2020/4/12

フーリエ変換はなぜ元に戻るのか？（その 2）

野津

1.　はじめに

時刻歴波形$f(t)$に対し，一般にフーリエ変換は式(1)で，フーリエ逆変換は式(2)で定義される．

$$\text{フーリエ変換}\quad F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt \tag{1}$$

$$\text{フーリエ逆変換}\quad f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{2}$$

$f(t)$に式(1)(2)の演算を適用すると元に戻ることについて，別の稿ではガウス関数のフーリエ変換を用いて説明したが，ここでは複素平面上での積分を用いて説明する．なお以下の説明は筆者が文献 1)から学んだものであるが，文献 1)の説明はたいへん簡潔に書かれているので，本稿の筆者において行間を補った結果が以下の説明である．

2.　複素平面上での積分を用いた説明

以下の説明では$f(t)$は無限回微分可能で，ある区間$[-T,T]$の外では 0 であると仮定する．
まず次のような積分を考える．

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}F(\omega)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt\right)d\omega \tag{3}$$

括弧内のフーリエ変換を二つの部分に分けると

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}F(\omega)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\left(\int_{-\infty}^{0}f(t)e^{-i\omega t}dt\right)d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\left(\int_{0}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt\right)d\omega \tag{4}$$

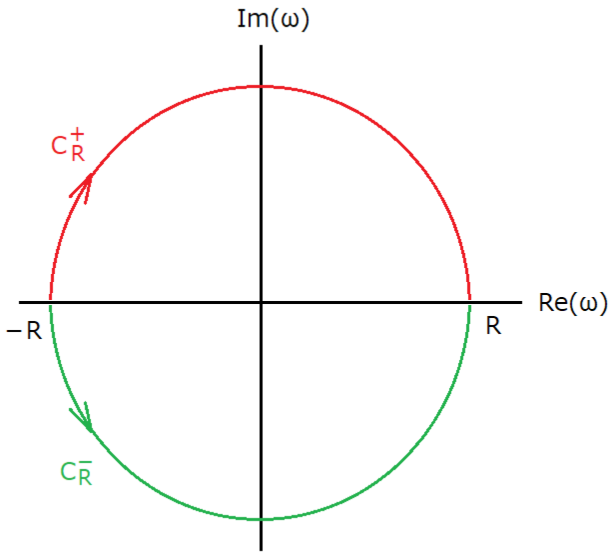
となる．右辺の積分は実軸上での積分であるが，これを複素平面上での積分と考え，積分経路を変更する．第 1 項は上半平面を通る経路C_R^+上で，第 2 項は下半平面を通る経路C_R^-上で積分する（**図-1**）．

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}F(\omega)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{C_R^+}\left(\int_{-\infty}^{0}f(t)e^{-i\omega t}dt\right)d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{C_R^-}\left(\int_{0}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt\right)d\omega \tag{5}$$

ここで$f(t)$がある区間$[-T,T]$の外で 0 であるという条件が使われる．この条件の下では$F(\omega)$は微分可能な関数（正則関数）となるため，経路の変更が可能となる．
次に$f(t)$をテイラー展開する（ここで$f(t)$が無限回微分可能であるという条件が使われる）．

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)t^n \tag{6}$$

これを用いると



図−1　積分経路

$$\int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-i\omega t}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)\int_{-\infty}^{0} t^n e^{-i\omega t}dt \tag{7}$$

右辺に部分積分を適用すると

$$\int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-i\omega t}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)\left[\left[-\frac{1}{i\omega}t^n e^{-i\omega t}\right]_{t=-\infty}^{t=0} + \frac{n}{i\omega}\int_{-\infty}^{0} t^{n-1}e^{-i\omega t}dt\right] \tag{8}$$

右辺括弧内の第 2 項は，部分積分を適用するたびに$1/\omega$がかかるので，$O(|\omega|^{-2})$である．

$$\int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-i\omega t}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)\left[-\frac{1}{i\omega}t^n e^{-i\omega t}\right]_{t=-\infty}^{t=0} + O(|\omega|^{-2}) \tag{9}$$

この関数の積分はC_R^+上で行うためωの虚部は正である．したがって$t \to -\infty$のとき$t^n e^{-i\omega t} \to 0$となるため，右辺第 1 項は結局$n = 0$の場合しか値が残らず

$$\int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-i\omega t}dt = -\frac{f(0)}{i\omega} + O(|\omega|^{-2}) \tag{10}$$

となる．

$t > 0$での積分については，

$$\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)\int_{0}^{\infty} t^n e^{-i\omega t}dt \tag{11}$$

の右辺に部分積分を適用すると

$$\int_0^\infty f(t)e^{-i\omega t}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)\left[\left[-\frac{1}{i\omega}t^n e^{-i\omega t}\right]_{t=0}^{t=\infty} + \frac{n}{i\omega}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-i\omega t}dt\right] \tag{12}$$

右辺括弧内の第 2 項は，部分積分を適用するたびに$1/\omega$がかかるので，$O(|\omega|^{-2})$である．

$$\int_0^\infty f(t)e^{-i\omega t}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)\left[-\frac{1}{i\omega}t^n e^{-i\omega t}\right]_{t=0}^{t=\infty} + O(|\omega|^{-2}) \tag{13}$$

この関数の積分はC_R^-上で行うためωの虚部は負である．したがって$t \to \infty$のとき$t^n e^{-i\omega t} \to 0$となるため，右辺第 1 項は結局$n = 0$の場合しか値が残らず

$$\int_0^\infty f(t)e^{-i\omega t}dt = +\frac{f(0)}{i\omega} + O(|\omega|^{-2}) \tag{14}$$

となる．

式(10)(14)を式(5)に代入すれば

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}F(\omega)d\omega = \frac{f(0)}{2\pi i}\left(-\int_{C_R^+}\frac{1}{\omega}d\omega + \int_{C_R^-}\frac{1}{\omega}d\omega\right) + \frac{1}{2\pi}\left(\int_{C_R^+}O(|\omega|^{-2})d\omega + \int_{C_R^-}O(|\omega|^{-2})d\omega\right) \tag{15}$$

となる．右辺第 1 項は結局周回積分となるので$R \to \infty$のとき留数定理で評価でき，右辺第 2 項は$R \to \infty$のとき 0 に収束するので

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)d\omega = f(0) \tag{16}$$

となる．

ここで$f(t)$の代わりに$f(t+t')$を考えても式(16)は成立するはずである．すなわち

$$F'(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}f(t+t')e^{-i\omega t}dt \tag{17}$$

とすれば

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F'(\omega)d\omega = f(t') \tag{18}$$

である．一方，式(17)より

$$F'(\omega) = e^{i\omega t'}F(\omega) \tag{19}$$

であり，これを式(18)に代入すると

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t'}d\omega = f(t') \tag{20}$$

が得られる．これで$F(\omega)$が式(2)の演算により$f(t)$に戻ることが示された．■

参考文献

1）磯崎洋：量子力学のフーリエ変換，数理科学，No.532，pp.17-22，2007 年.