

多自由度系の応答

野津

1. はじめに

多自由度系 (multi-degree-of-freedom system) とは図-1 に示すように複数の質点と地盤をバネとダッシュポットで結んだものである。多自由度系の応答を計算する方法には、①周波数領域での計算方法、②モード解析法、③時間領域での直接積分法の3つがある。本稿ではこれらについて説明する。周波数領域での計算方法としては非減衰の場合にも対応できる方法として [Phinneyの方法](#) (複素周波数を用いる方法) を紹介する。モード解析法に関しては固有方程式が重根を持つ場合にも対応できる包括的な説明を試みる。直接積分法については代表的な方法である Newmark のβ法について説明する。

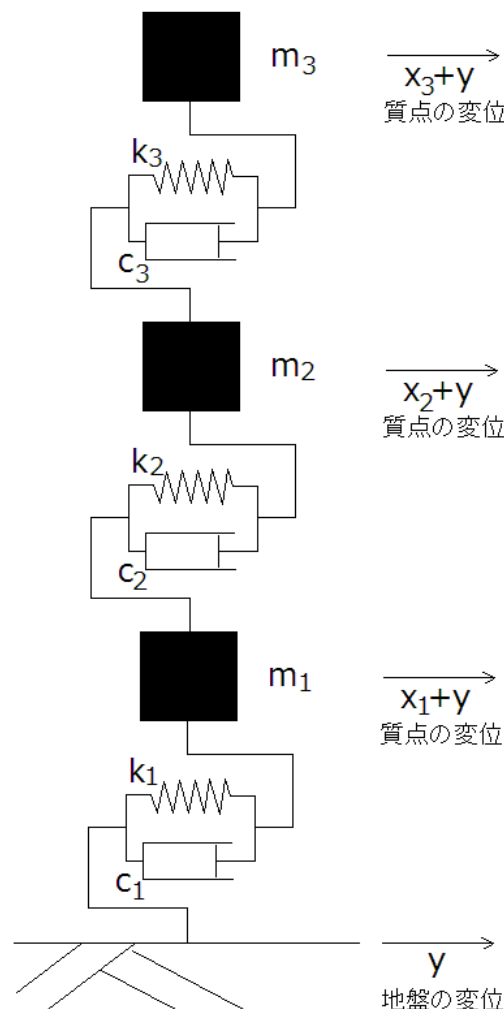


図-1 多自由度系の例

2. 多自由度系の運動方程式

図-1 に示す 3 自由度系について運動方程式を立てると次式となる。

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{y} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここに y は地盤の変位, x_i は地盤に対する質点の相対変位である (図-1). $\dot{}$ は時間に関する一階微分を, $\ddot{}$ は二階微分を表す. これを一般化すると, 多自由度系の運動方程式は次式となる.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = -\mathbf{M}\mathbf{1}\ddot{y} \quad (2)$$

ここに \mathbf{x} は各点の相対変位からなるベクトル, \mathbf{M} は質量マトリクス (mass matrix), \mathbf{C} は減衰マトリクス (damping matrix), \mathbf{K} は剛性マトリクス (stiffness matrix), $\mathbf{1}$ はすべての要素が 1 である列ベクトルである.

3. 周波数領域での計算方法

周波数領域での計算方法としては, 非減衰の場合にも対応できる方法として [Phinney の方法](#) (複素周波数を用いる方法) を紹介する. 複素周波数 ω に対し式(2)の両辺をフーリエ変換すると

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K})\hat{\mathbf{x}} = \omega^2 \mathbf{M}\mathbf{1}\hat{y} \quad (3)$$

となる. ここに $\hat{}$ はフーリエ変換を表す. これを解くことにより $\hat{\mathbf{x}}$ が

$$\hat{\mathbf{x}} = \omega^2 (-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1} \mathbf{M}\mathbf{1}\hat{y} \quad (4)$$

と求まり, これをフーリエ逆変換することで任意の質点の応答が求まる. 非減衰の場合, 実数である ω を用いると, 固有振動数に対応する ω に対して逆行列が計算できなくなってしまうが, 複素周波数を用いることでこの問題点が解消され, 周波数領域での計算方法は汎用的な計算方法となる.

表-1 に示す非減衰の 4 自由度系 ¹⁾ に図-2 の地震動を入力した場合の各質点の相対変位波形を上記の方法で計算した結果を図-3 に示す. この例ではサンプリング間隔は 0.01s, データ長 T は 163.84s, ω の虚部の絶対値は $\lambda = 2\pi/T$ としている. この結果は後に他の計算方法による結果と比較する.

表-1 林・宮島 ¹⁾ によって用いられている 4 自由度系 (元の論文では減衰も考慮している)

i	m_i	k_i
	kg	N/m
1	1.27×10^7	4.90×10^9
2	3.18×10^6	5.44×10^9
3	2.96×10^6	4.31×10^9
4	1.70×10^6	7.25×10^9

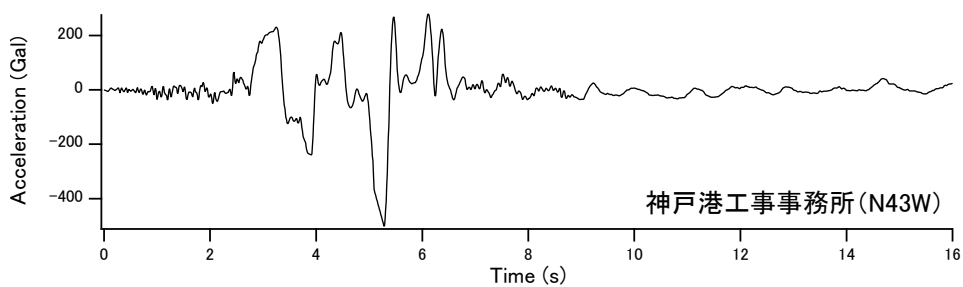


図-2 入力地震動(1995年兵庫県南部地震の際に神戸港工事事務所で観測された加速度波形のN43W成分. 0-16sの拡大図. 波形の数値データは[港湾地域強震観測のホームページ](#)から入手できる)

