挿関数  $\psi_p$  を定義すると、全体近似は次のように表される。

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_p \psi_p(\mathbf{x}) \tilde{u}_p(\mathbf{x}) = \sum_p \psi_p(\mathbf{x}) \mathbf{c}(\mathbf{x}_p) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \quad (10)$$

ここで、

$$\psi_p(\mathbf{x}) = \frac{w(\mathbf{x}_p - \mathbf{x})}{\sum_q w(\mathbf{x}_q - \mathbf{x})} \quad (11)$$

例えば、Sulsky et al. [1994] と Hu et al. [2018] は、重み関数として粒子の質量によって重み付けをした関数を用いている。

$$\psi_p(\mathbf{x}) = \frac{w(\mathbf{x}_p - \mathbf{x}) m_p}{\sum_q w(\mathbf{x}_q - \mathbf{x}) m_q} \quad (12)$$

WLS-MPM とオリジナルの MPM の大きな違いは、WLS-MPM では、関数の再構成に  $u_p$  ではなく、局所近似  $\tilde{u}_p(\mathbf{x})$  を用いることである。つまり、オリジナル MPM では、 $\tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_p \psi_p(\mathbf{x}) u_p$  を用いて、式 (12) を適用している。

## 4 MPM 離散化の概要

本節では、MPM の離散化の概要を簡単に説明する。本手法とオリジナルの MPM との違いは、WLS による形状関数を定式化に適用したことのみである。

### 4.1 支配方程式

領域  $\Omega$  において、空間表示で力のつり合い式は次のように与えられる。

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} \quad (13)$$

ここで、 $\rho$  は密度、 $\mathbf{b}$  は単位質量あたりの体積力、 $\boldsymbol{\sigma}$  はコーシー応力、記号上の  $\dot{\quad}$  は物質時間微分を表す。境界条件は、

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{on } \partial\Omega_t \quad (14)$$

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} \quad \text{on } \partial\Omega_v \quad (15)$$

であり、記号上の  $\bar{\quad}$  は与えられた境界上での値を表す。 $\mathbf{n}$  は、境界表面上の単位法線ベクトルである。

力のつり合い式の弱形式は以下となる。

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\eta} \cdot \rho \dot{\mathbf{v}} dV = \int_{\Omega} \nabla \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\sigma} dV + \int_{\Omega} \boldsymbol{\eta} \cdot \rho \mathbf{b} dV + \int_{\partial\Omega_t} \boldsymbol{\eta} \cdot \bar{\mathbf{t}} dA \quad (16)$$

ここで、 $\boldsymbol{\eta}$  は任意のベクトル値の試行関数である。なお、MPM では質量保存が自動的に満たされる [Sulsky et al., 1994]。

### 4.2 空間離散化

式 (16) から、連続体の領域は局所領域  $\Omega_p$  に分割される。

$$\begin{aligned} \sum_p \int_{\Omega_p} \boldsymbol{\eta} \cdot \rho \dot{\mathbf{v}} dV &= \sum_p \int_{\Omega_p} \nabla \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\sigma} dV \\ &+ \sum_p \int_{\Omega_p} \boldsymbol{\eta} \cdot \rho \mathbf{b} dV + \sum_p \int_{\partial\Omega_{tp}} \boldsymbol{\eta} \cdot \bar{\mathbf{t}} dA \end{aligned} \quad (17)$$

WLS 近似により、節点速度  $\mathbf{v}$  と節点試行関数  $\boldsymbol{\eta}$  から、それぞれ速度  $\mathbf{v}$  と試行関数  $\boldsymbol{\eta}$  を補間し、以下のように表すことができる。

$$\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}}_p(\mathbf{x}) = \sum_i \phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{v}_i \quad (18)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \tilde{\boldsymbol{\eta}}_p(\mathbf{x}) = \sum_i \phi_i(\mathbf{x}) \boldsymbol{\eta}_i \quad (19)$$

したがって、局所領域  $\Omega_p$  に対する式 (17) は次のようになる。

$$\begin{aligned} \sum_i \boldsymbol{\eta}_i \cdot \sum_j \left[ \int_{\Omega_p} \phi_i \phi_j \rho dV \right] \dot{\mathbf{v}}_j \\ = \sum_i \boldsymbol{\eta}_i \cdot \left[ \int_{\Omega_p} \nabla \phi_i \cdot \boldsymbol{\sigma} dV + \int_{\Omega_p} \phi_i \rho \mathbf{b} dV + \int_{\partial\Omega_{tp}} \phi_i \bar{\mathbf{t}} dA \right] \end{aligned} \quad (20)$$

$\boldsymbol{\eta}_i$  は任意の値を取り得るから次式を得る。

$$\sum_j m_{ij} \dot{\mathbf{v}}_j = \mathbf{f}_i^{\text{int}} + \mathbf{f}_i^{\text{ext}} \quad (21)$$

ここで、

$$m_{ij} = \sum_p \int_{\Omega_p} \phi_i \phi_j \rho dV = \sum_p m_p \phi_i(\mathbf{x}_p) \phi_j(\mathbf{x}_p) \quad (22)$$

$$\mathbf{f}_i^{\text{int}} = \sum_p \int_{\Omega_p} \nabla \phi_i \cdot \boldsymbol{\sigma} dV = \sum_p V_p \nabla \phi_i(\mathbf{x}_p) \cdot \boldsymbol{\sigma}_p \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i^{\text{ext}} &= \sum_p \left[ \int_{\Omega_p} \phi_i \rho \mathbf{b} dV + \int_{\partial\Omega_{tp}} \phi_i \bar{\mathbf{t}} dA \right] \\ &= \sum_p \phi_i(\mathbf{x}_p) m_p \mathbf{b}_p + \bar{\mathbf{f}}_i \end{aligned} \quad (24)$$

である。 $m_{ij}$  は整合質量マトリクス (consistent mass matrix) と呼ばれる。MPM では、計算の単純化のため、整合質量マトリクスの代わりに集中質量マトリクス (lumped mass matrix) を使用する。集中質量マトリクスは対角行列であり、対角線上の各要素は整合質量マトリクスの対応する行の和である。

$$m_i = \sum_p \int_{\Omega_p} \phi_i \rho dV = \sum_p m_p \phi_i(\mathbf{x}_p) \quad (25)$$

### 4.3 時間離散化

式 (21) に前進オイラー法を用いて時間離散化し、式 (25) の集中質量マトリクスを用いれば次式を得る。

$$\mathbf{v}_{i,n+1} = \mathbf{v}_{i,n} + \Delta t \frac{\mathbf{f}_{i,n}^{\text{int}} + \mathbf{f}_{i,n}^{\text{ext}}}{m_{i,n}} \quad (26)$$

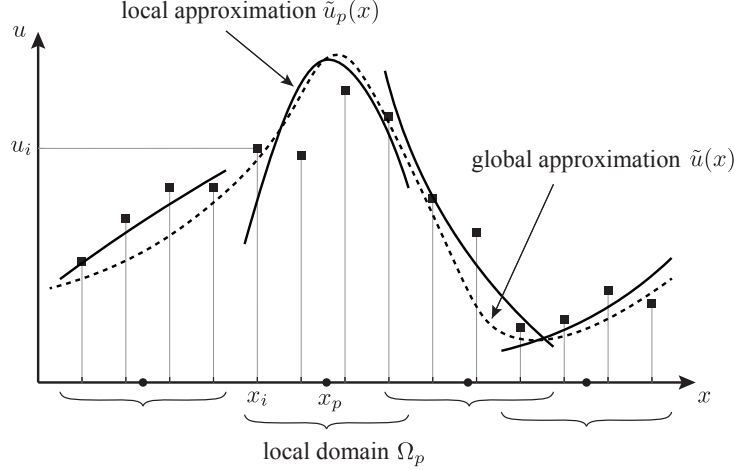


図 6: 局所近似から再構築した全体近似。

ここで、添え字  $n$  は時間ステップを表し、 $\Delta t = t_{n+1} - t_n$  となる。

## 5 接触アルゴリズム

本節では、MPM-剛体連成シミュレーションのためのペナルティ法に基づく新しい接触アルゴリズムを提案する。ペナルティ法は厳密に非貫入条件 (impenetrability condition; 2つの物体は互いにオーバーラップしない) は満たさないが、その簡便さから数値計算に広く応用されている。提案するアルゴリズムの手順は以下の通りである。(1) 最初に、particle-to-surface 接触アルゴリズムに従って、法線方向の接触力  $\mathbf{f}^{\text{c,nor}}$  を粒子で計算し、その後、その力を格子節点に輸送する。この方法は、純粋な格子ベースのアルゴリズム (例えば Bardenhagen et al. [2000]) と比較して、特に高次の形状関数を使用する場合には、より正確な接触検出が可能である。しかし、この場合、粒子が剛体表面に極めて近くまで接近するため、物理量が粒子から剛体内にある格子節点に輸送される可能性がある。この問題に対しては、形状関数を構築する際に、剛体内の節点を除外し、重み付き最小二乗法で形状関数を再構築することで対処する。局所領域  $\Omega_p$  で WLS 近似を行えば、Partition of Unity は保持されるため、粒子-格子間の物理量の伝達を適切に行うことができる。(2) 法線方向の接触力とは異なり、クーロン摩擦に基づく厳密な摩擦制約を満たすために、接線方向成分  $\mathbf{f}^{\text{c,tan}}$  を格子節点で直接計算する。(3) 式 (26) における節点速度の更新は、計算された接触力  $\mathbf{f}_i^{\text{c}} = \mathbf{f}_i^{\text{c,nor}} + \mathbf{f}_i^{\text{c,tan}}$  を用いてさらに修正する必要がある。以上の詳細な説明は以降の節で行う。

### 5.1 接触している粒子の形状関数とその勾配

剛体に接触している粒子は、粒子の局所領域  $\Omega_p$  と剛体が重なるため、形状関数とその勾配を適切に処理する必要がある。図 7 に示すように、剛体内の格子節点は無効化 (inactive)、すなわち形状関数 (式 (8) と (9)、または式 (37) と (38)) の構築の際は除外する必要がある。ただし、粒子の移動を適切

に表現するために、例外として接触した粒子を囲む格子節点については、剛体内にあっても有効化 (active) する。

### 5.2 垂直方向の接触力と剛体の速度

法線方向の接触力は、粒子  $p$  と剛体表面の間の距離に基づいて計算される。距離  $d_p$  (図 8) を用いて、接触距離  $d$  を次のように求めることができる。

$$d = d_p - d_0, \quad (27)$$

ここで、 $d_0$  は接触判定における閾値である ( $d = d_p - d_0 < 0$  の場合、接触が発生する)。この閾値は、 $2l_p$  を粒子径とすると、 $l_p$  で与えることができる。1次元では、例えば  $N_p$  個の粒子が  $h$  の間隔の格子の間に並んでいる場合、粒子径は  $2l_p = h/N_p$  となる。厳密には、粒子サイズは現在の粒子サイズでなければならないが、また、粒子の形状も球形ではないが (例えば、2次元では長方形)、計算のしやすから、ここでは初期の粒子径を使用し、球形の粒子を用いる。なお、効率的に接触している粒子を見つけるには、局所領域  $\Omega_p$  内に無効化されている節点が存在する粒子のみを、式 (27) を用いてチェックすれば良い。

