

Bernoulli-Euler 梁の振動方程式

野津

1. はじめに

本稿では古典的な Bernoulli-Euler 梁の振動方程式の導き方と簡単な応用例，梁要素の定式化について説明している。

2. 座標軸の設定

いま図-1(a)に示すように長さ方向に一様な梁を考える（あるいは一様とみなせる区間に着目していると考えても良い）．また断面内においてヤング率 E と密度 ρ は一様であるとする。

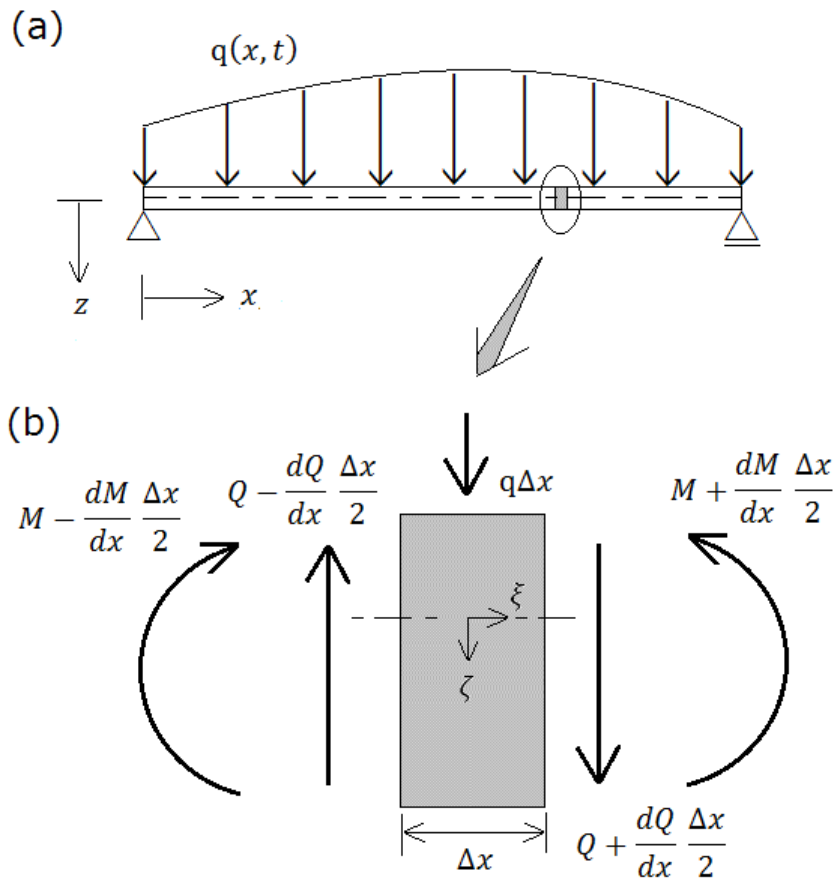


図-1 長さ方向に一様な梁(a)とその微小区間(b)

図-1(a)の一点鎖線は材軸を表している．これは単に高さ方向（せい方向）の中心線を示したものではない．断面内に互いに直交するように y 軸と z 軸をとるとき，断面一次モーメント

$$S_z = \int_A y dA \quad (1)$$

$$S_y = \int_A z dA \quad (2)$$

が共にゼロとなるようにy軸とz軸の原点を選ぶことができるが、このときのy軸とz軸の原点を図心と呼ぶ。図心を長さ方向に連ねた線を材軸と呼ぶ。以下においては図心をy軸とz軸の原点とする。荷重の作用方向はz方向とし、z方向のたわみを考える。

図-1 (b)は図-1 (a)のはりから微小区間を取り出したものである。M(x)はモーメント、Q(x)はせん断力である。微小区間の長さΔxは微小であるが、微小区間の高さは必ずしも微小ではない。このことが後の議論に影響する。