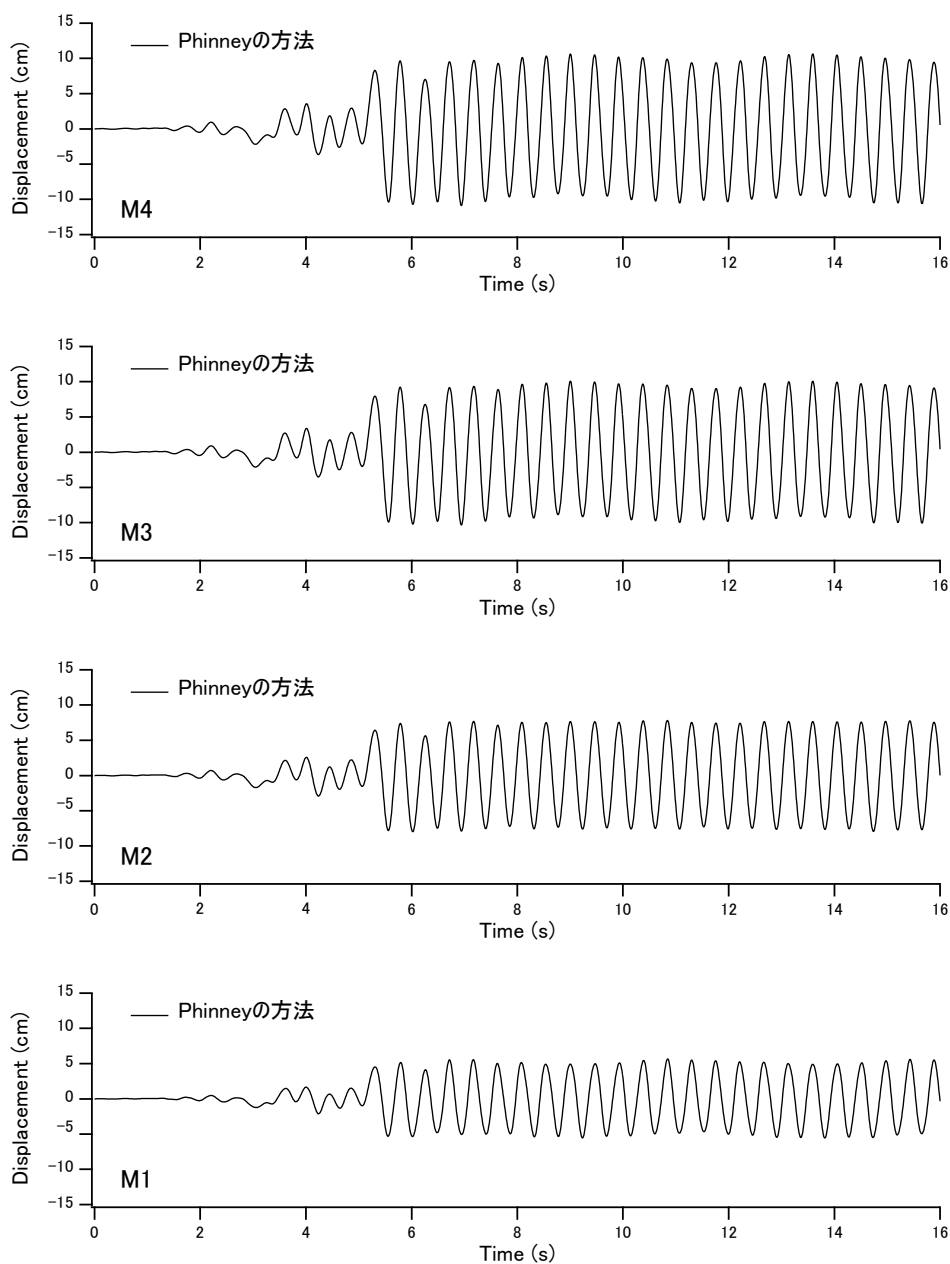


図-3 Phinneyの方法による各質点の相対変位波形の計算結果(0-16sの拡大図)

4. モード解析法

モード解析法は、多自由度系の応答が複数の1自由度系の応答の重ね合わせで表現されることを利用して多自由度系の応答を計算する方法である。モード解析法では非減衰の場合の定式化が基本となっているので、まずこれについて述べる。減衰がある場合の取り扱いについては後の方で述べる。

まず、モード解析法で重要となる**K**と**M**の二つの性質、すなわち対称性と正定値性について先に説明する。なお、この対称性と正定値性に関する記述は、**図-1**に示すような離散的なシステムのみならず、連続的なシステムを離散化して多自由度系の運動方程式を導く場合にも対応できるように、汎用性を持たせた記述としている。

(1) **K**の対称性

離散的なシステムに対しては、**K**の対称性は作用・反作用の法則から考えるのがわかりやすい。一例として**図-1**に示す3自由度系に対しては

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

であり、このうち1行目の赤色に着色した部分はバネ k_2 が質点1に及ぼす力、2行目の赤色に着色した部分はバネ k_2 が質点2に及ぼす力を表す。これらの力は作用・反作用の法則により大きさが等しく向きが反対でなければならないから、赤色に着色した部分是对称となる。同様のことはすべてのバネについて言えるので、**K**は全体として対称となる。

連続的なシステムを離散化して多自由度系の運動方程式を導く場合、**K**の形は離散化の方法によっても変わってくるが、**K**が対称性を有するように離散化を行う場合が多い。例えばはり要素の[要素剛性マトリクス](#)は一般には

$$K_{ij}^e = \int_0^l EI \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2}(x) \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2}(x) dx \quad (6)$$

のように対称となっており、これを重ね合わせて得られる**K**も全体として対称となる。なお式(6)において E はヤング率、 I は断面二次モーメント、 $N_i(x)$ は形状関数、 l ははり要素の長さである。式(6)が対称となっているのは離散化の過程で同じ形状関数が繰り返し用いられている(Galerkin法)からである。前述の離散的なシステムに関する議論を踏まえれば、Galerkin法は作用・反作用の法則を逸脱しない離散化の方法であると言える。

(2) **M**の対称性

図-1に示すような離散的なシステムに対しては**M**は対角行列となるので明らかに対称性を有する。連続的なシステムを離散化して多自由度系の運動方程式を導く場合、**M**の形は離散化の方法によっても変わってくるが、**M**が対称性を有するように離散化を行う場合が多い。例えばはり要素の[整合質量マトリクス](#)は一般には

$$M_{ij}^e = \int_0^l \rho A N_i(x) N_j(x) dx \quad (7)$$

のように対称となっており、これを重ね合わせて得られる**M**も全体として対称となる。なお式(7)において ρ は密度、 A は断面積である。

(3) K の正定値性

大きさが0でない任意の実ベクトル \mathbf{x} に対し $\mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} > 0$ となるとき \mathbf{K} は正定値性を有するという。離散的なシステムに対しては、 \mathbf{K} の正定値性は次のように示すことができる。まず、次式に示す通り \mathbf{K} を複数のバネの寄与の重ね合わせで表現する。

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^1 + \mathbf{K}^2 + \dots + \mathbf{K}^p \quad (8)$$

ここに p はバネの総数である。式(8)より

$$\mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{K}^1 \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{K}^2 \mathbf{x} + \dots + \mathbf{x}^T \mathbf{K}^p \mathbf{x} \quad (9)$$

である。さて、図-1に示すバネはタイプA、タイプBの二つに分けられる。タイプAは二つの質点 i と j を結ぶもので、対応する剛性マトリクス \mathbf{K}^l は式(5)で赤色に着色した部分のようになり、これに対しては

$$\mathbf{x}^T \mathbf{K}^l \mathbf{x} = k_l (x_i - x_j)^2 \quad (10)$$

となる（バネ定数を k_l とした）。一方、タイプBは一つの質点 i と地盤を結ぶもので、対応する剛性マトリクス \mathbf{K}^m は式(5)で緑色に着色した部分のようになり、これに対しては

$$\mathbf{x}^T \mathbf{K}^m \mathbf{x} = k_m x_i^2 \quad (11)$$

となる（バネ定数を k_m とした）。式(10)(11)の右辺はいずれも0以上であるから、式(9)の右辺も0以上すなわち

$$\mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} \geq 0 \quad (12)$$

であることが先ずわかる。そして、等号が成立するのはタイプAのすべてのバネに対して $x_i = x_j$ となり、かつタイプBのすべてのバネに対して $x_i = 0$ となる場合であるが、すべての質点が直接・間接にバネで地盤に結ばれていると仮定すると、この条件は $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ となることと同じである。いま $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ としているのでこの条件は成立しない。よって、すべての質点が直接・間接にバネで地盤に結ばれているとき

$$\mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} > 0 \quad (13)$$

すなわち \mathbf{K} は正定値性を有する。なお、同様の議論を適用すると、すべての質点が直接・間接にダッシュポットで地盤に結ばれているとき、減衰マトリクス \mathbf{C} は正定値性を有することもわかる。

連続的なシステムに対して \mathbf{K} が正定値性を有することを簡単に示す方法としては次のような方法が考えられる。与えられた \mathbf{K} を有する多自由度系に対し、仮想的にダッシュポットを付加し、すべての質点がダッシュポットで直接・間接に地盤に結ばれている状態とする。この多自由度系が自由振動を行う場合の運動方程式は

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = -\mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} \quad (14)$$

であり、左から $\dot{\mathbf{x}}^T$ を乗じると

$$\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{K} \mathbf{x} = -\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} \quad (15)$$