法線方向の接触力は、貫入量  $d$  に基づいて次のように計算される。

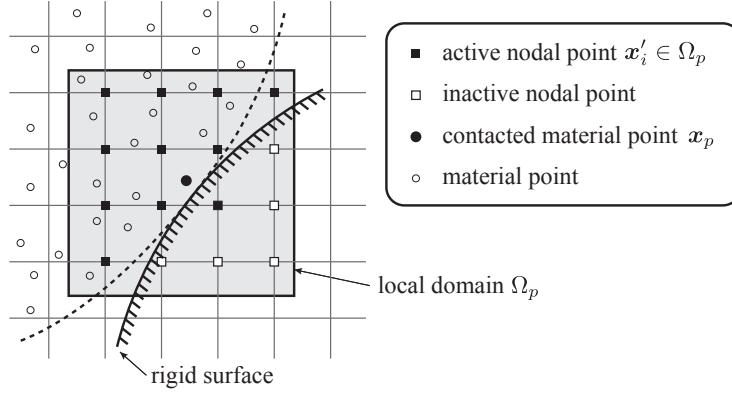
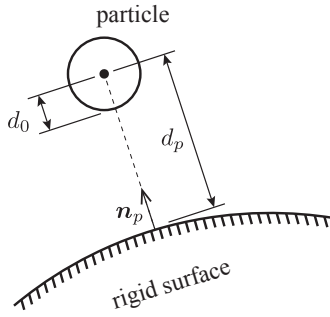
$$\mathbf{f}_p^{\text{c,nor}} = -k^{\text{nor}} d \mathbf{n}_p, \quad (28)$$

ここで  $k^{\text{nor}}$  は、材料の剛性に依存するペナルティ係数である。節 7.1 での数値シミュレーションでも示されているように、計算結果はペナルティ係数  $k^{\text{nor}}$  に大きく依存する。適切なペナルティ係数を得るには、ペナルティ法に基づく他の方法と同様に感度解析等が必要である。

最後に、接触している粒子から、法線方向の接触力  $\mathbf{f}_i^{\text{c,nor}}$  と剛体の速度  $\mathbf{v}_i^{\text{rigid}}$  が以下のように輸送される。

$$\mathbf{f}_i^{\text{c,nor}} = \sum_p \phi_i(\mathbf{x}_p) \mathbf{f}_p^{\text{c,nor}} \quad (29)$$

$$\mathbf{v}_i^{\text{rigid}} = \sum_p \psi_i(\mathbf{x}_p) \mathbf{v}_p^{\text{rigid}} \quad (30)$$


 図 7: 局所領域  $\Omega_p$  における形状関数の構築の際に除外する格子節点。

 図 8: Particle-to-surface 接触法の概略図。  $d_p - d_0 < 0$  のとき接触と判定される。

### 5.3 接線方向（摩擦に伴う）の接触力

粒子と剛体の間に摩擦がない場合、接線成分はゼロ ( $\mathbf{f}_i^{\text{c,tan}} = \mathbf{0}$ ) であるため、ノード  $i$  における接触力  $\mathbf{f}^{\text{c}}$  は、 $\mathbf{f}_i^{\text{c,nor}}$  となる。一方、摩擦による接触を考えた場合は、接線方向の成分はクーロン摩擦に基づいて評価する。まず、粒子の速度と剛体の速度が一致する粘着状態 (stick condition) の接線力を計算する。粒子と剛体表面の相対速度は、以下のように表される。

$$\hat{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_i^{\text{rigid}} \quad (31)$$

そのため、接線方向は以下となる。

$$\hat{\mathbf{v}}_i^{\text{tan}} = \hat{\mathbf{v}}_i - (\hat{\mathbf{v}}_i \cdot \mathbf{n}_i) \mathbf{n}_i \quad (32)$$

ここで  $\mathbf{n}_i = \mathbf{f}_i^{\text{c,nor}} / \|\mathbf{f}_i^{\text{c,nor}}\|$  である。ゆえに、接線方向の力  $\mathbf{f}_i^{\text{stick}}$  は以下のように計算される。

$$\mathbf{f}_i^{\text{stick}} = -\frac{m_i \hat{\mathbf{v}}_i^{\text{tan}}}{\Delta t} \quad (33)$$

クーロン摩擦を考慮すると、次のような接線力（摩擦力）が導かれる。

$$\mathbf{f}_i^{\text{c,tan}} = \min(\mu \|\mathbf{f}_i^{\text{c,nor}}\|, \|\mathbf{f}_i^{\text{stick}}\|) \frac{\mathbf{f}_i^{\text{stick}}}{\|\mathbf{f}_i^{\text{stick}}\|} \quad (34)$$

なお、上の粘着条件の際の力は、剛体の運動が制御され、与えられていることを前提に計算されている (one-way coupling)。

したがって、MPM と剛体の双方向の連成解析を行うためには、別の形式が適切である。例えば、最も簡単な形としては、 $\mathbf{f}_i^{\text{stick}} = -k^{\text{tan}} \hat{\mathbf{v}}_i^{\text{tan}} \Delta t$  が考えられる。ここで、 $k^{\text{tan}}$  は接線方向のパナルティ係数を表す。より詳細な実装については、例えば Wang and Chan [2014] が参考になる。

## 6 摩擦による接触を考慮した WLS-MPM の計算手順

この節では、摩擦による接触を考慮した WLS-MPM の詳細な計算手順を紹介する。

### 6.1 形状関数とその勾配

重み関数  $w$  については、本研究では 3 次の B-スプライン関数を使用する。

$$w_i(\mathbf{x}) = N\left(\frac{x-x_i}{h}\right) N\left(\frac{y-y_i}{h}\right) N\left(\frac{z-z_i}{h}\right) \quad (35)$$

ここで  $h$  は格子間隔で  $N$  は以下のように定義される。

$$N(\xi) = \frac{1}{6} \begin{cases} 3|\xi|^3 - 6|\xi|^2 + 4 & 0 \leq |\xi| < 1 \\ (2 - |\xi|)^3 & 1 \leq |\xi| < 2 \\ 0 & 2 \leq |\xi| \end{cases} \quad (36)$$

位置  $\mathbf{x}_{p,n}$  における形状関数 (8) とその勾配 (9) は、それぞれ次のように表される。

$$\phi_i(\mathbf{x}_{p,n}) = w_i(\mathbf{x}_{p,n}) \mathbf{q}_i(\mathbf{x}_{p,n}) \cdot \mathbf{p}_0 \quad (37)$$

$$\nabla \phi_i(\mathbf{x}_{p,n}) = w_i(\mathbf{x}_{p,n}) \mathbf{q}_i(\mathbf{x}_{p,n}) \cdot \nabla \mathbf{p}_0 \quad (38)$$

ここで  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{p,n})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{p,n}}$  である。Hu et al. [2018] でも指摘されているように、WLS-MPM では、形状関数の空間勾配  $\nabla \phi_i$  を計算する際に、重み関数の空間勾配  $\nabla w_i(\mathbf{x})$  で計算する必要がないため、計算コストを削減することができる。

### 6.2 粒子から格子への物理量の輸送 (Particle-to-grid transfer)

式 (26) を解くためには、質量マトリクス  $m_i$ 、内力ベクトル  $\mathbf{f}_i^{\text{int}}$ 、外力ベクトル  $\mathbf{f}_i^{\text{ext}}$  をそれぞれ式 (25), (23), (24)

で計算する必要がある。式 (26) の残りの項  $\mathbf{v}_{i,n}$  は全体近似 (global approximation) によって評価することができる (節 3.2 参照)。

$$\mathbf{v}_{i,n} = \tilde{\mathbf{v}}_n(\mathbf{x}_i) = \sum_p \psi_p(\mathbf{x}_i) \mathbf{C}_{p,n} \cdot \mathbf{p}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{p,n}) \quad (39)$$

ここで  $\mathbf{C}_{p,n}$  は  $d \times m$  の係数マトリクスである ( $d$  は解析の次元)。

粒子が剛体と接触している場合、それに対応する法線方向の接触力  $\mathbf{f}_i^{c,nor}$  と剛体の速度  $\mathbf{v}_i^{rigid}$  も、それぞれ式 (29) と式 (30) を  $t = t_n$  のときの値を用いて計算する必要がある。

### 6.3 節点速度の更新

節点速度  $\mathbf{v}_i$  は、式 (26) を用いて更新される。接触が検出された場合、すなわち法線方向の接触力が節点に輸送された場合、式 (26) で更新された節点速度に基づいて、クーロンモデル (式 (34) 参照) で接線方向 (摩擦) の接触力  $\mathbf{f}_i^{c,tan}$  を計算する必要がある。節点の接触力は  $\mathbf{f}_i^c = \mathbf{f}_i^{c,nor} + \mathbf{f}_i^{c,tan}$  として求めることができる。最後に、速度を次式のように更新する。

$$\mathbf{v}_{i,n+1} \leftarrow \mathbf{v}_{i,n} + \Delta t \frac{\mathbf{f}_i^c}{m_{i,n}} \quad (40)$$

### 6.4 格子から粒子への物理量の輸送 (Grid-to-particle transfer)

式 (40) を用いて節点の速度を更新した後、粒子の物理量を更新する。まず、係数行列  $\mathbf{C}$  は次のように更新できる。

$$\mathbf{C}_{p,n+1} = \sum_i \mathbf{v}_{i,n+1} \otimes w_i(\mathbf{x}_{p,n}) \mathbf{q}_i(\mathbf{x}_{p,n}) \quad (41)$$

これを用いて更新された粒子の速度は以下のように得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{p,n+1} &= \tilde{\mathbf{v}}_{p,n+1}(\mathbf{x}_{p,n}) \\ &= \mathbf{C}_{p,n+1} \cdot \mathbf{p}_0 \\ &= \sum_i \mathbf{v}_{i,n+1} \phi_i(\mathbf{x}_{p,n}) \end{aligned} \quad (42)$$

また、その空間勾配は次式となる。

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v}_{p,n+1} &= \nabla \tilde{\mathbf{v}}_{p,n+1}(\mathbf{x}_{p,n}) \\ &= \mathbf{C}_{p,n+1} \cdot \nabla \mathbf{p}_0 \\ &= \sum_i \mathbf{v}_{i,n+1} \otimes \nabla \phi_i(\mathbf{x}_{p,n}) \end{aligned} \quad (43)$$

更新された節点速度を用いれば、変形勾配テンソルは以下のように更新される。

$$\mathbf{F}_{p,n+1} = (\mathbf{I} + \Delta t \nabla \mathbf{v}_{p,n+1}) \cdot \mathbf{F}_{p,n} \quad (44)$$

客観応力速度に Jaumann 応力速度を選択した場合、応力は次のように更新できる。

$$\boldsymbol{\sigma}_{p,n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{p,n} + \mathbf{T} : \Delta \mathbf{d}_p + (\Delta \boldsymbol{\omega}_p \cdot \boldsymbol{\sigma}_{p,n} - \boldsymbol{\sigma}_{p,n} \cdot \Delta \boldsymbol{\omega}_p) \quad (45)$$