3. 平面保持の仮定・直角保持の仮定

Bernoulli-Euler 梁では平面保持の仮定を設ける。これは、図-2 に示すように、変形前に同一平面上にあった点（例えば図の A,B,C）は変形後も同一平面上にあるという仮定である。Bernoulli-Euler 梁では、これに加え、梁がz方向には伸び縮みしないと仮定する。したがって、図の角度をψとすれば、変位のx成分u(x,z)は次式のようにzの1次関数として表される。

$$u(x,z) = u(x,0) - \psi(x)z \quad (3)$$

また、梁がz方向に伸び縮みしないという条件から、変位のz成分w(x,z)はxだけの関数であるため、これをw(x)と書く。w(x)をたわみ、∂w/∂xをたわみ角と呼ぶ。

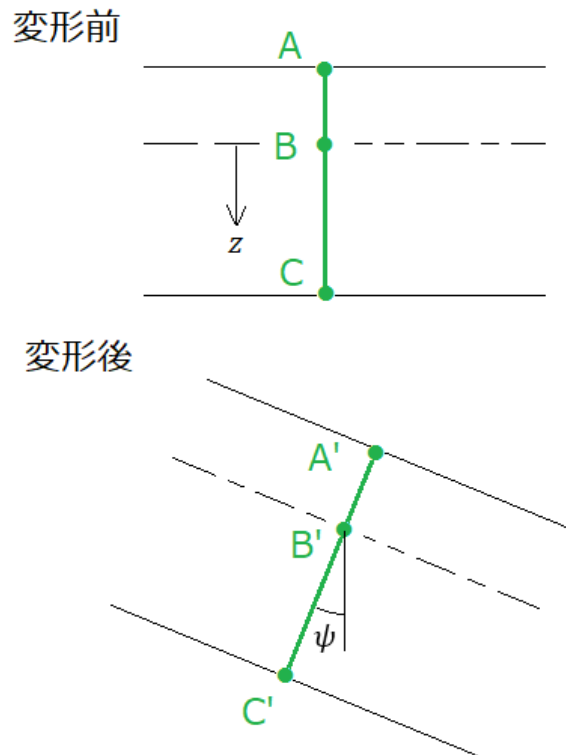


図-2 平面保持の仮定

ここまでは Bernoulli-Euler 梁も Timoshenko 梁も同じであるが，ここから先で違いが表れる．Bernoulli-Euler 梁ではせん断剛性は無限大であると仮定する．したがって，せん断ひずみ

$$\gamma(x, z) = \frac{\partial u}{\partial z}(x, z) + \frac{\partial w}{\partial x}(x, z) \quad (4)$$

は常にゼロであり，もともと材軸（図の破線）に直交していた平面（図の A,B,C）は変形後も材軸に直交することになる．これを式で表すと

$$\psi(x) = \frac{\partial w}{\partial x}(x) \quad (5)$$

となる．この仮定は直角保持の仮定と呼ばれる．

4. モーメントと変形の関係

式(3)を微分することにより直ひずみは

$$\varepsilon(x, z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) - \frac{\partial \psi}{\partial x}(x)z \quad (6)$$

直応力は

$$\sigma(x, z) = E \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) - \frac{\partial \psi}{\partial x}(x)z \right) \quad (7)$$

となる．ここで梁の幅（紙面直交方向に梁の占める範囲，中空の部分は除く）を $B(z)$ とすればモーメントは

$$M(x) = \int \sigma(x, z)B(z)zdz = E \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) \int B(z)zdz - \frac{\partial \psi}{\partial x}(x) \int B(z)z^2 dz \right) \quad (8)$$

となるが， z 軸の原点を図心としているため括弧内の第1項はゼロとなり，結局モーメントは

$$M(x) = -EI \frac{\partial \psi}{\partial x}(x) \quad (9)$$

となる．ここに

$$I = \int B(z)z^2 dz \quad (10)$$

は断面二次モーメントである．Bernoulli-Euler 梁の場合は式(5)(9)より

$$M(x) = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x) \quad (11)$$

となる。

5. 回転に関する運動方程式

次に、図-1 (b) に示す微小区間の回転に関する運動方程式を考える。ここで角加速度の概念を用いても良いが、剛体でないものに対して角加速度をどう定義するかという問題もあるので、ニュートンの運動方程式まで戻り、ベクトルの外積を用いて回転に関する運動方程式を求める方が結局はわかりやすいように思う。