となるが、 \mathbf{M} と \mathbf{K} が対称行列であることを踏まえると、この式は

$$\frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{K} \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{K} \dot{\mathbf{x}} = -\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} \quad (16)$$

すなわち

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} \right) = -\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} \quad (17)$$

となる。ここで系が $t = 0$ で初期条件 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ かつ $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ で自由振動を開始し、減衰の影響で最終的に停止したとする。この間、式(17)右辺は \mathbf{C} の正定値性により常に負であり、式(17)左辺 () 内の最終的な値は 0 であるから、式(17)左辺 () 内の $t = 0$ での値は正でなければならない。 $t = 0$ において式(17)左辺 () 内の第1項は 0 であるから、第2項は正でなければならない。このことは大きさが 0 でないどのようなベクトル \mathbf{x}_0 に対しても言えるから、 \mathbf{K} は正定値性を有する。

(4) \mathbf{M} の正定値性

\mathbf{M} が正定値性を有することを簡単に示す方法として次のような方法が考えられる。与えられた \mathbf{M} を有する多自由度系に対し、仮想的にダッシュポットを付加し、すべての質点がダッシュポットで直接・間接に地盤に結ばれている状態とする。この多自由度系が自由振動を行う場合、先程と同様に式(17)が成立する。系が $t = 0$ で初期条件 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ かつ $\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_0$ で自由振動を開始し、減衰の影響で最終的に停止したとする。この間、式(17)右辺は \mathbf{C} の正定値性により常に負であり、式(17)左辺 () 内の最終的な値は 0 であるから、式(17)左辺 () 内の $t = 0$ での値は先程と同様に正でなければならない。 $t = 0$ において式(17)左辺 () 内の第2項は 0 であるから、第1項は正でなければならない。このことは大きさが 0 でないどのようなベクトル $\dot{\mathbf{x}}_0$ に対しても言えるから、 \mathbf{M} は正定値性を有する。

以上により \mathbf{K} と \mathbf{M} の二つの性質、すなわち対称性と正定値性を確認できたので、これを利用して \mathbf{K} と \mathbf{M} の対角化を行う。まず $\mathbf{M}^{1/2}$ と $\mathbf{M}^{-1/2}$ を求める²⁾。 \mathbf{M} が対角行列の場合は

$$\mathbf{M}^{1/2} = \begin{bmatrix} m_1^{1/2} & & \\ & \ddots & \\ & & m_n^{1/2} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\mathbf{M}^{-1/2} = \begin{bmatrix} m_1^{-1/2} & & \\ & \ddots & \\ & & m_n^{-1/2} \end{bmatrix} \quad (19)$$

とすれば良い。 \mathbf{M} が対角行列でない場合は、 \mathbf{M} が実対称行列であることを利用し、「実対称行列は直交行列により対角化可能である」という性質（付録A参照）を利用して次式の通り \mathbf{M} を対角化する。

$$\mathbf{W}^T \mathbf{M} \mathbf{W} = \begin{bmatrix} p_1 & & \\ & \ddots & \\ & & p_n \end{bmatrix} \quad (20)$$

ここに \mathbf{W} は直交行列、 $p_1 \sim p_n$ は \mathbf{M} の固有値である（付録A参照）。 \mathbf{M} は正定値行列であるから、 \mathbf{M} の固有値である $p_1 \sim p_n$ はすべて正である（付録C参照）。したがって、 $\mathbf{M}^{1/2}$ と $\mathbf{M}^{-1/2}$ は次式で与えられる。

$$\mathbf{M}^{1/2} = \mathbf{W} \begin{bmatrix} p_1^{1/2} & & \\ & \ddots & \\ & & p_n^{1/2} \end{bmatrix} \mathbf{W}^T \quad (21)$$

$$\mathbf{M}^{-1/2} = \mathbf{W} \begin{bmatrix} p_1^{-1/2} & & \\ & \ddots & \\ & & p_n^{-1/2} \end{bmatrix} \mathbf{W}^T \quad (22)$$

実際に式(20)の対角化を行うには Jacobi 法 (付録 D 参照) などの方法を用いればよい. ここで得られた $\mathbf{M}^{1/2}$ と $\mathbf{M}^{-1/2}$ は実対称行列である.

次に次式により行列 \mathbf{A} を定義する.

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1/2} \quad (23)$$

\mathbf{K} と $\mathbf{M}^{-1/2}$ が実対称行列であることから, \mathbf{A} も実対称行列である. また, \mathbf{A} は正定値行列である. これは次のように示すことができる. 大きさが 0 でない任意の実ベクトル \mathbf{x} に対し

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{x} \quad (24)$$

である. ここで

$$\mathbf{y} = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{x} \quad (25)$$

とおくと

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{K} \mathbf{y} \quad (26)$$

となる. \mathbf{K} は正定値行列であり, \mathbf{y} は大きさが 0 でない実ベクトルであるから, 式(26)の右辺は正である. よって \mathbf{A} は正定値行列である.

\mathbf{A} は実対称行列であるから, 次式のような対角化が可能である (付録 A 参照).

$$\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{\Lambda} \quad (27)$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (28)$$

ここに \mathbf{U} は直交行列, $\lambda_1 \sim \lambda_n$ は \mathbf{A} の固有値である (付録 A 参照). \mathbf{A} は正定値行列であるから, \mathbf{A} の固有値である $\lambda_1 \sim \lambda_n$ はすべて正である (付録 C 参照). そこで, これらの平方根を $\omega_1 \sim \omega_n$ とする. これらは固有円振動数と呼ばれる. これらを用いると

$$\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{\Omega}^2 \quad (29)$$

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_n \end{bmatrix} \quad (30)$$

となる。 $\omega_1 \sim \omega_n$ の中に重複するものがあってもこのような対角化は可能である。 実際に対角化を行うには Jacobi 法 (付録 D 参照) などの方法を用いればよい。

ここでモード行列 Φ を

$$\Phi = M^{-1/2} U \quad (31)$$

により定義する。 式(31)より

$$\Phi^T = U^T M^{-1/2} \quad (32)$$

である。 そして、非減衰の場合の多自由度系の運動方程式

$$M\ddot{x} + Kx = -M1\ddot{y} \quad (33)$$

において

$$q = \Phi^{-1}x \quad (34)$$

とおく。 q は一般化座標と呼ばれる。 式(34)より

$$x = \Phi q \quad (35)$$

である。 これを式(33)に代入すると

$$M\Phi\ddot{q} + K\Phi q = -M1\ddot{y} \quad (36)$$

となり、左から Φ^T を乗じると

$$\Phi^T M \Phi \ddot{q} + \Phi^T K \Phi q = -\Phi^T M 1 \ddot{y} \quad (37)$$

となる。 ここで式(23)(29)(31)(32)を用いれば式(37)は

$$\ddot{q} + \Omega^2 q = -\Phi^T M 1 \ddot{y} \quad (38)$$

となる。 式(38)は n 本の独立な方程式

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = -\beta_i \ddot{y} \quad (39)$$

を表している。 ここに

$$\beta_i = \sum_{j=1}^n (\Phi^T M)_{ij} \quad (40)$$

は刺激係数 (participation factor) と呼ばれる。 β_i の自乗の総和は系に含まれる全質量となる (付録 E 参照)。 式(39)は非減衰の場合の [1 自由度系の運動方程式](#) と同じ形をしているので、[Nigam の方法](#) などにより q_i を求

めることができ、これを式(35)に代入することで x_i を求めることができる。式(35)では x は Φ の各列の重ね合わせで表現されている。 Φ の各列を固有モードと呼ぶ。

表-1 に示す非減衰の 4 自由度系 η に図-2 の地震動を入力した場合の各質点の相対変位波形を上記の方法で計算した結果を Phinney の方法による結果と比較して図-4 に示す。この例では固有値解析には Jacobi 法(付録 D 参照)を用い、非対角項の絶対値の最大値が初期値の 10^{-6} 倍未満となったところで計算を打ち切っている。各モードの計算には [Nigam の方法](#)を用いている。サンプリング間隔は 0.01s である。図-4 よりモード解析法による結果と Phinney の方法による結果は完全に一致していることがわかる。