ここで、 $\mathbf{T}$  は構成則の接線係数テンソルである。 $\mathbf{d}$  と  $\boldsymbol{\omega}$  はそれぞれ変形速度テンソルとスピントルであり、次のように表される。

$$\Delta \mathbf{d}_p = \frac{1}{2} \left[ \nabla \mathbf{v}_{p,n+1} + (\nabla \mathbf{v}_{p,n+1})^\top \right] \Delta t \quad (46)$$

$$\Delta \boldsymbol{\omega}_p = \frac{1}{2} \left[ \nabla \mathbf{v}_{p,n+1} - (\nabla \mathbf{v}_{p,n+1})^\top \right] \Delta t \quad (47)$$

最後に、粒子の位置は次のように更新できる。

$$\mathbf{x}_{p,n+1} = \mathbf{x}_{p,n} + \Delta t \mathbf{v}_{p,n+1} \quad (48)$$

### 6.5 時間ステップの決め方

陽解法による時間積分で安定した解を得るためには、CFL (Courant–Friedrichs–Levy condition) [Courant et al., 1967] を考慮する必要がある。その時間増分は次のように与えられる。

$$\Delta t_{cr} = \frac{h}{\max_p (c_p + \|\mathbf{v}_p\|)} \quad (49)$$

ここで、 $h$  は格子間隔、 $c_p$  と  $\mathbf{v}_p$  はそれぞれ粒子  $p$  の音速と速度を表す。音速は次のように計算できる。

$$c = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho}} \quad (50)$$

ここで、 $K$  は体積弾性率、 $G$  はせん断弾性率、 $\rho$  は密度を表す。節 7 で示す数値シミュレーションでは  $\Delta t = 0.5 \Delta t_{cr}$  を用いている。

### 6.6 MPM, WLS-MPM, および Hu et al. [2018] による手法の違い

同様の定式化は、1 次の多項式と、粒子の質量で重み付けされた関数 (式 (12) 参照) を用いて、Hu et al. [2018] によって導かれている。したがって、粒子が境界にも剛体にも近接していない場合には、提案した定式化は Hu et al. [2018] のものに帰着される。本研究の貢献は、境界条件や剛体との摩擦接触を扱うためのアルゴリズム [Hu et al., 2018] の一般化を含む。MPM [Sulsky et al., 1994] と WLS-MPM 定式化の比較を表 1 にまとめる。

## 7 数値シミュレーションによる解析手法の妥当性の確認

本節では、提案した接触アルゴリズムを検証するために、3 種類の数値シミュレーションを行った。最初のシミュレーションでは、ペナルティ係数  $k^{nor}$  と格子の解像度の影響を検証するために、スライドボックスを用いた。2 つ目のシミュレーションでは、円盤が傾斜面上を転がる現象を再現する。この解析例は、摩擦接触アルゴリズムを検証するために広く用いられている [Bardenhagen et al., 2000, 2001, Huang et al., 2011, Hamad et al., 2017]。3 つ目は、提案したアルゴリズムでべた基礎の支持力問題を解き、有限要素シミュレーションと比較する。

表 1: MPM と WLS-MPM における定式化の違い

|   | MPM   | WLS-MPM   |
|---|---|---|
| Shape function, $\phi_{ip}$                                   | $w_i(\mathbf{x}_p)$   | $w_i(\mathbf{x}_p)\mathbf{q}_i(\mathbf{x}_p) \cdot \mathbf{p}_0$                        |
| Shape function gradient, $\nabla\phi_{ip}$                    | $\nabla w_i(\mathbf{x}_p)$  | $w_i(\mathbf{x}_p)\mathbf{q}_i(\mathbf{x}_p) \cdot \nabla\mathbf{p}_0$                  |
| Grid mass, $m_i$  | $\sum_p \phi_{ip}m_p$   | *   |
| Grid internal force, $\mathbf{f}_i^{\text{int}}$              | $\sum_p V_p \nabla\phi_{ip} \cdot \boldsymbol{\sigma}_p$                | *   |
| Grid external force, $\mathbf{f}_i^{\text{ext}}$              | $\sum_p \phi_{ip}m_p\mathbf{b}_p$                                       | *   |
| Grid velocity, $\mathbf{v}_i$                                 | $\sum_p \psi_p(\mathbf{x}_i)\mathbf{v}_p$                               | $\sum_p \psi_p(\mathbf{x}_i)\mathbf{C}_p \cdot \mathbf{p}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_p)$ |
| Particle velocity, $\mathbf{v}_{p,n+1}$                       | $\mathbf{v}_{p,n} + \Delta t \sum_i \frac{\mathbf{f}_i}{m_i} \phi_{ip}$ | $\sum_i \mathbf{v}_{i,n+1} \phi_{ip}$   |
| Gradient of the particle velocity, $\nabla\mathbf{v}_{p,n+1}$ | $\sum_i \mathbf{v}_{i,n+1} \otimes \nabla\phi_{ip}$                     | *   |
| Particle position, $\mathbf{x}_{p,n+1}$                       | $\mathbf{x}_{p,n} + \Delta t \sum_i \mathbf{v}_{i,n+1} \phi_{ip}$       | $\mathbf{x}_{p,n} + \Delta t \mathbf{v}_{p,n+1}$  |
| Coefficient matrix for WLS, $\mathbf{C}_{p,n+1}$              | -   | $\sum_i \mathbf{v}_{i,n+1} \otimes w_i(\mathbf{x}_{p,n})\mathbf{q}_i(\mathbf{x}_{p,n})$ |

\* The equation is the same as that of the MPM

## 7.1 スライドボックス

図 9 はスライドボックスシミュレーションのモデルを示しており、サンプルは  $0.1 \text{ m} \times 0.1 \text{ m}$  の正方形である。下の板は摩擦係数が  $\mu$  の粗い板で、他の板は滑らかな板とした。シミュレーションでは、最初に上板が速度  $v_y$  で所定の変位が得られるまで下降し、その後、下板が速度  $v_x$  で滑るようになっている。計算時に応力振動を抑えるため、上板の速度は  $0.1$  秒で  $0$  から  $0.5 \text{ mm/s}$  まで直線的に制御し、 $0.8$  秒で一定にした後、 $0.1$  秒で減少させた。同様に、下板は図 10 に示すように、 $0$  から  $0.5 \text{ mm/s}$  まで  $0.1$  秒間直線的に制御され、一定に保たれる。摩擦力  $F_x$  は、下板を除くすべての板の表面が滑らかであることから、垂直方向の力  $F_y$  を用いて  $F_x = \mu F_y$  として求めることができる。垂直方向の力は、サンプルが要素として振る舞うと仮定して計算した。

粒子には、ヤング率  $E = 10^3 \text{ kPa}$ 、ポアソン比  $\nu = 0.3$ 、密度  $10^3 \text{ kg/m}^3$  の線形弾性体を使用した。また、下板の摩擦係数は  $\mu = 0.3$  とした。ペナルティ係数は材料の剛性やグリッドの解像度に依存するため、3つのペナルティ係数  $k^{\text{nor}} = 1 \times 10^3, 2 \times 10^3, 3 \times 10^3 \text{ kN/m}$  と、2種類の解像度  $h = 0.02 \text{ m}, h = 0.005 \text{ m}$  で計算結果を比較した。初期状態において、1要素あたりの粒子数  $N_p$  は  $4$  とした。

図 11 は、底板に作用する垂直力と摩擦力の大きさを示している。これらの力は節点接触力  $\mathbf{f}_i^c$  の総和として計算した。図 11a より、 $k^{\text{nor}} = 1 \times 10^3$  では、理論値よりも値が低く、 $k^{\text{nor}} = 3 \times 10^3 \text{ kN/m}$  では大きくなっている。もっとも良い結果は、 $k^{\text{nor}} = 3 \times 10^3 \text{ kN/m}$  の時に得られた。また、図 11b に示すように、細かいメッシュを用いることでも精度の向上を図ることができる。この場合、どのペナルティ係数の値に対しても、解析解との良好な一致が見られる。このように、良い精度の結果を得るためには、十分に細かいメッシュを用いるか、感度解析によってペナルティ係数  $k^{\text{nor}}$  に適切な値を選択する必要がある。今後、より適切な法線方向の接触力の算出方法や、ペナルティ係数  $k^{\text{nor}}$  を合理的に決定する方法を検討する必要がある。

## 7.2 傾斜面を転がる円盤

図 12 にシミュレーションの形状を示す。斜面は水平方向に対して角度  $\theta$  で傾斜しており、その傾斜面は三角形の物体の  $1$  辺として表現される。円盤が剛体の場合、傾斜角  $\theta$  と摩擦係数  $\mu$  の組み合わせにより、円盤が転がり落ちる場合と滑り落ちる場合の解析解を求めることができる。

$$x'_c(t) = \begin{cases} x'_0 + \frac{1}{2}gt^2(\sin\theta - \mu\cos\theta), & \tan\theta > 3\mu \quad (\text{slip}) \\ x'_0 + \frac{1}{3}gt^2\sin\theta, & \tan\theta \leq 3\mu \quad (\text{stick}) \end{cases} \quad (51)$$

ここで、 $x'_c$  は  $x'$  軸に沿った重心の位置である。

シミュレーションでは、半径  $R = 0.05 \text{ m}$  の円盤を、ヤング率  $E = 10^3 \text{ kPa}$ 、ポアソン比  $\nu = 0.3$ 、密度  $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$  の線形弾性体として表現している。シミュレーションは、3種類の格子間隔  $h = 0.4R, 0.2R, 0.1R$  で行った。また、円盤の解像度の影響を調べるために、格子の1要素あたりの粒子数  $N_p$  を変化させた。傾斜角は、 $\theta = 30^\circ$  とした。摩擦係数は  $\mu = 0$  (slip) と  $\mu = 0.3$  (stick) とした。ペナルティ係数は  $k^{\text{nor}} = 2 \times 10^3 \text{ kN/m}$  である。

図 13 には、slip ケースの重心位置  $x'_c$  が表示されている。図 13a では、メッシュを粗くした場合 ( $h = 0.4R$ ) でも解析解と非常によく一致しているが、メッシュを細かくすることでさらに精度を上がることがわかる。さらに、1要素あたりの粒子数を増やすことでも計算精度は改善される (図 13b)。図 14 は、stick ケースの質量中心位置  $x'_c$  を示している。slip ケースの場合とは異なり、stick ケースの場合は、粗いメッシュでは精度が低い (図 14a)、細かいメッシュでは解析解とよく一致していることがわかる。また、図 14b に示すように、粒子数を増やすことでシミュレーションの精度が向上する。

以上のように、本解析例では、提案された接触アルゴリズムが滑り接触を精度良くシミュレートできることがわかった。一方、摩擦条件を適用した場合、その結果は空間の解像度に大きく依存する。例えば、図 14a の精度の低い結果は、円盤