一般に図-3 に示すように任意形状の弾性体を微小部分に分けると、各々の微小部分に関してニュートンの運動方程式が成立するので

$$\Delta m \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f} \tag{12}$$

である。ここに Δm は微小部分の質量、 $\ddot{\mathbf{u}}$ は微小部分の加速度、 \mathbf{f} は微小部分に作用する外力の和である。式(12)と微小部分の位置ベクトル \mathbf{r} との外積をとりすべての微小部分についての和をとると

$$\sum \Delta m \ddot{\mathbf{u}} \times \mathbf{r} = \sum \mathbf{f} \times \mathbf{r} \tag{13}$$

となる。和をとる際、微小部分の間に作用する力については作用反作用の法則で消えてしまうため、右辺は外力のモーメントとなる。

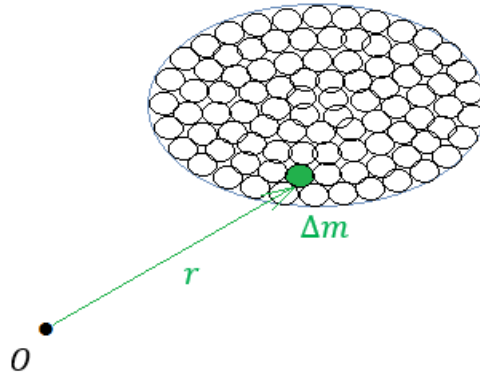


図-3 任意形状の弾性体を微小部分に分ける

式(13)を図-1 (b) に示す微小区間に適用する。その際、図-1 (b) に示すようにローカル座標 (ξ, ζ) をとる。 ξ 軸の原点は区間中央、 ζ 軸の原点は図心である。位置ベクトルの原点は $(\xi, \zeta) = (0, 0)$ とする。[ベクトルの外積の公式](#)を参照し式(13)左辺の面外成分を計算すると

$$\int_{-h_2}^{h_1} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \rho (\ddot{w}(\xi) \xi - \ddot{u}(\xi, \zeta) \zeta) B(\zeta) d\xi d\zeta = \rho \int_{-h_2}^{h_1} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \ddot{w}(\xi) \xi B(\zeta) d\xi d\zeta - \rho \int_{-h_2}^{h_1} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \ddot{u}(\xi, \zeta) \zeta B(\zeta) d\xi d\zeta \tag{14}$$

となる。ここに梁は $-h_2 \leq \zeta \leq h_1$ の範囲に存在するものとする。ここで被積分関数に含まれる $\ddot{w}(\xi)$ と $\ddot{u}(\xi, \zeta)$ を $(\xi, \zeta) = (0, 0)$ の周りでテイラー展開する。その際、 ξ 方向の積分区間は微小であることから ξ に関して 0 次の項のみをとると、右辺第 1 項は消える。また右辺第 2 項の積分は式(3)より

$$-\rho\Delta x \int_{-h_2}^{h_1} \ddot{u}(0, \zeta) \zeta B(\zeta) d\zeta = -\rho\Delta x \int_{-h_2}^{h_1} \ddot{u}(0,0) \zeta B(\zeta) d\zeta + \rho\Delta x \int_{-h_2}^{h_1} \ddot{\psi} \zeta^2 B(\zeta) d\zeta \quad (15)$$

となる。ζ軸の原点は図心であることから右辺第1項はゼロとなり，結局，式(13)左辺の面外成分は

$$\rho\Delta x \int_{-h_2}^{h_1} \ddot{\psi} \zeta^2 B(\zeta) d\zeta = \rho I \ddot{\psi} \Delta x \quad (16)$$

となる。一方，式(13)を図-1(b)に示す微小区間に適用したとき，式(13)右辺の面外成分は

$$\left(M - \frac{\partial M}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}\right) - \left(M + \frac{\partial M}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}\right) + \left(Q - \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\Delta x}{2} + \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\Delta x}{2} = -\frac{\partial M}{\partial x} \Delta x + Q \Delta x \quad (17)$$