減衰がある場合は、減衰マトリクスがモード解析法で扱いやすい特定の形をしていると考えることが多い。その代表的なものが次式に示す Rayleigh 減衰である。

$$C = a_0 M + a_1 K \quad (41)$$

これを一般化したものが次式に示す Caughey 減衰³⁾である。

$$C = M \sum_{l=0}^{n-1} a_l (M^{-1}K)^l \quad (42)$$

Caughey 減衰の最初の 2 つの項を採用したものが Rayleigh 減衰である。式(42)の C は上記において M と K を対角化したのと同様の手順により対角化できる。実際、式(23)(29)(31)より

$$(M^{-1}K)\Phi = \Phi\Omega^2 \quad (43)$$

であり、これを繰り返し用いることで

$$(M^{-1}K)^l \Phi = \Phi\Omega^{2l} \quad (44)$$

が得られる。これと式(42)より

$$\Phi^T C \Phi = \sum_{l=0}^{n-1} a_l \Phi^T M (M^{-1}K)^l \Phi = \sum_{l=0}^{n-1} a_l \Phi^T M \Phi \Omega^{2l} = \sum_{l=0}^{n-1} a_l \Omega^{2l} \quad (45)$$

となる。これを用い、減衰を含む場合の多自由度系の運動方程式を対角化すると、各モードの運動方程式は次式となる。

$$\ddot{q}_i + (\sum_{l=0}^{n-1} a_l \omega_i^{2l}) \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = -\beta_i \ddot{y} \quad (46)$$

式(46)は減衰を含む場合の [1 自由度系の運動方程式](#)と同じ形をしているので、[Nigam の方法](#)などにより q_i を求めることができ、これを式(35)に代入することで x_i を求めることができる。

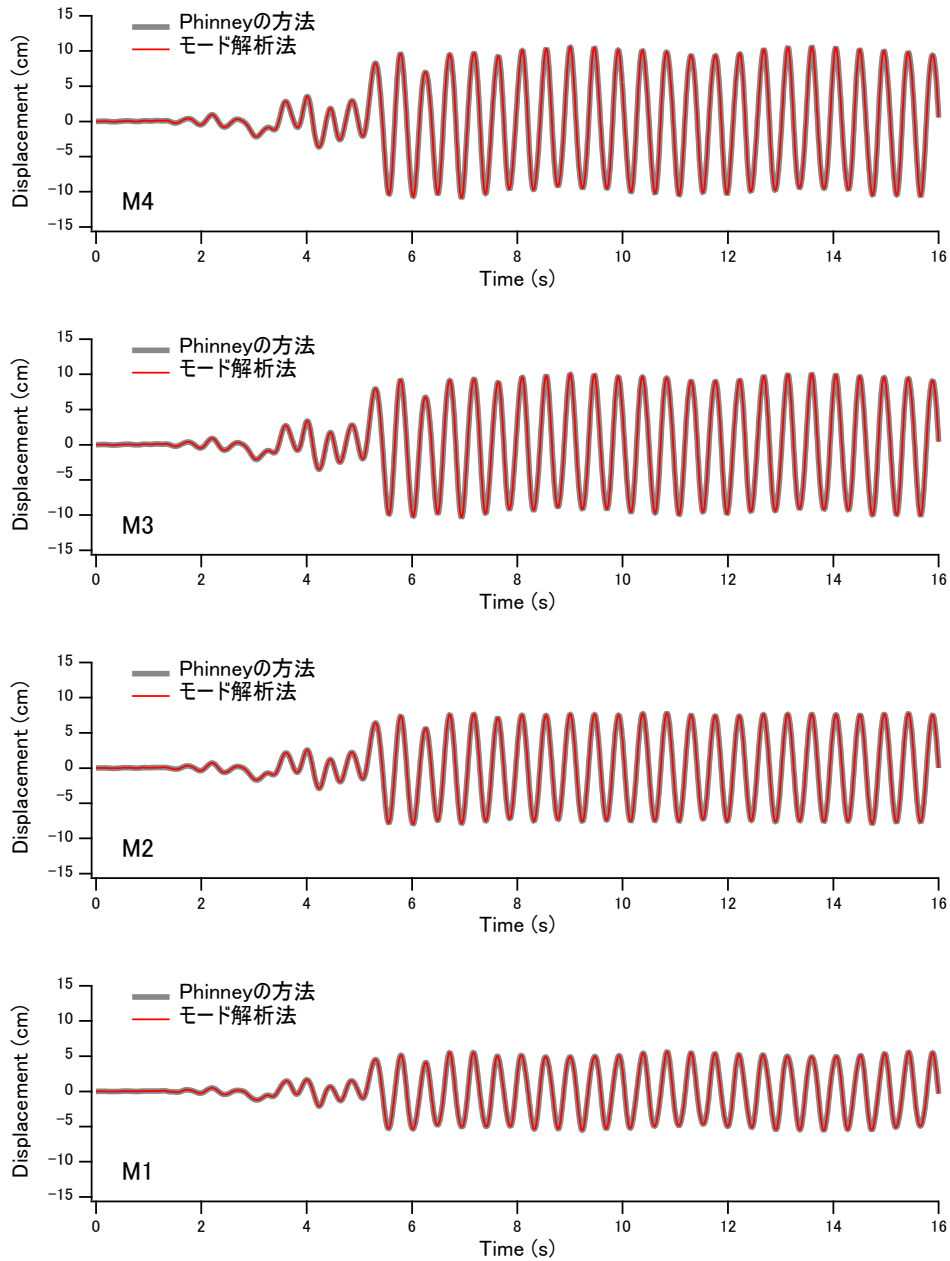


図-4 モード解析法による各質点の相対変位波形の計算結果（Phinneyの方法との比較）
（0-16sの拡大図）

5. 時間領域での直接積分法

時間領域での直接積分法については代表的な方法である Newmark のβ法⁴⁾について説明する．この方法は時間軸に沿って逐次応答を計算していく方法であり，第*i*ステップ目の相対加速度，相対速度，相対変位と第*i*+1ステップ目の相対加速度を用い，第*i*+1ステップ目の相対速度，相対変位を次式で近似する．

$$\dot{\mathbf{x}}_{i+1} = \dot{\mathbf{x}}_i + (1 - \gamma)\Delta t \ddot{\mathbf{x}}_i + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \quad (47)$$

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \Delta t \dot{\mathbf{x}}_i + (0.5 - \beta)\Delta t^2 \ddot{\mathbf{x}}_i + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \quad (48)$$

これらを*i*+1ステップ目の運動方程式

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}_{i+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}_{i+1} + \mathbf{K}\mathbf{x}_{i+1} = -\mathbf{M}\mathbf{1}\ddot{y}_{i+1} \quad (49)$$

に代入すると

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}_{i+1} + \mathbf{C}(\dot{\mathbf{x}}_i + (1 - \gamma)\Delta t \ddot{\mathbf{x}}_i + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{x}}_{i+1}) + \mathbf{K}(\mathbf{x}_i + \Delta t \dot{\mathbf{x}}_i + (0.5 - \beta)\Delta t^2 \ddot{\mathbf{x}}_i + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{x}}_{i+1}) = -\mathbf{M}\mathbf{1}\ddot{y}_{i+1} \quad (50)$$