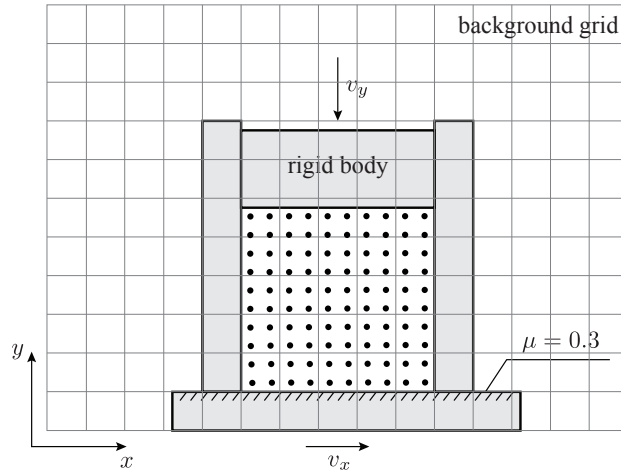


図 9: スライドボックスシミュレーションの計算モデル。下板を除いたすべての板において摩擦はゼロとしている。図における粒子の配置は、粗いメッシュ ( $h = 0.02$  m) の場合と同じである。

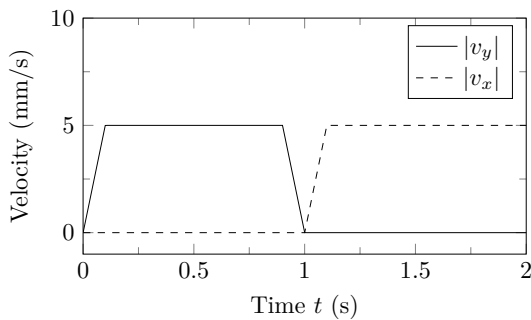


図 10: スライドボックスシミュレーションにおける上下の板の速度。

の空間分解能が低いこと（つまり、円盤がでこぼこしている）で円盤が斜面上で跳ねてしまうのが理由である。スリップの場合には、ディスクが平面上で滑る（転がらない）ため、このような挙動は起こらない。提案する接触アルゴリズムでは、粒子と剛体表面の間で直接接触判定を行うため、粒子の配置や数が格子ベースの接触アルゴリズム [Bardenhagen et al., 2000, 2001] よりも計算結果に影響を与える可能性がある。

### 7.3 ベタ基礎の支持力問題

本節では、得られた解を商用ソフトウェア PLAXIS を用いた有限要素シミュレーションの解と比較することで、提案したアルゴリズムの検証を行った。まず、土の重さを無視して von Mises モデルを適用した支持力問題を用いて、MPM と FEM のシミュレーションの両者を評価する。ここでは、この問題の解析解としてよく知られている Prandtl 解を用いる。さらに、土の自重を考慮し、摩擦がある基礎とない基礎の両方で、MPM の解を FEM の解と比較する。この問題には理論値が存在しないため、FEM の結果を解析解とみなす。図 15 にベタ基礎の支持力問題のモデルと境界条件を示す。本シミュレーションは左右対称であるため、基礎の片側半分のみをシミュレートしている。

#### 7.3.1 地盤の自重を無視した場合の基礎の支持力

Prandtl により与えられた支持力の解析解は以下である。

$$q_u = (2 + \pi)cB \quad (52)$$

ここで、 $c$  は土の粘着力、 $B$  は基礎幅である。MPM および FEM によるシミュレーションでは、線形弾性体を用いた von Mises モデルを適用している。von Mises モデルの降伏関数は

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{3J_2(\boldsymbol{\sigma})} - \sigma_Y = 0 \quad (53)$$

ここで  $J_2$  は偏差応力の第 2 不変量、 $\sigma_Y > 0$  は降伏応力を表す材料定数である。平面ひずみ条件では、降伏応力  $\sigma_Y$  は、Mohr-Coulomb の破壊基準における粘着力  $c$  と次のように関連づけられる。

$$\sigma_Y = \sqrt{3}c \quad (54)$$

塑性ひずみの発展則には、関連流れ則を用いた。

計算では、応力振動を抑えるために、図 16 に示すように、0.1 秒で 0 から 0.5mm/s まで直線的に制御し、総変位が 0.6mm になるまで一定に保つようにした。この速度は、粒子の加速度が無視できるほど小さくなるように決定されているので、本研究では、支持力に対する載荷速度の影響は無視している。地盤の材料パラメータは、ヤング率  $E = 10^6$  kPa、ポアソン比  $\nu = 0.3$ 、密度  $\rho = 10^3$  kg/m<sup>3</sup>、粘着力  $c = 10$  kPa とした。MPM、FEM とともに、基礎と地面の接触面で摩擦は働かない。なお、自重がない場合、摩擦の有無によらず支持力は同じ値となる。ペナルティ係数は  $k^{\text{nor}} = 2 \times 10^6$  kN/m とした。

図 17 は、土の自重を無視した場合のベタ基礎の支持力を示している。MPM と FEM の両者において、Prandtl 解よりもやや硬い挙動を示している。この結果の精度を上げるためには、図 17 のようにより細かいメッシュを用いる必要がある [Fatemizaddeh et al., 2015]。また、偏差ひずみの分布 (図 18) は、Prandtl 型の破壊メカニズムで予想される滑り線と一致している。

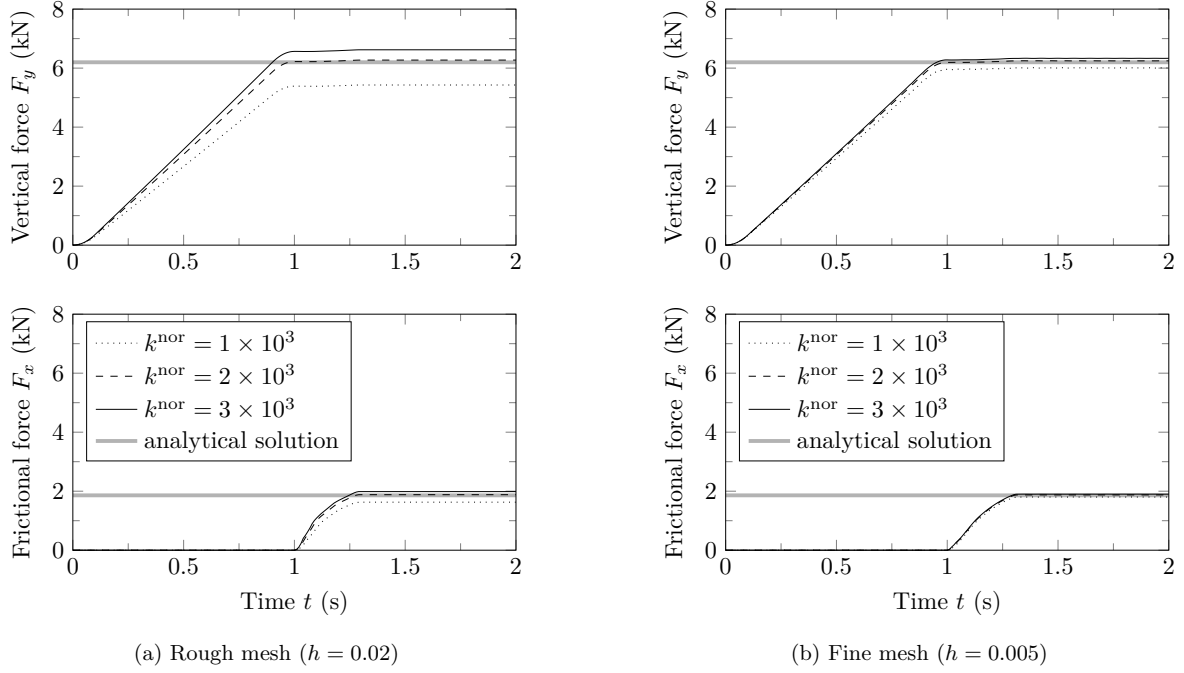
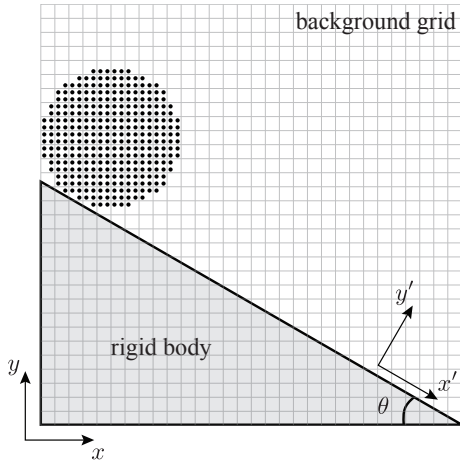


図 11: 下板に作用する鉛直力と摩擦力の絶対値。


 図 12: 傾斜面上の円盤の転がりシミュレーションにおける計算モデル。図における粒子の配置は、 $h = 0.2R$  のメッシュの場合と同じである。

### 7.3.2 地盤の自重を考慮した場合の基礎の支持力

MPM と FEM シミュレーションの両者が Prandtl 解と良い一致を示したため (図 17), 次に, 提案された MPM の摩擦接触アルゴリズムを FEM シミュレーションと比較して検証する。計算モデルと境界条件は図 15 と同じだが, 土の重量を考慮して, 構成則に Drucker–Prager モデルを適用した点が異なる。Drucker–Prager モデルの降伏関数は

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma})} + \alpha I_1(\boldsymbol{\sigma}) - \kappa = 0 \quad (55)$$

ここで  $I_1$  は応力の第一不変量である。 $\alpha$  と  $\kappa$  は Mohr–Coulomb モデルにおける粘着力  $c$  と内部摩擦角  $\phi$  に関係

付けることができる材料パラメータで, 平面ひずみの状態では, 次のようになる。

$$\alpha = \frac{\tan \phi}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \phi}}, \quad \kappa = \frac{3c}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \phi}} \quad (56)$$

塑性ひずみの発展則には, 関連流れ則を用いた。

この場合も同様に, 計算での応力振動を抑えるために, 図 19 に示すように, 基礎の速度を 0.1 秒で 0 から 0.5mm/s まで直線的に制御し, 総変位が 4mm になるまで一定に保つようにした。地面の材料パラメータは, ヤング率  $E = 10^6$  kPa, ポアソン比  $\nu = 0.3$ , 密度  $\rho = 10^3$  kg/m<sup>3</sup>, 粘着力  $c = 10$  kPa, 内部摩擦角  $\phi = 30^\circ$  とした。また, 垂直応力  $\sigma_y$  と水平応力  $\sigma_x$  の初期値は以下のように設定した。

$$\sigma_y = \rho g H, \quad \sigma_x = \sigma_y \frac{\nu}{1 - \nu} \quad (57)$$

ここで,  $H$  は地表面からの深さ,  $g$  は重力加速度である。FEM では, フーチングと地面の接触を境界条件とし, 水平方向の拘束は, 基礎と地盤との間が滑らかな条件では自由, 粗い条件では固定としている。一方, MPM では, 摩擦係数  $\mu = 0$  を滑らかな状態で,  $\mu = 0.6$  を粗い状態で使用した。ペナルティ係数は  $k^{\text{nor}} = 2 \times 10^6$  kN/m とした。