となる。式(16)(17)より，図-1(b)に示す微小区間の回転に関する運動方程式は

$$\rho I \ddot{\psi} \Delta x = -\frac{\partial M}{\partial x} \Delta x + Q \Delta x \quad (18)$$

すなわち

$$Q(x) = \frac{\partial M}{\partial x} (x) + \rho I \ddot{\psi} (x) \quad (19)$$

となる。

ここまでの経過を見てみると，式(14)の被積分関数に含まれる $\ddot{u}(\xi, \zeta)$ を $(\xi, \zeta) = (0,0)$ の周りでテイラー展開した際，ξ方向の積分区間は微小であるとしてξに関する1次以上の項を無視したが，ζに関する1次の項は残した。その結果，式(19)の右辺第2項が残った。梁の高さは必ずしも微小でないとしたことが，式(19)の右辺第2項が残った原因である。

式(19)の右辺第2項は角加速度の効果を表す。Bernoulli-Euler 梁の振動方程式では，角加速度の効果を無視した次式が用いられることが多い。

$$Q(x) = \frac{\partial M}{\partial x} (x) \quad (20)$$

角加速度の効果を無視しうる条件とはどのようなものであるかについては後ほど考察する。

6. 並進運動に関する運動方程式

図-1(b)に示す微小区間の並進運動に関する運動方程式は

$$\int_{-h_2}^{h_1} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \rho \ddot{w}(\xi) B(\zeta) d\xi d\zeta = \frac{\partial Q}{\partial x} \Delta x + q \Delta x \quad (21)$$

となり, これを整理すると

$$\rho A \ddot{w}(x) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x) + q(x) \quad (22)$$

となる. ここに

$$A = \int B(z) dz \quad (23)$$

は断面の面積である.

7. 振動方程式

式(11)(20)(22)より Bernoulli-Euler 梁の振動方程式は次式となる.

$$\rho A \ddot{w}(x) + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x) = q(x) \quad (24)$$

また, 以上の式から, 良く知られているように, たわみの 2 階微分は $M(x)$ に, たわみの 3 階微分は $Q(x)$ に, それぞれ比例する.

8. 振動方程式の応用例

振動方程式の簡単な応用例として $x = 0$ で支持された長さ L の片持ち梁の固有振動数を求めてみる. 式(24) で $q = 0$ とし両辺をフーリエ変換すると

$$-\omega^2 \rho A \hat{w}(x) + EI \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial x^4}(x) = 0 \quad (25)$$

となり,

$$\beta^4 = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \quad (26)$$

とおけば

$$\frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial x^4}(x) - \beta^4 \hat{w}(x) = 0 \quad (27)$$

となる. この一般解は

$$\hat{w}(x) = C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x} + C_3 e^{\beta x} + C_4 e^{-\beta x} \quad (28)$$

で与えられる. ここで境界条件として

$$\begin{aligned} x=0 \quad & \text{で} \quad \hat{w} = 0 \quad \text{かつ} \quad \partial \hat{w} / \partial x = 0 \\ x=L \quad & \text{で} \quad \partial^2 \hat{w} / \partial x^2 = 0 \quad \text{かつ} \quad \partial^3 \hat{w} / \partial x^3 = 0 \end{aligned}$$

となるべきことを考慮すると次式が得られる.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ i & -i & 1 & -1 \\ -e^{i\beta L} & -e^{-i\beta L} & e^{\beta L} & e^{-\beta L} \\ -ie^{i\beta L} & ie^{-i\beta L} & e^{\beta L} & -e^{-\beta L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

式(29)の係数行列の行列式を 0 とおけば次式が得られる.

$$\cos \beta L \cosh \beta L = -1 \quad (30)$$

これを満たす βL から固有振動数 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \dots$ が次の通り求まる (文献 1) の式(17.3.22)) .

$$\omega_1 = \frac{3.516}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \omega_2 = \frac{22.03}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \omega_3 = \frac{61.70}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \omega_4 = \frac{120.9}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