となる．これを整理することにより， $\ddot{\mathbf{x}}_{i+1}$ を求める式は次式となる．

$$\ddot{\mathbf{x}}_{i+1} = (\mathbf{M} + \gamma \Delta t \mathbf{C} + \beta \Delta t^2 \mathbf{K})^{-1} (-\mathbf{M}\mathbf{1}\ddot{y}_{i+1} - \mathbf{C}(\dot{\mathbf{x}}_i + (1 - \gamma)\Delta t \ddot{\mathbf{x}}_i) - \mathbf{K}(\mathbf{x}_i + \Delta t \dot{\mathbf{x}}_i + (0.5 - \beta)\Delta t^2 \ddot{\mathbf{x}}_i)) \quad (51)$$

また，求めた結果を式(47)(48)に代入することで $\dot{\mathbf{x}}_{i+1}$ と \mathbf{x}_{i+1} が求まる． γ は1/2， β は $1/6 \leq \beta \leq 1/4$ の範囲の値とすることが一般的である．

表-1 に示す非減衰の4自由度系¹⁾に図-2の地震動を入力した場合の各質点の相対変位波形を上記の方法で計算した結果を Phinney の方法による結果と比較して図-5 および図-6 に示す．図-5 は $\beta = 1/6$ とした場合の結果，図-6 は $\beta = 1/4$ とした場合の結果である．サンプリング間隔は0.01sである．Newmark のβ法では計算結果に多少の位相の遅れが生じることが知られており，図-5 と図-6 にはその影響が表れている．図-5 と図-6 を比較すると $\beta = 1/6$ の場合の方が位相の遅れは小さいことがわかる．

6. おわりに

本稿では多自由度系の応答を計算する手法として①周波数領域での計算方法，②モード解析法，③時間領域での直接積分法の3つを紹介してきた．周波数領域での計算方法は簡単で計算精度も良いので線形の問題を対象とする場合はお薦めできる方法である．モード解析法は理論的に最も複雑であり，プログラミングも相対的に時間がかかるが，計算結果をモード毎に分けて分析するなどの特別なニーズに対応できるメリットがある．非線形の問題を対象とする場合は時間領域での直接積分法が唯一の選択肢となる．

参考文献

- 1) 林聡・宮島信雄：各種係船岸の振動性状に関する研究（第1報）－神戸港第7突堤の振動性状について－，運輸技術研究所報告，第11巻，第1号，pp.1-28，1961年．
- 2) 柴田明德：最新耐震構造解析，第2版，森北出版，2003年．
- 3) Caughey, T.K. and M.E.J. O'Kelly: Classical normal modes in damped linear dynamic systems, Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol.32, pp.583-588, 1965.
- 4) Newmark, N.M.: A method of computation for structural dynamics, Proc. ASCE, Vol.85, No.EM3, pp.67-94, 1959.

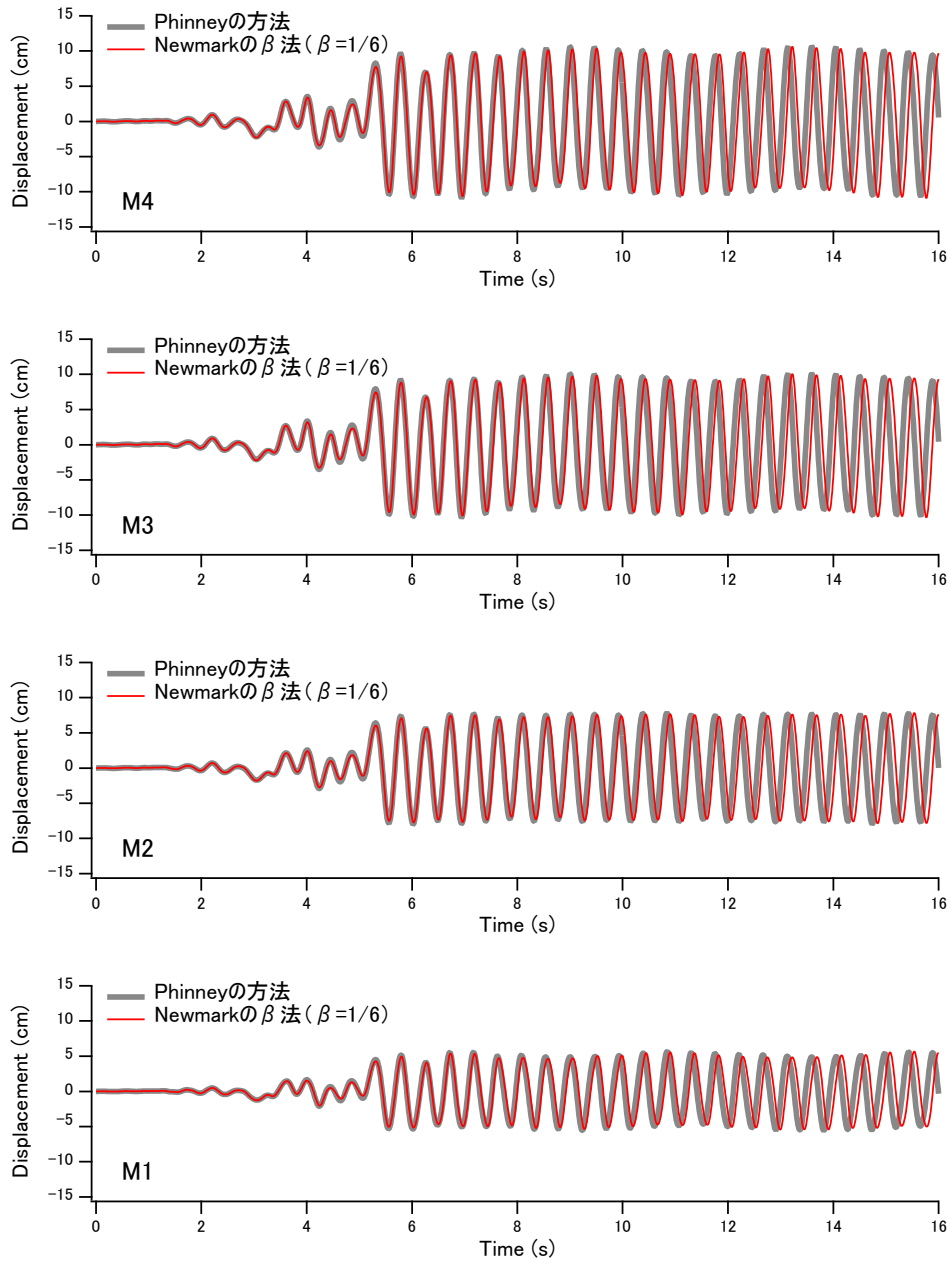


図-5 Newmark の β 法 ($\beta = 1/6$) による各質点の相対変位波形の計算結果 (Phinney の方法との比較)
(0-16s の拡大図)