図 20 に, 基礎の支持力を表す。基礎と地盤との間が, 滑らかな状態でも, 粗い状態でも, MPM の結果は FEM の結果とよく一致している。図 21 に示された偏差ひずみ分布では, 滑らかな条件では Hill 型の破壊メカニズム, 粗い条件では Prandtl 型の破壊メカニズムとなっており, Griffiths et al. [2002] による報告と同様に合理的な破壊メカニズムが観察された。



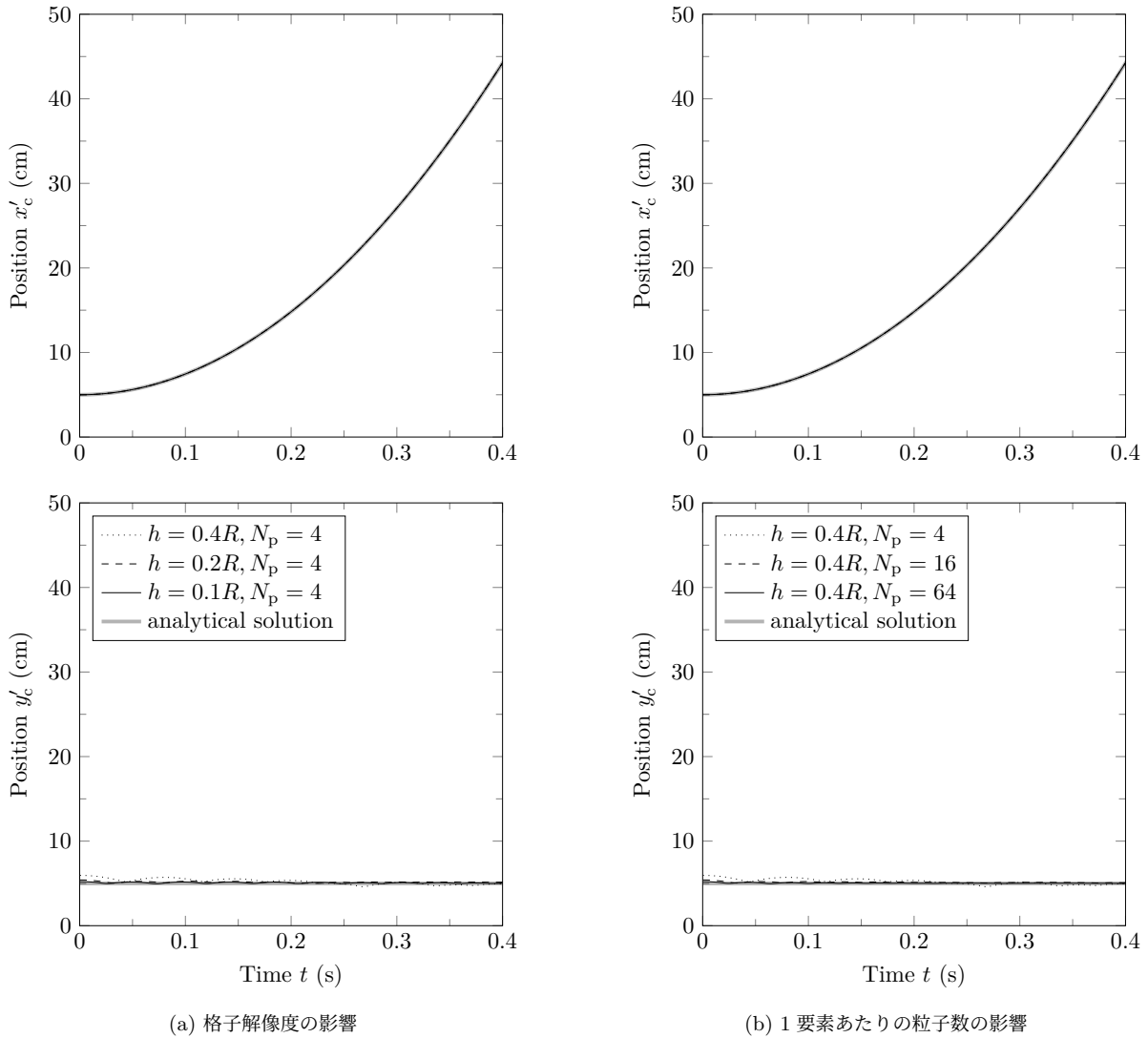


図 13: 円盤の転がりシミュレーションにおける slip 条件での重心位置。

## 8 解析手法の適用例：開端杭の地盤への貫入

本節では、提案した解析手法の適用例として、開端杭の地盤への貫入実験 [中村ら, 2019] の再現解析を行った。解析モデルと境界条件を図 22 に示す。図にあるように、解析は軸対称問題とし、杭を剛体として扱うことで貫入問題を解いた。その際、杭の内側と外側の土 (MPM の粒子) の領域を完全に区別するためには、杭の肉厚は最低でも格子の 2 要素分を確保する必要がある。仮に 2 要素未満の幅で肉厚を設定した場合は、杭の内側と外側の粒子が同一の格子節点に物理量を輸送してしまう可能性があるため、特別な場合分けを行って別々の節点として処理されなければならない。本研究では、そのような複雑な取扱いはせず、肉厚を 2 要素分取ることとした。また、実験で用いた杭の肉厚は 2mm であるが、その半分の 1mm を格子幅とすると計算時間が膨大であるこ

とから、解析では 5mm の格子幅とし、肉厚は 10mm とした。地盤材料モデルは、内部摩擦角  $38^\circ$ 、粘着力  $c = 0\text{kPa}$  の Drucker-Prager モデルを用いた。流れ則は非関連流れ則で、ダイレイタンシー角は  $0^\circ$  である。解析における杭の貫入速度は、計算時間との兼ね合いから  $0.1\text{m/s}$  とした。これは実験に比べてはるかに速いが、本解析で用いる Drucker-Prager モデルは時間依存性を有する構成則ではない。また、貫入速度は一定としているため、加速度が計算結果に与える影響も小さい。影響が考えられる点としては、静的解析とは異なり、貫入に伴い MPM 粒子は鉛直下向きの速度が支配的となるため、杭と地盤との相対速度が小さくなり、結果として摩擦力がやや小さく評価されてしまう可能性が考えられる。静的解析は陰解法が必要となるため、本研究の対象ではないが、貫入速度の検証としてさらに速度が 10 倍速い  $1\text{m/s}$  でも貫入を行い、比較することとした。杭と地盤との摩擦係数には  $0.53$  を用いた。

前節までで提案した解析手法では、法線方向の接触力  $f_p^{c,nor}$  は、ペナルティ係数  $k^{nor}$  に基づいて式 (28) 計算を行っている

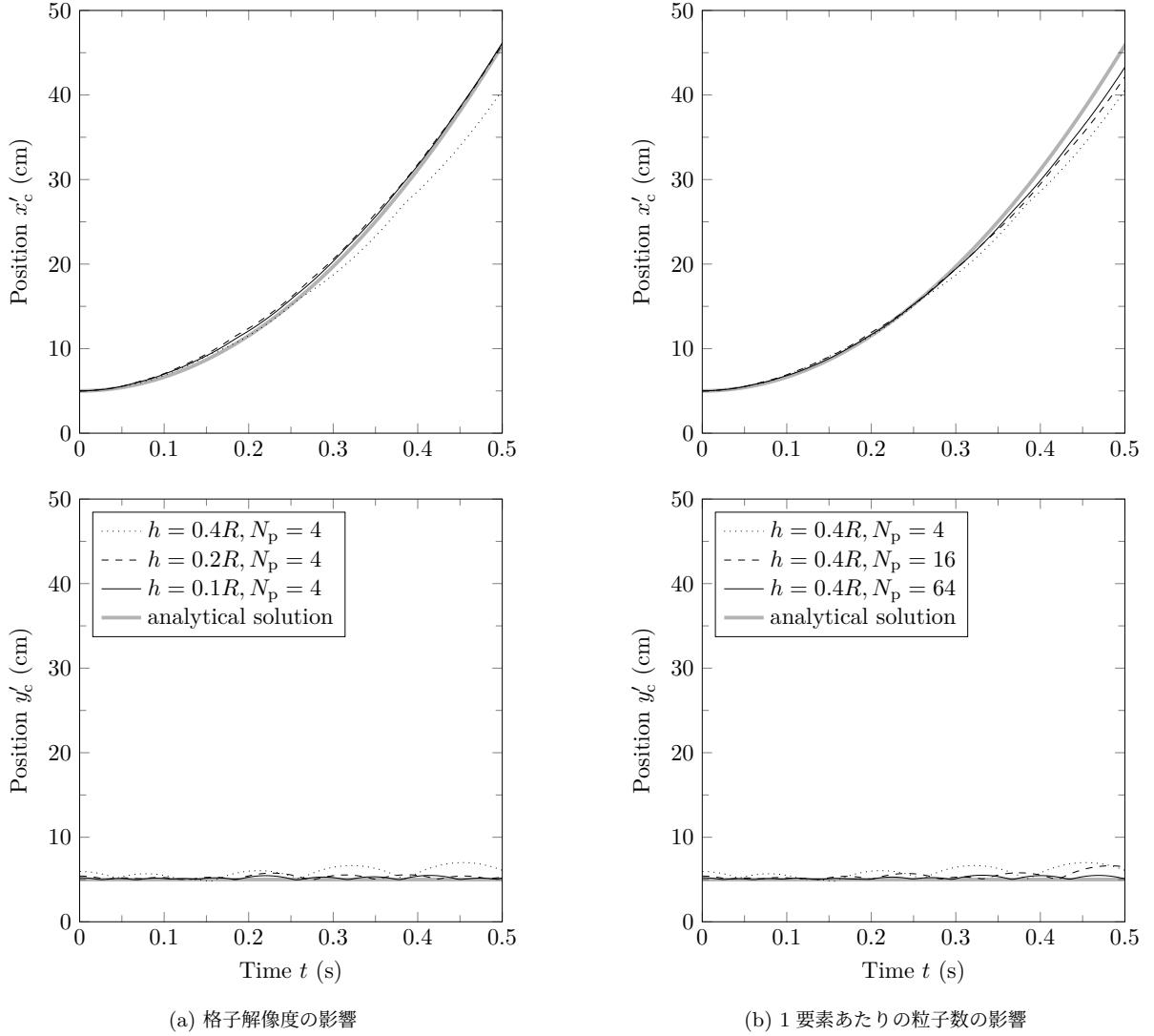


図 14: 円盤の転がりシミュレーションにおける stick 条件での重心位置。

た。しかし、地盤に強制的に杭を貫入するような問題は、計算条件が極めて厳しいため、適切なペナルティ係数を与えるのが困難である。そのため、本研究では、Wang and Chan [2014] を参考にして、以下のような式をもって法線方向の接触力  $\mathbf{f}_p^{\text{nor}}$  を計算した。

$$\mathbf{f}_p^{\text{nor}} = -(1 - \xi) \frac{2m_p}{(\Delta t)^2} (d_p - d_0) \mathbf{n}_p \quad (58)$$

