2021/5/7

高速フーリエ変換

野津

1.　はじめに

高速フーリエ変換（FFT）は離散フーリエ変換を高速で実行するためのアルゴリズムであり，離散フーリエ変換をより小さいサイズの離散フーリエ変換で置き換えていくことを基本としている．

2.　離散フーリエ変換のサイズを小さくする

一般に離散フーリエ変換は$n = 0,1,\cdots,N-1$に対して

$$b_n = \sum_{j=0}^{N-1} a_j\, e^{i\frac{2\pi jn}{N}} \tag{1}$$

と書ける（ここでは指数の符号がプラスの場合を示すが，指数の符号がマイナスの場合も全く同様）．ここでjが偶数の場合と奇数の場合に分けて足すと

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{j=0}^{N/2-1} a_{2j}\, e^{i\frac{2\pi(2j)n}{N}} + \sum_{j=0}^{N/2-1} a_{2j+1}\, e^{i\frac{2\pi(2j+1)n}{N}} \\ &= \sum_{j=0}^{N/2-1} a_{2j}\, e^{i\frac{2\pi(2j)n}{N}} + e^{i\frac{2\pi n}{N}} \sum_{j=0}^{N/2-1} a_{2j+1}\, e^{i\frac{2\pi(2j)n}{N}} \\ &= \sum_{j=0}^{N/2-1} a_{2j}\, e^{i\frac{2\pi jn}{N/2}} + e^{i\frac{2\pi n}{N}} \sum_{j=0}^{N/2-1} a_{2j+1}\, e^{i\frac{2\pi jn}{N/2}} \end{aligned} \tag{2}$$

となる．ここで

$$a_{2j} = a_j^{<e>} \left(j = 0,1,\ldots,\frac{N}{2}-1\right) \tag{3}$$

$$a_{2j+1} = a_j^{<o>} \left(j = 0,1,\ldots,\frac{N}{2}-1\right) \tag{4}$$

$$W = e^{i\frac{2\pi}{N}} \tag{5}$$

と置けば

$$b_n = \sum_{j=0}^{N/2-1} a_j^{<e>}\, e^{i\frac{2\pi jn}{N/2}} + W^n \sum_{j=0}^{N/2-1} a_j^{<o>}\, e^{i\frac{2\pi jn}{N/2}} \tag{6}$$

となり，

$$b_n^{<e>} = \sum_{j=0}^{N/2-1} a_j^{<e>}\, e^{i\frac{2\pi jn}{N/2}}, \qquad b_n^{<o>} = \sum_{j=0}^{N/2-1} a_j^{<o>}\, e^{i\frac{2\pi jn}{N/2}} \tag{7}$$

と置けば

$$b_n = b_n^{<e>} + W^n b_n^{<o>} \tag{8}$$

となる．すなわち長さNの数列の離散フーリエ変換が，長さ$N/2$の 2 つの数列の離散フーリエ変換の線形結合で表されることになる．これを繰り返していけば，最終的には長さ 1 の数列の離散フーリエ変換に行き着く．長さ 1 の数列の離散フーリエ変換は元の数列の値そのものであるから，これにより，離散フーリエ変換の高速計算が可能となる．

式(8)は$n = 0,1,\cdots,N-1$に対してb_nを求めることができる式であるが，離散フーリエ変換の周期性を考慮すると，右辺の$b_n^{<e>}$と$b_n^{<o>}$は$n = 0,1,\cdots,N-1$に対して求める必要はなく，$n = 0,1,\dots,N/2-1$に対して求めれば十分である．前半のb_n $(n = 0,1,\dots,N/2-1)$は式(8)で計算し，後半の$b_n(n = N/2,\dots,N-1)$は$b_n^{<e>}$と$b_n^{<o>}$の周期性を利用し次式で計算する．

$$b_{N/2+n} = b_n^{<e>} - W^n b_n^{<o>} \qquad (n = 0,1,\dots,N/2-1) \tag{9}$$

例えば$N = 8$の場合について式(8)(9)を書き下すと

$$\begin{aligned}
b_0 &= b_0^{<e>} + W^0 b_0^{<o>} \\
b_1 &= b_1^{<e>} + W^1 b_1^{<o>} \\
b_2 &= b_2^{<e>} + W^2 b_2^{<o>} \\
b_3 &= b_3^{<e>} + W^3 b_3^{<o>} \\
b_4 &= b_0^{<e>} - W^0 b_0^{<o>} \\
b_5 &= b_1^{<e>} - W^1 b_1^{<o>} \\
b_6 &= b_2^{<e>} - W^2 b_2^{<o>} \\
b_7 &= b_3^{<e>} - W^3 b_3^{<o>}
\end{aligned}$$

となる．

3.　二進数による番号付け

高速フーリエ変換では，与えられた数列を，偶数番目の項のみからなる数列と奇数番目の項のみからなる数列に分ける操作を繰り返すことになるが，その際，各項に二進数による番号を付けておくと，並べ替えがしやすくなる（**図-1**）.

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$$
$$\downarrow$$
$$a_0, a_2, a_4, a_6$$
$$a_1, a_3, a_5, a_7$$
$$\downarrow$$
$$a_0, a_4$$
$$a_2, a_6$$
$$a_1, a_5$$
$$a_3, a_7$$
$$\downarrow$$
$$a_0$$
$$a_4$$
$$a_2$$
$$a_6$$
$$a_1$$
$$a_5$$
$$a_3$$
$$a_7$$

$$a_{000}, a_{001}, a_{010}, a_{011}, a_{100}, a_{101}, a_{110}, a_{111}$$
$$\downarrow$$
$$a_{000}, a_{010}, a_{100}, a_{110}$$
$$a_{001}, a_{011}, a_{101}, a_{111}$$
$$\downarrow$$
$$a_{000}, a_{100}$$
$$a_{010}, a_{110}$$
$$a_{001}, a_{101}$$
$$a_{011}, a_{111}$$
$$\downarrow$$
$$a_{000}$$
$$a_{100}$$
$$a_{010}$$
$$a_{110}$$
$$a_{001}$$
$$a_{101}$$
$$a_{011}$$
$$a_{111}$$

図-1　数列の並べ替え（上は十進数の場合，上は二進数の場合）