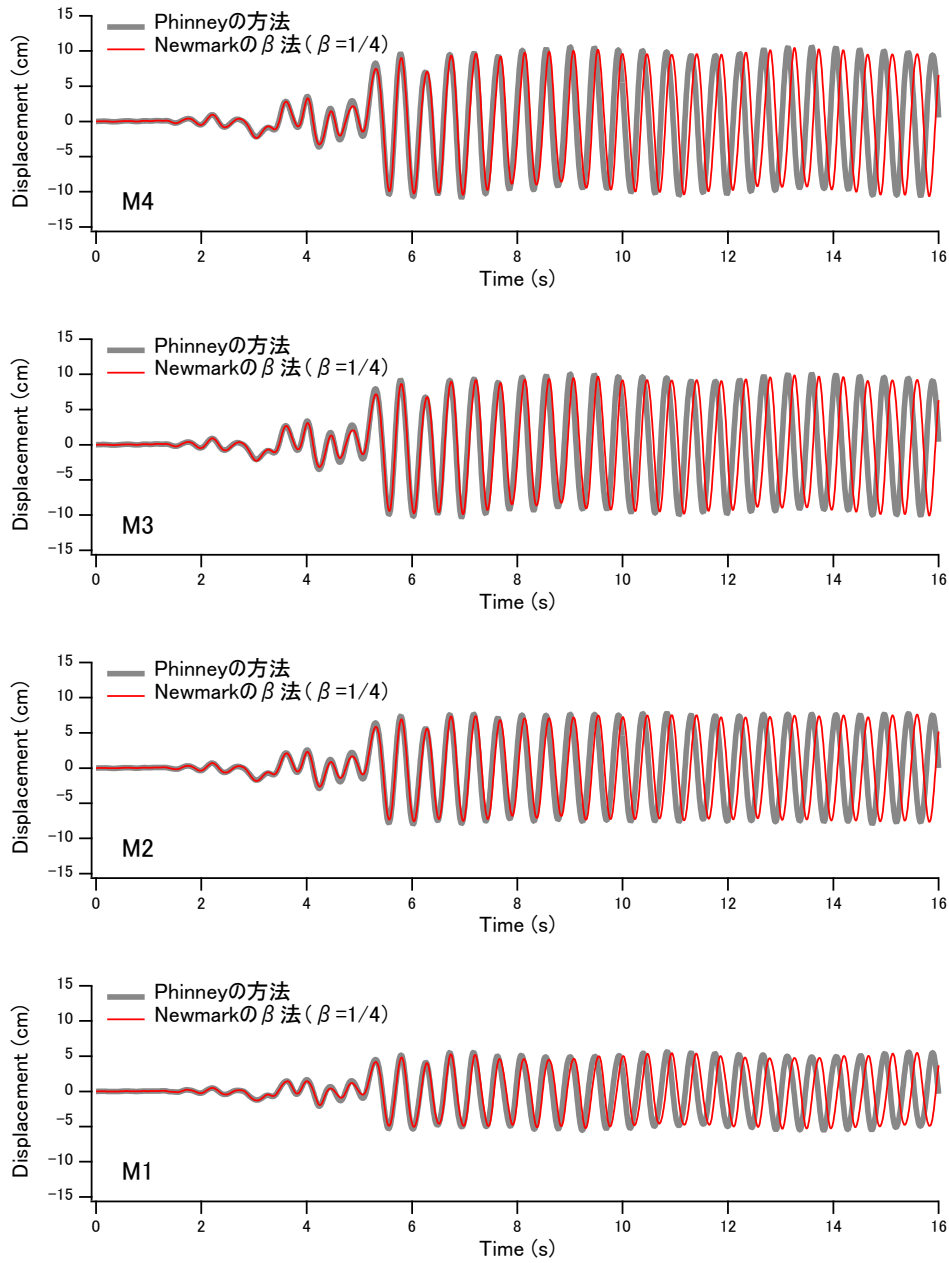


図-6 Newmark の β 法 ($\beta = 1/4$) による各質点の相対変位波形の計算結果 (Phinney の方法との比較)
(0-16s の拡大図)

付録 A 実対称行列は直交行列により対角化可能である¹⁾

$n \times n$ の実正方行列 \mathbf{U} が以下のいずれかの条件を満足するとき \mathbf{U} を直交行列という.

1) $\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^{-1}$

2) \mathbf{U} の n 本の列ベクトルが正規直交基底をなす

3) \mathbf{U} の n 本の行ベクトルが正規直交基底をなす

1)~3)の条件はすべて同値である. これは次のようにして示すことができる. 1)は $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}$ と同値であり (\mathbf{I} は単位行列), これを成分で書けば

$$U_{ki}U_{kj} = \delta_{ij} \tag{A1}$$

となる. ここに δ_{ij} はクロネッカーのデルタであり, 添え字には総和規約を適用する. 式(A1)は \mathbf{U} の第 i 列と第 j 列の列ベクトルの内積が δ_{ij} であることを示している. すなわち 1)と 2)の条件は同値である. 同様に 1)は $\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{I}$ と同値であり, これを成分で書けば

$$U_{ik}U_{jk} = \delta_{ij} \tag{A2}$$

となる. 式(A2)は \mathbf{U} の第 i 行と第 j 行の行ベクトルの内積が δ_{ij} であることを示している. すなわち 1)と 3)の条件は同値である.

$n \times n$ の実対称行列は直交行列により対角化可能である. すなわち, 実対称行列を \mathbf{A} とすると,

$$\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{\Lambda} \tag{A3}$$

となるような直交行列 \mathbf{U} と対角行列 $\mathbf{\Lambda}$ が存在する. これは次のように帰納法で示すことができる¹⁾.

まず, $n = 1$ のとき, どのような実対称行列でも直交行列 $\mathbf{U} = 1$ により対角化可能である.

次に, $n = k - 1$ のとき実対称行列が直交行列により対角化可能であることを仮定し, $n = k$ のときにも実対称行列が直交行列により対角化可能であることを示す. $k \times k$ の実対称行列 \mathbf{A} の固有値の一つを λ_1 , 対応する固有ベクトルを \mathbf{r}_1 とする.

$$\mathbf{A}\mathbf{r}_1 = \lambda_1 \mathbf{r}_1 \tag{A4}$$

付録 B に示す通り λ_1 は実数であり, \mathbf{r}_1 としては実ベクトルを選択することができる. ここでは \mathbf{r}_1 を大きさ 1 のベクトルとする. ここで, \mathbf{r}_1 を含むような正規直交基底 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_k$ を設定する. このような正規直交基底は必ず設定することができる. その理由は次の通りである. k 次のベクトル空間 V の基底を $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_k$ とする. \mathbf{r}_1 はこれらの線形結合として

$$\mathbf{r}_1 = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_k \mathbf{v}_k \tag{A5}$$

のように表される. いま \mathbf{r}_1 の大きさはゼロではないので, $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k$ のどれかはゼロでないはずである. そこで仮に c_1 がゼロでないとし, \mathbf{v}_1 を \mathbf{r}_1 で置き換えた $\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_k$ が線形独立であることを示す. いま係数 $d_i (i = 1, 2, \dots, k)$ が

$$d_1 \mathbf{r}_1 + d_2 \mathbf{v}_2 + \dots + d_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0} \tag{A6}$$

を満たすと仮定する. 式(A5)を式(A6)に代入すると

$$c_1 d_1 \mathbf{v}_1 + (d_2 + c_2 d_1) \mathbf{v}_2 + \dots + (d_k + c_k d_1) \mathbf{v}_k = 0 \quad (\text{A7})$$

となるが、 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_k$ は線形独立であるから係数はすべてゼロ、すなわち

$$\begin{aligned} c_1 d_1 &= 0 \\ d_2 + c_2 d_1 &= 0 \\ &\dots \\ d_k + c_k d_1 &= 0 \end{aligned}$$

である。これより

$$d_1 = d_2 = \dots = d_k = 0 \quad (\text{A8})$$

が得られる。式(A6)を満たす d_i がすべてゼロとなることがわかったので、 $\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_k$ は線形独立である。以上により、 \mathbf{r}_1 を含む k 本の線形独立なベクトルを設定できることがわかった。次に、 $\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_k$ にグラム・シュミットの直交化法²⁾を適用する。すなわち $\mathbf{r}_j (j = 2, \dots, k)$ を次式で定義する。

$$\mathbf{r}_j = (\mathbf{v}_j - \sum_{i=1}^{j-1} (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{v}_j) \mathbf{r}_i) / \|\mathbf{v}_j - \sum_{i=1}^{j-1} (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{v}_j) \mathbf{r}_i\| \quad (\text{A9})$$

ここに \cdot はベクトルの内積を、 $\|\cdot\|$ はベクトルの大きさを表す。 $\mathbf{r}_j (j = 2, \dots, k)$ の大きさが1であることは明らかである。また、 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_k$ が互いに直交するベクトルであることは次のように帰納法で示すことができる。まず $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_{j-1}$ が互いに直交するベクトルであるとする。このとき \mathbf{r}_j と $\mathbf{r}_l (l = 1, \dots, j-1)$ の内積をとれば