ここで、 $\xi (0 \leq \xi < 1)$  は、接触力の大きさを決めるパラメータである。上式では粒子の質量  $m_p$  を用いているが、MPM の粒子はあくまで連続体の代表点であるため、粒子の質量を用いて接触力を計算するのは厳密には適切ではない。しかし、1 要素内で分担する粒子数の数が大きくない場合は十分適用可能であることが、著者らの検証でわかっている。ただし、初期粒子配置の際に、1 要素に対する粒子数を変更した場合は、連続体としての質量の分布に変化がなくても、粒子の質量  $m_p$  は変わるため、同じパラメータ  $\xi$  では同様の解が得られない可能性があることに注意が必要である。パラメータ  $\xi$  の値に

ついては、著者らがいくつか行った数値計算では、2次元 1 要素内に 4 粒子でおおよそ 0.6–0.9 程度が良好な解を与えるという結果を得たが、今後より詳細な検証が必要である。なお、本解析では  $\xi = 0.6$  を用いた。

図 23 に、実験と解析で得られた変位–荷重関係を示す。解析では、Drucker–Prager モデルのような極めてシンプルなモデルを用いているものの、得られた荷重値は実験値と同等のオーダーを示しており、解析手法の有効性が認められる。実験で得られた荷重は解析結果に比べてやや大きい値を示し、また荷重の上昇率も大きいことから、実験ではより杭の先端閉塞現象が顕著に現れていることがわかる。杭の先端閉塞現象や支持力は、土のダイレイタンスの影響を受けることから [Peng et al., 2014], 解析のパフォーマンスをより向上させるには、ダイレイタンスを適切に考慮したモデルを適用する必要があると考えられる。なお、本解析ではダイレイタンス角を  $0^\circ$  としているが、通常の Drucker–Prager モデルの場合は  $0^\circ$  以外の値にするとダイレイタンスが生じ続ける計算になってしまうため、限界状態モデルなどの適用が必要と

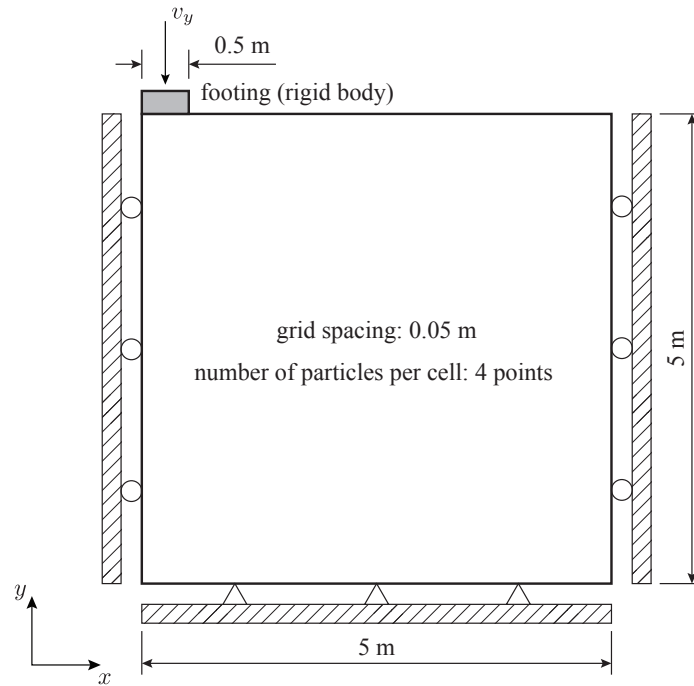


図 15: 支持力問題での解析モデルと境界条件

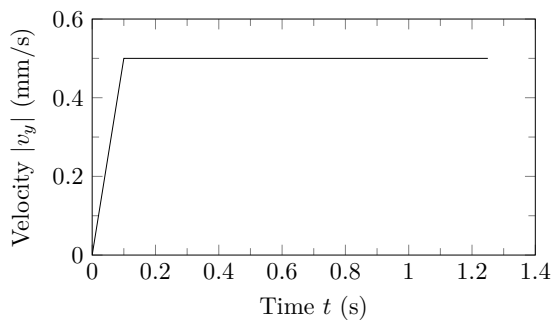


図 16: 基礎の鉛直速度（土の重量を無視したケース）

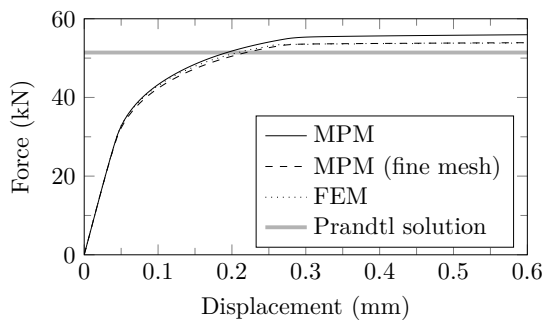


図 17: 基礎の変位-支持力関係（土の重量を無視して、von Mises モデルを用いたケース）。MPM のメッシュが細かいケースは、格子間隔が 0.025m である。

なる。貫入速度の影響については、貫入速度 1m/s では荷重の変動値が大きくなる結果となったが、これは時間ステップをより細かく取れば緩和されると考えられる。値が変動することを除けば、貫入速度 1m/s と 0.1m/s の荷重値は同程度の

値を示していることから、貫入速度の影響は小さいと考えられる。

図 24 と 25 に、それぞれ杭貫入時の平均応力と偏差応力分布を示す。平均応力分布より、杭の貫入に伴い杭内部の平均応力が上昇し、先端閉塞現象が生じていることがわかる。また、杭の先端閉塞時に観測される杭内の地表面が低下する様子も確認できる。せん断応力分布を見ると、杭先端以深に楔形のせん断領域が生じていることがわかる。この領域はしばしば実験でも観測されており [菊池ら, 2008], 杭の先端閉塞現象が生じる原因の一つと考えられている。今後、土の内部摩擦角や粘着力、杭の肉厚や根入れ、杭径等を変化させてパラメトリックスタディを行うことで、杭の先端閉塞現象のメカニズム解明に役立つと考えられる。

## 9 結論と今後の課題

本研究では、MPM のための particle-to-surface 接触アルゴリズムを提案した。精度の高い接触検出を実現するために、提案手法では、multivelocity field technique（節点での 2 物体の速度をそれぞれ分けて扱う）の代わりに、粒子と剛体表面の間で直接ペナルティ法を用いた。物理量が粒子から剛体内に位置する格子節点に輸送される可能性がある問題点は、重み付き最小二乗法 (WLS-MPM) を用いて解決した。この方法では、partition-of-unity を損なうことなく形状関数を構成できる。WLS-MPM は、境界におけるデルタ関数の特性を保持できるため、境界条件はオリジナルの MPM と同様と考えることができる。

提案したアルゴリズムは 3 つの数値シミュレーションで検証した。その結果、すべてのシミュレーションにおいて、提

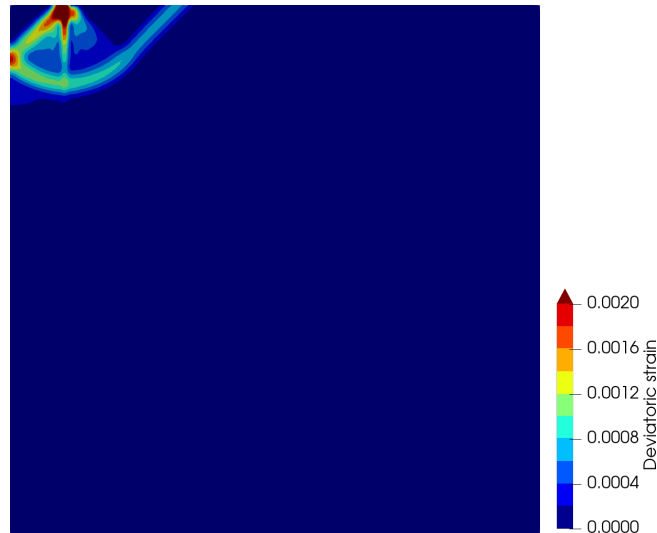


図 18: 基礎の支持力問題における偏差ひずみ分布（土の重量を無視して、von Mises モデルを用いたケース）

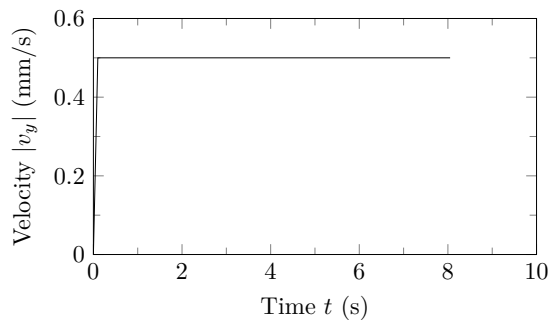


図 19: 基礎の鉛直速度（Drucker-Prager モデルのケース）

案したアルゴリズムは解析および FEM による計算結果とよく一致した。しかし、スライドボックスシミュレーションでは、所定の精度の結果を得るためには、ペナルティ法に基づく他のアルゴリズムと同様に、十分に細かいメッシュを用いるか、感度解析を用いてペナルティ係数の適切な値を選択する必要があることがわかった。法線方向の接触力の計算や、ペナルティ係数については、より適切な手法を今後検討する必要がある。円盤の転がりシミュレーションでは、本アルゴリズムが粒子と剛体表面の間で直接接触検出を行うため、格子ベースの接触アルゴリズムよりも、粒子の配置やその数が提案アルゴリズムの結果に大きく影響を与える可能性があることわかった。べた基礎支持力問題のシミュレーションでは、提案したアルゴリズムが、粗い基礎と滑らかな基礎の支持力の違いや、地盤の破壊メカニズムをうまくシミュレートできることを実証した。

提案したアルゴリズムの適用例として、本研究では、先端杭の地盤への貫入シミュレーションを行った。解析では、Drucker-Prager モデルのような極めてシンプルなモデルを用いているものの、得られた荷重値は実験値と同等のオーダーを示しており、解析手法の有効性が認められた。現場の支持力推定は経験に基づいているため、近年顕著となっている杭の大口径化には対応が困難なケースもある。今後、本手

法の検証をより進めていくことで、杭の支持力推定に活用可能になると考える。また、連続体解析を行っている本手法では、これまで行われてきた DEM (discrete element method) によるシミュレーションとは異なり、土の構成則を適用できるだけでなく、地盤内の応力状態を可視化することができるため、パラメトリックスタディを実施していくことで、杭の先端閉塞現象のメカニズム解明に役立てることができると考えられる。

(2021 年 6 月 4 日受付)

## 謝辞

本研究は、日本鉄鋼連盟、及び JSPS 科研費 (19K15093) の助成を受けたものです。

## 参考文献

- S. Bardenhagen, J. Brackbill, and D. Sulsky. The material-point method for granular materials. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 187(3-4):529–541, 2000.
- S. Bardenhagen, J. E. Guilkey, K. Roessig, J. Brackbill, W. Witzel, and J. Foster. Improved contact algorithm for the material point method and application to stress propagation in granular material. 2001.
- S. G. Bardenhagen and E. M. Kober. The generalized interpolation material point method. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 5(6):477–496, 2004.
- T. Belytschko, Y. Y. Lu, and L. Gu. Element-free galerkin methods. *International journal for numerical methods in engineering*, 37(2):229–256, 1994.
- Z. Chen, X. Qiu, X. Zhang, and Y. Lian. Improved coupling of finite element method with material point method based on a particle-to-surface contact algorithm. *Com-*