9. 角加速度の効果について

式(24)の振動方程式は式(19)の右辺第 2 項 (角加速度の効果) を無視したものであった. ここでは, 式(24)の振動方程式の解を式(19)に代入することにより, 角加速度の効果は無視しうる条件とはどのようなものであるか考察する. 式(19)の右辺をフーリエ変換し, 第 1 項の絶対値が第 2 項の絶対値よりはるかに大きければ, 角加速度の効果は無視しうると言えるだろう. この条件は次のように書くことができる.

$$\left| \frac{\partial \hat{M}}{\partial x} \right| \gg |\omega^2 \rho I \hat{\psi}|$$

式(9)を適用すると, この条件は次のように書き換わる.

$$\left| EI \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial x^2} \right| \gg |\omega^2 \rho I \hat{\psi}|$$

式(28)より式(25)の一般解は x に関して 2 階微分すると振幅が β^2 倍となる性質を有している. したがって上の条件は次のように書き換わる.

$$|\beta^2 EI \hat{\psi}| \gg |\omega^2 \rho I \hat{\psi}|$$

式(26)を用いて整理するとこの条件は次のように書き換わる.

$$\omega \ll \sqrt{\frac{AE}{\rho I}}$$

したがって、高周波成分を対象とする場合に角加速度の効果は無視し得なくなると言える。ただし、栈橋の設計に用いられる典型的な鋼管杭として例えば港湾構造物設計事例集²⁾で取り上げられている外径 1.5m, 板厚 0.016m の鋼管杭を対象に右辺の値を計算すると 9.6kHz (周波数に換算すると 1.5kHz) となるので、一般的な栈橋の設計では角加速度の効果はほぼ無いと考えて差し支えないだろう。

10. 梁要素

式(24)の振動方程式に従う Bernoulli-Euler 梁を有限要素法プログラムに組み込むには通常次のような定式化を行う。 $q(x) = 0$ のとき式(11)(24)より

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \rho A \ddot{w} = 0 \quad (31)$$

である。この両辺に仮想のたわみ w^* を乗じ積分すると

$$\int_0^l w^* \left(-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \rho A \ddot{w} \right) dx = 0 \quad (32)$$

となり (l は要素の長さ) , 部分積分を二回行うと

$$\left[-w^* \frac{dM}{dx} \right]_0^l + \int_0^l \frac{dw^*}{dx} \frac{dM}{dx} dx + \int_0^l w^* \rho A \ddot{w} dx = 0 \quad (33)$$

$$\left[-w^* \frac{dM}{dx} \right]_0^l + \left[\frac{dw^*}{dx} M \right]_0^l - \int_0^l \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} M dx + \int_0^l w^* \rho A \ddot{w} dx = 0 \quad (34)$$

となり、式(11)(20)を用いると

$$\int_0^l EI \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx + \int_0^l w^* \rho A \ddot{w} dx = - \left[\frac{dw^*}{dx} M \right]_0^l + [w^* Q]_0^l \quad (35)$$

となる。この式は弱形式と呼ばれる。ここで、要素端部のたわみとたわみ角を用い、たわみ $w(x)$ を次式のように近似的に表す。

$$w(x) = \mathbf{N}^T(x) \begin{bmatrix} w_1 \\ \psi_1 \\ w_2 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \mathbf{N}^T(x) \mathbf{d} \quad (36)$$

ここに w_1 と ψ_1 は $x = 0$ でのたわみとたわみ角、 w_2 と ψ_2 は $x = l$ でのたわみとたわみ角、 \mathbf{d} はそれらを一つのベクトルで表したものである。 $\mathbf{N}(x)$ は形状関数であり、その具体的な形は後述する。仮想のたわみ $w^*(x)$ も同じ形状関数を用いて次式のように表す。

$$\mathbf{w}^*(x) = \mathbf{N}^T(x) \begin{bmatrix} w_1^* \\ \psi_1^* \\ w_2^* \\ \psi_2^* \end{bmatrix} = \mathbf{N}^T(x) \mathbf{d}^* \quad (37)$$