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_l &= (\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{r}_l - \sum_{i=1}^{j-1} (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{v}_j) (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_l)) / \|\mathbf{v}_j - \sum_{i=1}^{j-1} (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{v}_j) \mathbf{r}_i\| \\ &= (\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{r}_l - \sum_{i=1}^{j-1} (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{v}_j) \delta_{il}) / \|\mathbf{v}_j - \sum_{i=1}^{j-1} (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{v}_j) \mathbf{r}_i\| \\ &= (\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{r}_l - \mathbf{r}_l \cdot \mathbf{v}_j) / \|\mathbf{v}_j - \sum_{i=1}^{j-1} (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{v}_j) \mathbf{r}_i\| \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるので $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_j$ は互いに直交するベクトルである。よって $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_k$ は互いに直交するベクトルである。以上により、 \mathbf{r}_1 を含む正規直交基底 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_k$ を設定できることが確認された。

そこで、 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_k$ を並べた行列を \mathbf{R} とする。 \mathbf{R} は列ベクトルが正規直交基底をなす行列であるから直交行列である。ここで基本ベクトル \mathbf{e}_1 を $\mathbf{e}_1^T = (1, 0, 0, \dots, 0)$ で定義すると \mathbf{R} の定義により

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} \mathbf{e}_1 \quad (\text{A10})$$

である。これを式(A4)に代入すると

$$\mathbf{A} \mathbf{R} \mathbf{e}_1 = \lambda_1 \mathbf{R} \mathbf{e}_1 \quad (\text{A11})$$

であり、左から \mathbf{R}^T をかけると

$$\mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R} \mathbf{e}_1 = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \quad (\text{A12})$$

となる ($\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$ なので). 式(A12)は基本ベクトル \mathbf{e}_1 が $\mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R}$ の固有値 λ_1 の固有ベクトルであることを示している. このことから, $\mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R}$ は次のような形の行列でなければならないことがわかる.

$$\mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{bmatrix} \quad (\text{A13})$$

一方, \mathbf{A} は対称行列であるから, $\mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R}$ も対称行列である. したがって $\mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R}$ の形はより限定され,

$$\mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{bmatrix} \quad (\text{A14})$$

のような形でなければならないことがわかる. 上の行列で

$$\begin{bmatrix} * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & \dots & * \end{bmatrix}$$

の部分は $(k-1) \times (k-1)$ の実対称行列であり, これを \mathbf{A}_{k-1} と書くことにすれば

$$\mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{A}_{k-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \quad (\text{A15})$$

である. さて, 仮定により $(k-1) \times (k-1)$ の実対称行列は対角化可能である. すなわち

$$\mathbf{R}_{k-1}^T \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{R}_{k-1} = \mathbf{A}_{k-1} \quad (\text{A16})$$

となるような直交行列 \mathbf{R}_{k-1} と対角行列 \mathbf{A}_{k-1} が存在する. そこでこの \mathbf{R}_{k-1} を用いて $\overline{\mathbf{R}}_k$ を

$$\overline{\mathbf{R}}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{R}_{k-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \quad (\text{A17})$$

で定義すると,

$$\overline{\mathbf{R}}_k^T \overline{\mathbf{R}}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{R}_{k-1}^T & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{R}_{k-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{R}_{k-1}^T \mathbf{R}_{k-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} = \mathbf{I} \quad (\text{A18})$$

が成立するので $\overline{\mathbf{R}}_k$ は直交行列である. これを用いると,

$$\overline{\mathbf{R}}_k^T \mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R} \overline{\mathbf{R}}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{R}_{k-1}^T & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{A}_{k-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{R}_{k-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{R}_{k-1}^T \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{R}_{k-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{A}_{k-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \quad (\text{A19})$$

となる. そこで

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}\overline{\mathbf{R}}_k \quad (\text{A20})$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{\Lambda}_{k-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \quad (\text{A21})$$

とおけば

$$\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{\Lambda} \quad (\text{A3})\text{再掲}$$

となる. \mathbf{U} は直交行列同士の積なので直交行列である. よって $k \times k$ の実対称行列は対角化可能である. 以上により帰納法により実対称行列は直交行列により対角化可能であることが示された.

さて, 式(A3)を変形すると

$$\mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \quad (\text{A22})$$

となり, j 列目の式に着目すれば

$$\mathbf{A} \mathbf{u}_j = \lambda_j \mathbf{u}_j \quad (\text{A23})$$

となる. ここに \mathbf{u}_j は \mathbf{U} の j 本目の列ベクトル, λ_j は $\mathbf{\Lambda}$ の j 番目の対角項である. 式(A23)より, $\mathbf{\Lambda}$ の対角項 (すなわち $\mathbf{\Lambda}$ の固有値) は \mathbf{A} の固有値であること, \mathbf{U} の各列が対応する固有ベクトルであることがわかる. 逆に $\mathbf{\Lambda}$ の対角項以外に \mathbf{A} の固有値は存在しないことも以下のように示される. \mathbf{A} の任意の固有値を λ , 対応する固有ベクトルを \mathbf{x} とすれば

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \quad (\text{A24})$$

であるが,

$$\mathbf{x} = \mathbf{U} \mathbf{y} \quad (\text{A25})$$

により \mathbf{y} を定義すれば

$$\mathbf{A} \mathbf{U} \mathbf{y} = \lambda \mathbf{U} \mathbf{y} \quad (\text{A26})$$

であり, 左から \mathbf{U}^T をかけると

$$\mathbf{\Lambda} \mathbf{y} = \lambda \mathbf{y} \quad (\text{A27})$$

となる. したがって \mathbf{A} の任意の固有値は必ず $\mathbf{\Lambda}$ の固有値 ($\mathbf{\Lambda}$ の対角項) となっている.

行列 \mathbf{A} の固有値の中に重複するものがあるかどうかに関わらず式(A3)に示すような対角化が可能であることは記憶に値する.

参考文献

- 1) 理数アラカルト：実対称行列の4つの大切な性質, <https://risalc.info/src/real-symmetric-matrix.html>.
- 2) 理数アラカルト：グラム・シュミットの直交化法, <https://risalc.info/src/Gram-Schmidt.html>.

付録 B 実対称行列の固有値は実数である

$n \times n$ の実対称行列 \mathbf{A} の任意の固有値を λ , 対応する固有ベクトルを $\mathbf{u}(\neq \mathbf{0})$ とすれば

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \quad (\text{B1})$$

であり, 左から $\bar{\mathbf{u}}^T$ をかけると (ここに $\bar{}$ は複素共役を表す)

$$\bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{u} \quad (\text{B2})$$

である. 一方, 式(B1)の複素共役をとると

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{u}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{u}} \quad (\text{B3})$$

であり (\mathbf{A} は実行列であることを用いた), さらに転置をとると

$$\bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{A} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{u}}^T \quad (\text{B4})$$

であり (\mathbf{A} は対称行列であることを用いた), 右から \mathbf{u} をかけると

$$\bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{A}\mathbf{u} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{u} \quad (\text{B5})$$

である. 式(B2)(B5)より

$$(\lambda - \bar{\lambda})\bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{u} = 0 \quad (\text{B6})$$

である. ここで \mathbf{u} の成分を $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ とすれば

$$\bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{u} = \bar{u}_1 u_1 + \bar{u}_2 u_2 + \dots + \bar{u}_n u_n = |u_1|^2 + |u_2|^2 + \dots + |u_n|^2 \quad (\text{B7})$$

であり, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ であることから, $\bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{u} > 0$ である. よって式(B6)より $\lambda = \bar{\lambda}$ すなわち λ は実数である.