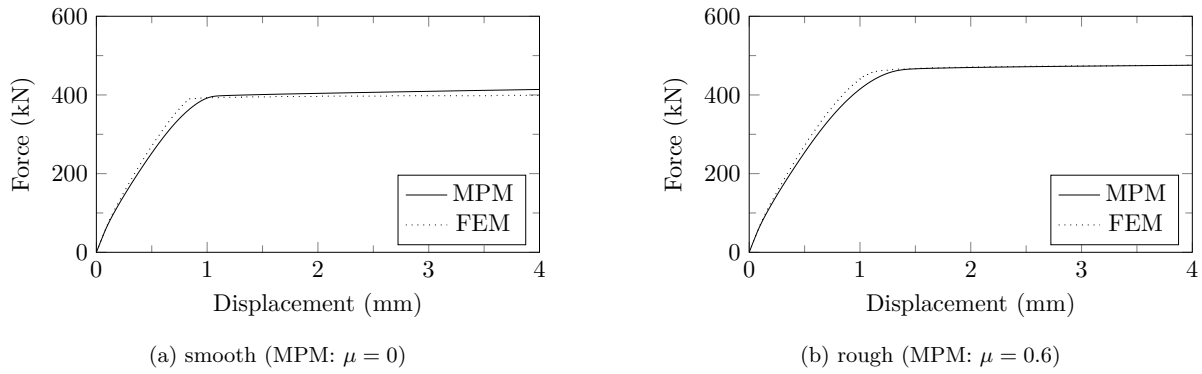


図 20: WLS-MPM と FEM における基礎の支持力の比較

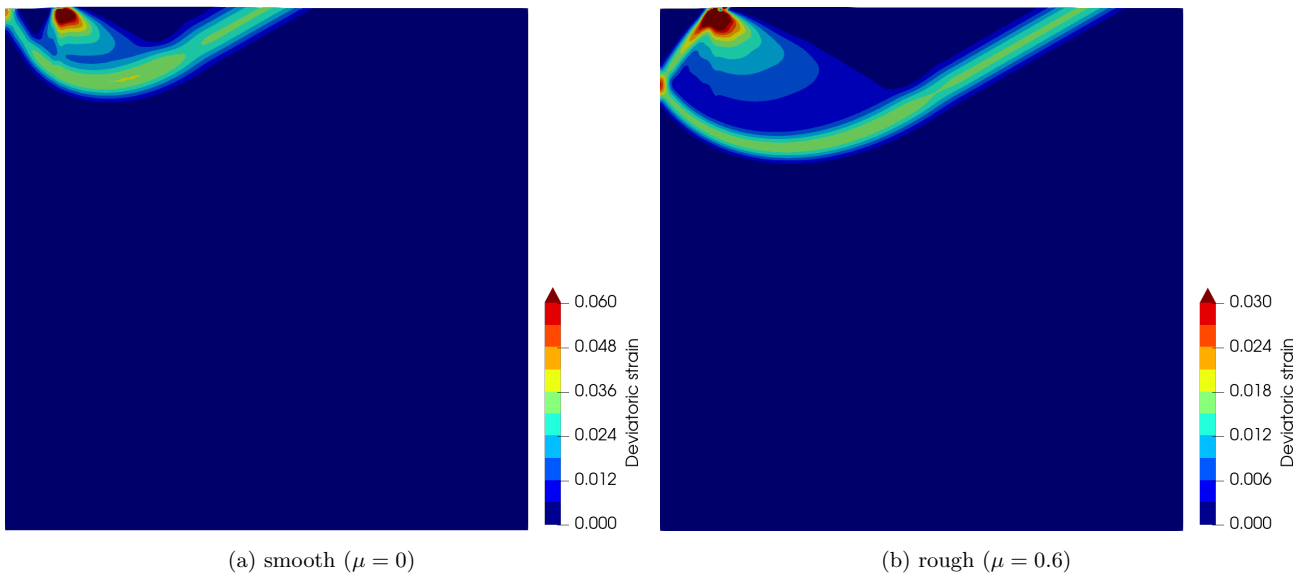


図 21: 偏差ひずみ分布 : (a) 滑らかな基礎における Hill 型の破壊メカニズム (b) 粗い基礎における Prandtl 型の破壊メカニズム

- puter Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 293:1–19, 2015.
- Z.-P. Chen, X. Zhang, X.-M. Qiu, and Y. Liu. A frictional contact algorithm for implicit material point method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 321:124–144, 2017.
- Y.-J. Cheon and H.-G. Kim. An efficient contact algorithm for the interaction of material particles with finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 335:631–659, 2018.
- R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy. On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM journal of Research and Development*, 11(2):215–234, 1967.
- S. Fatemizaddeh, F. Hamad, and C. Moormann. Effects of the mpm discretisations on soil-structure problems. In *PARTICLES IV: proceedings of the IV International Conference on Particle-Based Methods: fundamentals and applications*, pages 635–645. CIMNE, 2015.
- D. Griffiths, G. A. Fenton, and N. Manoharan. Bearing capacity of rough rigid strip footing on cohesive soil: probabilistic study. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 128(9):743–755, 2002.
- F. Hamad, S. Giridharan, and C. Moormann. A penalty function method for modelling frictional contact in mpm. *Procedia Engineering*, 175:116–123, 2017.
- Y. Hu, Y. Fang, Z. Ge, Z. Qu, Y. Zhu, A. Pradhana, and C. Jiang. A moving least squares material point method with displacement discontinuity and two-way rigid body coupling. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 37(4):1–14, 2018.
- P. Huang, X. Zhang, S. Ma, and X. Huang. Contact algorithms for the material point method in impact and penetration simulation. *International journal for numerical methods in engineering*, 85(4):498–517, 2011.
- C. Jiang, C. Schroeder, A. Selle, J. Teran, and A. Stomakhin. The affine particle-in-cell method. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 34(4):1–10, 2015.
- G. Klár, T. Gast, A. Pradhana, C. Fu, C. Schroeder,

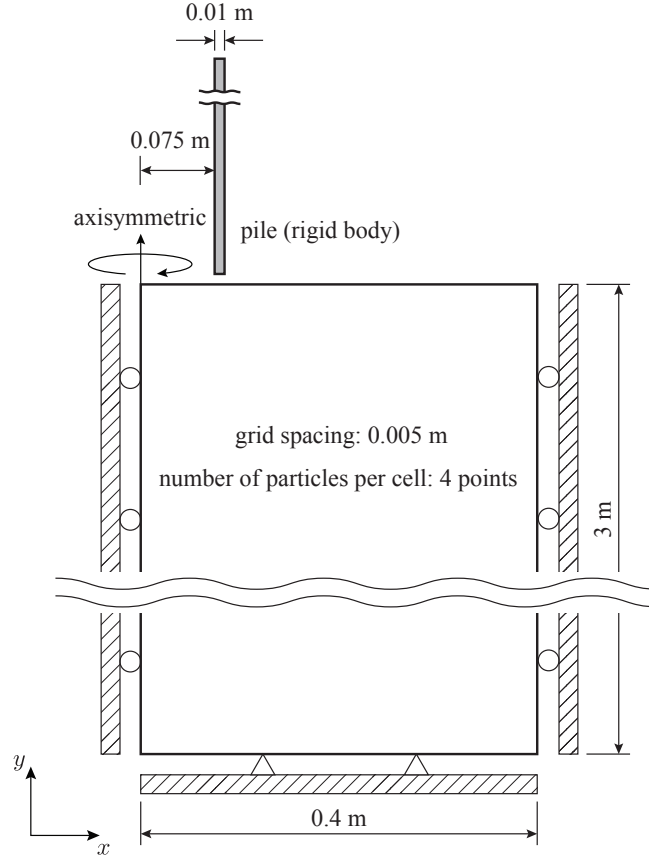


図 22: 杭貫入解析でのモデルと境界条件

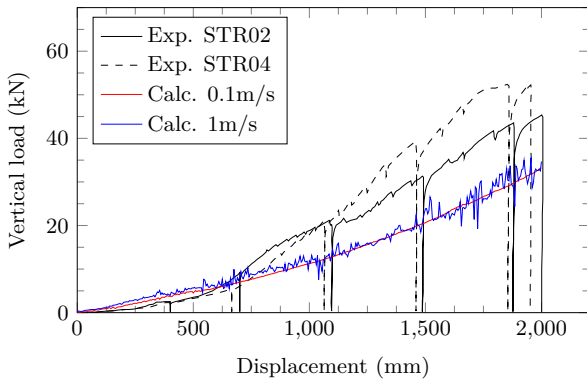


図 23: 杭の変位-荷重関係

C. Jiang, and J. Teran. Drucker-prager elastoplasticity for sand animation. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 35(4):1–12, 2016.

V. Lemiale, J. Nairn, and A. Hurman. Material point method simulation of equal channel angular pressing involving large plastic strain and contact through sharp corners. 2010.

Y. Lian, X. Zhang, and Y. Liu. Coupling of finite element method with material point method by local multi-mesh contact method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(47-48):3482–3494, 2011.

C. Liu, Q. Sun, and G. G. Zhou. Coupling of material point method and discrete element method for granular flows impacting simulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 115(2):172–188, 2018.

W. K. Liu, S. Jun, and Y. F. Zhang. Reproducing kernel particle methods. *International journal for numerical methods in fluids*, 20(8-9):1081–1106, 1995.

J. Ma, D. Wang, and M. Randolph. A new contact algorithm in the material point method for geotechnical simulations. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 38(11):1197–1210, 2014.

Z. Ma, X. Zhang, and P. Huang. An object-oriented mpm framework for simulation of large deformation and contact of numerous grains. *Computer Modeling in Engineering and Sciences (CMES)*, 55(1):61, 2010.

J. J. Monaghan and J. C. Lattanzio. A refined particle method for astrophysical problems. *Astronomy and astrophysics*, 149:135–143, 1985.

Y. Mukherjee and S. Mukherjee. On boundary conditions in the element-free galerkin method. *Computational Mechanics*, 19(4):264–270, 1997.