式(36)(37)を式(35)に代入すると

$$\int_0^l EI \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T}{\partial x^2} \mathbf{d}^* \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T}{\partial x^2} \mathbf{d} \mathbf{d} x + \int_0^l \rho A \mathbf{N}^T \mathbf{d}^* \mathbf{N}^T \ddot{\mathbf{d}} \mathbf{d} x = [w_1^*, \psi_1^*, w_2^*, \psi_2^*] \begin{bmatrix} -Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ -M_2 \end{bmatrix} \quad (38)$$

すなわち

$$\mathbf{d}^{*T} \left[\int_0^l EI \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T}{\partial x^2} dx \right] \mathbf{d} + \mathbf{d}^{*T} \left[\int_0^l \rho A \mathbf{N} \mathbf{N}^T dx \right] \ddot{\mathbf{d}} = \mathbf{d}^{*T} \begin{bmatrix} -Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ -M_2 \end{bmatrix} \quad (39)$$

が得られる。ここで \mathbf{d}^{*T} は任意であることを想起すると

$$\begin{bmatrix} -Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ -M_2 \end{bmatrix} = \left[\int_0^l EI \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T}{\partial x^2} dx \right] \mathbf{d} + \left[\int_0^l \rho A \mathbf{N} \mathbf{N}^T dx \right] \ddot{\mathbf{d}} \quad (40)$$

すなわち

$$\begin{bmatrix} -Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ -M_2 \end{bmatrix} = \mathbf{K}_e \mathbf{d} + \mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{d}} \quad (41)$$

が得られる。ここに

$$\mathbf{K}_e = \int_0^l EI \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T}{\partial x^2} dx \quad (42)$$

は要素剛性マトリクス,

$$\mathbf{M}_e = \int_0^l \rho A \mathbf{N} \mathbf{N}^T dx \quad (43)$$

は整合質量マトリクスと呼ばれる。式(41)は要素端部（節点）における変位および回転角と、この要素が節点に及ぼすせん断力およびモーメントの関係を表している。式(41)を全ての要素について重ね合わせること

で全体剛性マトリクスと全体質量マトリクスが得られる（ローカル座標系から全体座標系への座標変換は必要）。

形状関数 $\mathbf{N}(x)$ としては3次関数を用いることが普通であり、それにより、 $q(x) = 0$ の静的な問題では式(41)を近似式ではなく厳密な式とすることができる。 $q(x) = 0$ の静的な問題では式(24)より $w(x)$ は3次関数となることがすぐにわかる。実際に式(24)を境界条件 $[w_1, \psi_1, w_2, \psi_2]$ の下で解くと

$$w(x) = \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi)w_1 + \frac{l}{8}(1-\xi)^2(1+\xi)\psi_1 + \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi)w_2 + \frac{l}{8}(1+\xi)^2(\xi-1)\psi_2 \quad (44)$$

となり（ここに $\xi = 2x/l - 1$ ），これと式(36)の比較から

$$\mathbf{N}^T = \left[\frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi), \frac{l}{8}(1-\xi)^2(1+\xi), \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi), \frac{l}{8}(1+\xi)^2(\xi-1) \right] \quad (45)$$

とすれば良いことがわかる。これより

$$\frac{\partial^2 \mathbf{N}^T}{\partial x^2} = \left[\frac{6\xi}{l^2}, \frac{-1+3\xi}{l}, -\frac{6\xi}{l^2}, \frac{1+3\xi}{l} \right] \quad (46)$$

である。式(46)を式(42)に代入して積分を実行すると要素剛性マトリクスとして

$$\mathbf{K}_e = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (47)$$

が得られる。また式(45)を式(43)に代入して積分を実行すると整合質量マトリクスとして

$$\mathbf{M}_e = \frac{\rho Al}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (48)$$

が得られる。

参考文献

- 1) Chopra, A.K.: Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering, Fourth Edition, 2012.
- 2) 一般財団法人沿岸技術研究センター：港湾構造物設計事例集，2018年