付録 C 正定値行列の固有値は正である

$n \times n$ の実対称行列 \mathbf{A} が以下のいずれかの条件を満足するとき \mathbf{A} を正定値行列という。

1) 大きさが 0 でない任意の実ベクトル \mathbf{x} に対して $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$

2) \mathbf{A} の固有値がすべて正

1)2)の条件は同値である。これは次のようにして示すことができる。

まず 1) が成立するとき、 \mathbf{A} の任意の固有値を λ 、対応する固有ベクトルを \mathbf{u} とすれば

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u} \quad (\text{C1})$$

である。付録 B に示す通り λ は実数であり、 \mathbf{u} としては実ベクトルを選択することができる。ここでは \mathbf{u} を大きさが 1 のベクトルとする。式(C1)に左から \mathbf{u}^T をかけると

$$\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}^T \mathbf{u} = \lambda \quad (\text{C2})$$

であるが、1)の条件より $\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u} > 0$ であるから $\lambda > 0$ である。

次に 2) が成立するとき、 \mathbf{A} の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ 、固有ベクトル (大きさが 1) を $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_n$ とすると、大きさが 0 でない任意の実ベクトル \mathbf{x} は $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_n$ の線形結合で

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_n \mathbf{u}_n \quad (\text{C3})$$

と表すことができる。これより、固有ベクトルの直交性 (付録 A) を考慮すると

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} &= (c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_n \mathbf{u}_n)^T \mathbf{A} (c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_n \mathbf{u}_n) \\ &= (c_1 \mathbf{u}_1^T + c_2 \mathbf{u}_2^T + \dots + c_n \mathbf{u}_n^T) (\lambda_1 c_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \lambda_n c_n \mathbf{u}_n) \\ &= \lambda_1 c_1^2 + \lambda_2 c_2^2 + \dots + \lambda_n c_n^2 \end{aligned} \quad (\text{C4})$$

となるが、2)の条件より $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ はすべて正であり、かつ、 \mathbf{x} の大きさが 0 でないという条件から $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ のいずれかは 0 でないため $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ である。

付録D Jacobi 法

$n \times n$ の実対称行列の対角化を行うための実際的な方法の一つに Jacobi 法がある. Jacobi 法では, 与えられた実対称行列の非対角成分のうち絶対値の最も大きいものに着目し, この成分を 0 とするような操作を繰り返し行うことで, 対角化を行う方法である.

操作前の行列を \mathbf{A} とし, 操作後の行列を \mathbf{A}' とする. \mathbf{A} の非対角成分のうち絶対値の最も大きいものが pq 成分 ($p < q$) であるとき, $n \times n$ の単位行列において pp 成分を $\cos \theta$ に, pq 成分を $\sin \theta$ に, qp 成分を $-\sin \theta$ に, qq 成分を $\cos \theta$ に置き換えた行列

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{D1})$$

を考え,

$$\mathbf{A}' = \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} \quad (\text{D2})$$

のような操作を行うことで \mathbf{A}' を求める. θ は \mathbf{A}' の pq 成分が 0 となるように設定する (後述). ここで

$$\mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{D3})$$

であるから

$$\mathbf{P}^T \mathbf{P} = \mathbf{I} \quad (\text{D4})$$

である. すなわち \mathbf{P} は直交行列である. 式(D2)の操作を行うと, \mathbf{A}' の成分は次の通りとなる.

$$A'_{pp} = \cos^2 \theta A_{pp} - 2 \sin \theta \cos \theta A_{pq} + \sin^2 \theta A_{qq} \quad (\text{D5})$$

$$A'_{pq} = \sin 2\theta \frac{1}{2} (A_{pp} - A_{qq}) + \cos 2\theta A_{pq} \quad (\text{D6})$$

$$A'_{qp} = A'_{pq} \quad (\text{D7})$$

$$A'_{qq} = \sin^2 \theta A_{pp} + 2 \sin \theta \cos \theta A_{pq} + \cos^2 \theta A_{qq} \quad (\text{D8})$$

$$A'_{pj} = \cos \theta A_{pj} - \sin \theta A_{qj} \quad (j \neq p, j \neq q) \quad (\text{D9})$$

$$A'_{qj} = \sin \theta A_{pj} + \cos \theta A_{qj} \quad (j \neq p, j \neq q) \quad (\text{D10})$$

$$A'_{ip} = \cos \theta A_{ip} - \sin \theta A_{iq} \quad (i \neq p, i \neq q) \quad (\text{D11})$$

$$A'_{iq} = \sin \theta A_{ip} + \cos \theta A_{iq} \quad (i \neq p, i \neq q) \quad (\text{D12})$$

これ以外の成分は操作の前後で変化しない. $A'_{pq} = A'_{qp} = 0$ とするためには

$$\alpha = \frac{1}{2}(A_{pp} - A_{qq}) \quad (\text{D13})$$

$$\beta = -A_{pq} \quad (\text{D14})$$

とおいて図-D1 の角度を 2θ とすればよい。

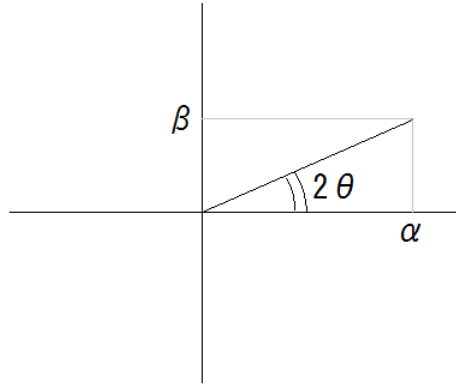


図-D1 図の角度を 2θ とすればよい

操作を始める前の行列を \mathbf{A} , k 回目の操作に用いる行列を \mathbf{P}_k とすると

$$\mathbf{P}_n^T \cdots \mathbf{P}_3^T \mathbf{P}_2^T \mathbf{P}_1^T \mathbf{A} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \cdots \mathbf{P}_n = \mathbf{\Lambda} \quad (\text{D15})$$

のような形で行列が対角化される ($\mathbf{\Lambda}$ は対角行列). ここで改めて

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \cdots \mathbf{P}_n \quad (\text{D16})$$

とおくと \mathbf{P} は直交行列の積であるから直交行列である. $\mathbf{\Lambda}$ の対角項に並んでいる値が行列 \mathbf{A} の固有値であり, \mathbf{P} の各列が対応する固有ベクトルである (付録 A).

付録 E 有効質量比

本文の式(40)より β_i は次の二通りに書ける.

$$\beta_i = \sum_{j=1}^n (\Phi^T \mathbf{M})_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \Phi^T_{ik} M_{kj} \quad (\text{E1})$$

$$\beta_i = \sum_{l=1}^n (\Phi^T \mathbf{M})_{il} = \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \Phi^T_{im} M_{ml} \quad (\text{E2})$$

これより

$$\sum_{i=1}^n \beta_i^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \Phi^T_{ik} M_{kj} \Phi^T_{im} M_{ml} \quad (\text{E3})$$

であり, 和の順序を変えると

$$\sum_{i=1}^n \beta_i^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n (\sum_{i=1}^n \Phi_{ki} \Phi^T_{im}) M_{kj} M_{ml} \quad (\text{E4})$$

である. ところで, 本文の式(31)(32)と, \mathbf{U} が直交行列であることから

$$\Phi \Phi^T = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{U} \mathbf{U}^T \mathbf{M}^{-1/2} = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{M}^{-1/2} = \mathbf{M}^{-1} \quad (\text{E5})$$

である. よって

$$\sum_{i=1}^n \beta_i^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (\sum_{m=1}^n M^{-1}_{km} M_{ml}) M_{kj} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \delta_{kl} M_{kj} \quad (\text{E6})$$

すなわち

$$\sum_{i=1}^n \beta_i^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n M_{kj} \quad (\text{E7})$$

である. すなわち, β_i の自乗の総和は系に含まれる全質量となる. 全質量に占める β_i^2 の割合を当該モードの有効質量比と呼ぶ.