J. Nairn. Modeling imperfect interfaces in the material

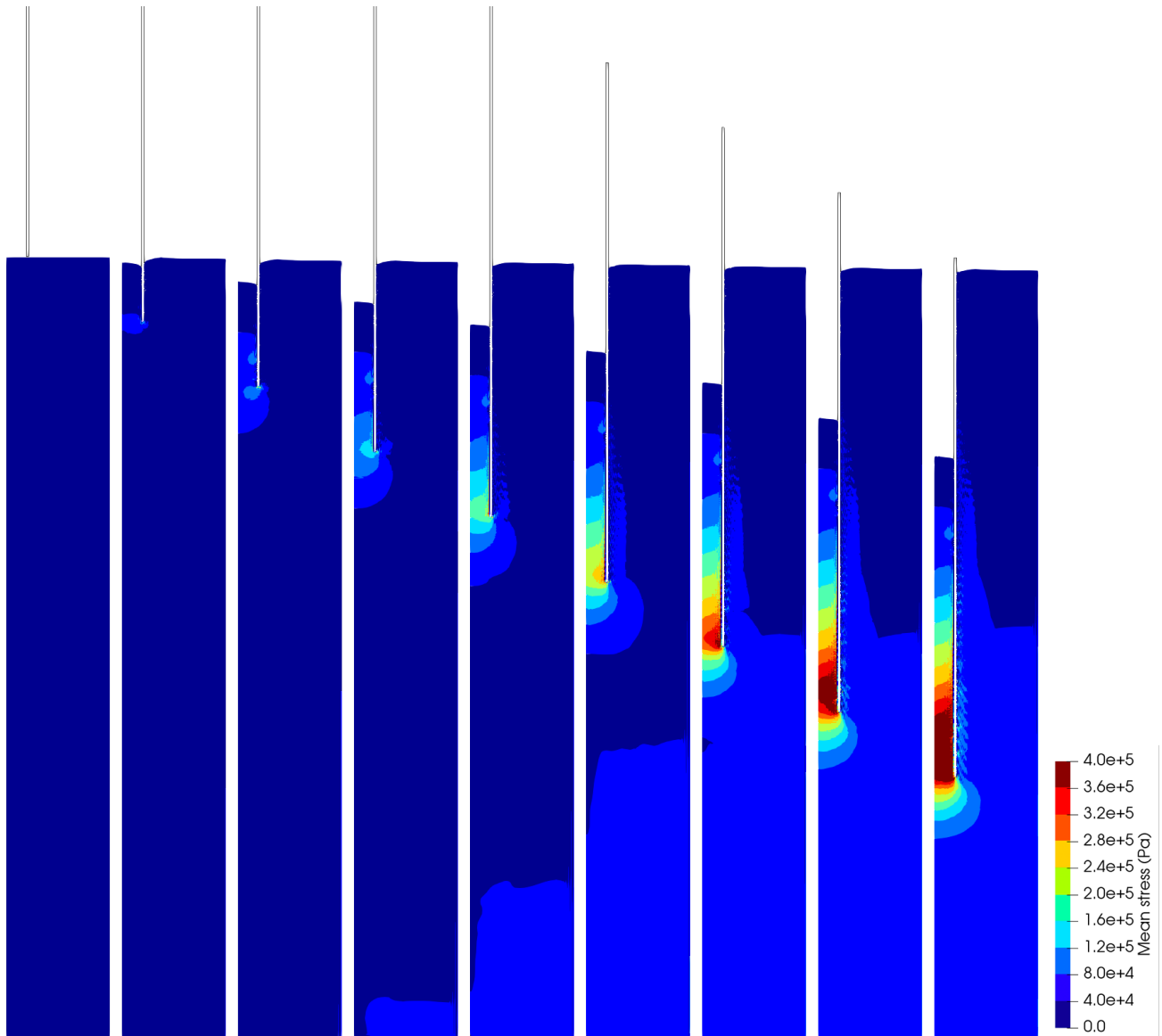


図 24: 杭貫入時の平均応力分布

- point method using multimaterial methods. *Comput. Model. Eng. Sci.*, 1(1):1–15, 2013.
- K. Nakamura, S. Matsumura, and T. Mizutani. Particle-to-surface frictional contact algorithm for material point method using weighted least squares. *Computers and Geotechnics*, 134:104069, 2021. doi: <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2021.104069>.
- S. Peng, C. W. W. Ng, and G. Zheng. The dilatant behaviour of sand–pile interface subjected to loading and stress relief. *Acta Geotechnica*, 9(3):425–437, 2014.
- A. Sadeghirad, R. M. Brannon, and J. Burghardt. A convected particle domain interpolation technique to extend applicability of the material point method for problems involving massive deformations. *International Journal for numerical methods in Engineering*, 86(12):1435–1456, 2011.
- D. Shepard. A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data. In *Proceedings of the 1968 23rd ACM national conference*, pages 517–524, 1968.
- J. C. Simo and T. Laursen. An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Computers & Structures*, 42(1):97–116, 1992.
- M. Steffen, R. M. Kirby, and M. Berzins. Analysis and reduction of quadrature errors in the material point method (mpm). *International journal for numerical methods in engineering*, 76(6):922–948, 2008.
- D. Sulsky, Z. Chen, and H. L. Schreyer. A particle method for history-dependent materials. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 118(1-2):179–196, 1994.
- D. Sulsky, S.-J. Zhou, and H. L. Schreyer. Application of a particle-in-cell method to solid mechanics. *Computer*

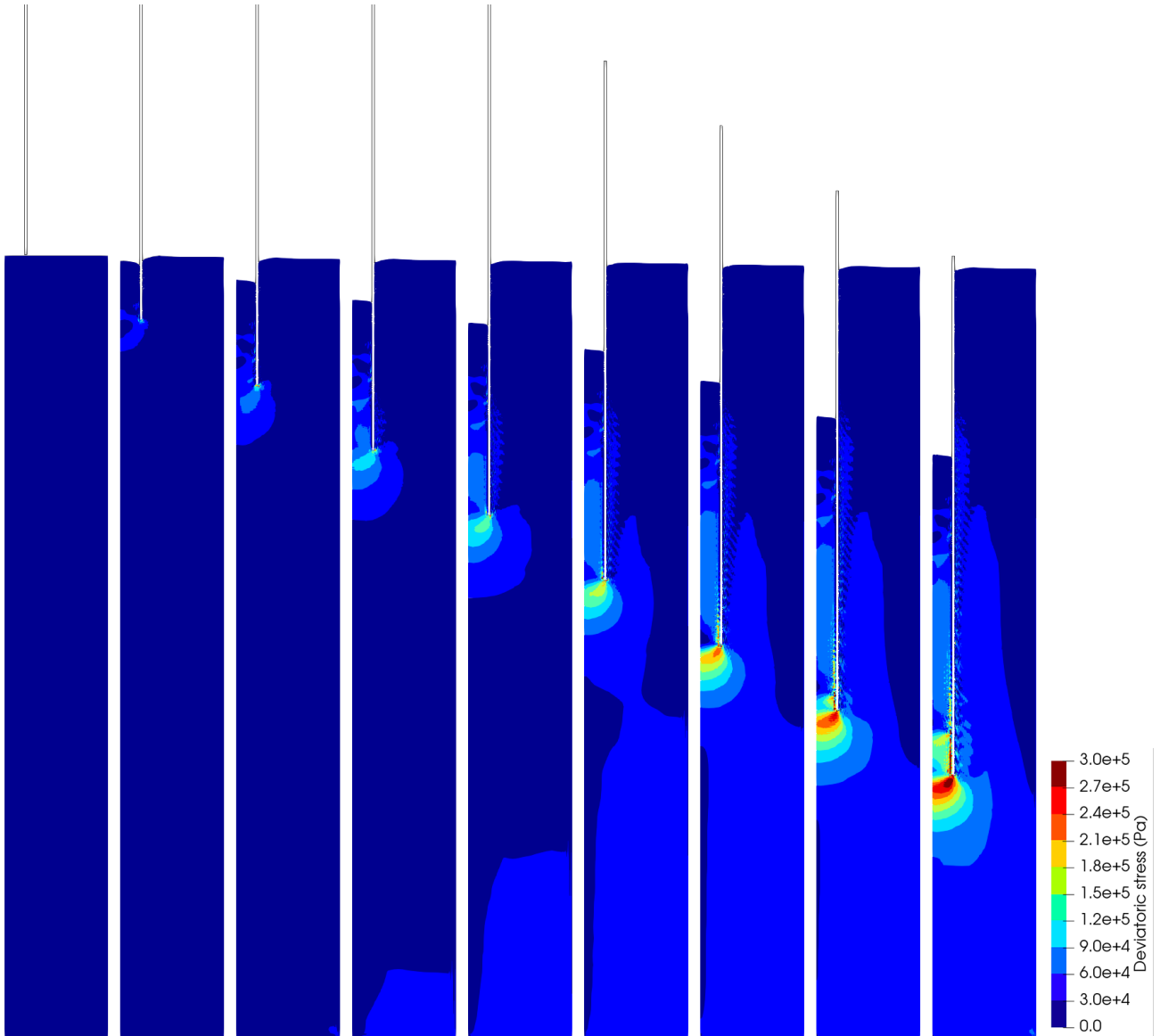


図 25: 杭貫入時のせん断応力分布

*physics communications*, 87(1-2):236–252, 1995.

Q.-A. Tran, E. Wobbes, W. Solowski, M. Möller, and C. Vuik. Moving least squares reconstruction for b-spline material point method. 2019.

J. Wang and D. Chan. Frictional contact algorithms in sph for the simulation of soil–structure interaction. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 38(7):747–770, 2014.

中村圭太, 元水佑介, 松村聡, 水谷崇亮, 新谷聡, 大下英治, 末政直晃. 開端杭の引抜き抵抗力に及ぼす施工過程と杭形状の影響に関する模型実験. 港湾空港技術研究所資料, No.1364, 2019.

菊池喜昭, 佐藤宇紘, 森川嘉之. 開端杭貫入時の杭先端周辺地盤の変形挙動の観察. 港湾空港技術研究所資料, No.1177, 2008.



港湾空港技術研究所報告 第60巻 第1号

2021.6

編集兼発行人 国立研究開発法人海上・港湾・航空技術研究所

発行所 港湾空港技術研究所  
横須賀市長瀬3丁目1番1号  
TEL. 046(844)5040 URL. <http://www.pari.go.jp/>

Copyright © (2021) by MPAT

All rights reserved. No part of this book must be reproduced by any means without the written permission of the President of MPAT

この資料は、海上・港湾・航空技術研究所理事長の承認を得て刊行したものである。したがって、本報告書の全部または一部の転載、複写は海上・港湾・航空技術研究所理事長の文書による承認を得ずしてこれを行ってはならない。

## CONTENTS

1. Cyclic Beach Morphological Changes in the Swash Zone  
due to Tidal Range Fluctuations  
Masayuki BANNŌ · Yoshiaki KURIYAMA
2. Ocean swells induced by the Typhoon Faxai hit Port of Yokohama in 2019  
Hitoshi TAMURA · Koji KAWAGUCHI · Takumu IWAMOTO · Takashi FUJIKI
3. Dynamics of ocean swells in Toyama Bay  
Hitoshi TAMURA · Koji KAWAGUCHI · Takashi FUJIKI
4. Study on Stability of Temporary Armor Units against Waves  
Kojiro SUZUKI · Hiroki KUBOTA · Tsutomu TANAKA
5. Study on Wave Pressure acting on Receding Parapet type Seawall  
Kojiro SUZUKI · Hiroki KUBOTA · Naoki TSURUTA
6. Study of slow slip mechanism on plate boundary fault decollement zone  
Yuri SUGIYAMA · Shinya TACHIBANA · Yoshiyuki MORIKAWA
7. Development of frictional contact algorithm using weighted least squares for MPM-rigid body  
simulation and its application to behavior of open-ended pile driven into the ground  
Keita NAKAMURA · Satoshi MATSUMURA · Takaaki MIZUTANI