

ヘルムホルツの定理

野津

1. はじめに

ヘルムホルツの定理によれば任意のベクトル場 $\mathbf{A}$ はスカラーポテンシャル $\phi$ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{\psi}$ を用いて

$$\mathbf{A} = \nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi} \tag{1}$$

と表すことができる (ヘルムホルツ分解). [勾配の回転はゼロ](#)であるから右辺第1項は回転なしの場であり, [回転の発散はゼロ](#)であるから右辺第2項は発散なしの場である. ヘルムホルツの定理の証明は少し手間がかかるが, ベクトル場 $\mathbf{A}$ に少しだけ制約を設けて, 空間座標に関する3重フーリエ変換とその逆変換が広義積分

$$\tilde{\mathbf{A}}(k_1, k_2, k_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(x_1, x_2, x_3) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} dx_1 dx_2 dx_3 \tag{2}$$

$$\mathbf{A}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{A}}(k_1, k_2, k_3) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} dk_1 dk_2 dk_3 \tag{3}$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 \tag{4}$$

により可能であるものとする, ヘルムホルツの定理に早くたどり着くことができる. 以下, このことについて説明する. なお, 空間座標に関する3重フーリエ変換が広義積分により可能であるようなベクトル場を考えるということは, 遠方において十分に早く減衰するようなベクトル場を考えるということである.

以降, 空間座標に関する3重フーリエ変換適用後のスカラー場やベクトル場には $\tilde{\phantom{x}}$ を付けることにする.

2. 波数空間における勾配・発散・回転

スカラー場 $\phi$ の勾配, ベクトル場 $\boldsymbol{\psi}$ の発散・回転のフーリエ変換はそれぞれ次式となる. なお以下において矢印 ( $\rightarrow$ ) はフーリエ変換を表す.

$$\text{勾配のフーリエ変換} \quad \nabla\phi \rightarrow -i\tilde{\phi}\mathbf{k} \tag{5}$$

$$\text{発散のフーリエ変換} \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\psi} \rightarrow -i\mathbf{k} \cdot \tilde{\boldsymbol{\psi}} \tag{6}$$

$$\text{回転のフーリエ変換} \quad \nabla \times \boldsymbol{\psi} \rightarrow -i\mathbf{k} \times \tilde{\boldsymbol{\psi}} \tag{7}$$

以下に証明を示す. まず式(5)については, スカラー場 $\phi$ の勾配を

$$\mathbf{B} = \nabla\phi \tag{8}$$

とおくと, その[成分表示](#)は

$$B_i = \phi_{,i} \tag{9}$$

で与えられる. 両辺に空間座標に関する3重フーリエ変換を適用すると

$$\tilde{B}_i = -ik_i \tilde{\phi} \quad (10)$$

となり、これをベクトル表示に戻すと

$$\tilde{\mathbf{B}} = -i\tilde{\phi}\mathbf{k} \quad (11)$$

となる。すなわちスカラー場 $\phi$ の勾配は波数空間では $\mathbf{k}$ に平行なベクトルとなる。  
式(6)については、ベクトル場 $\boldsymbol{\psi}$ の発散を

$$c = \nabla \cdot \boldsymbol{\psi} \quad (12)$$

とおくと、その成分表示は

$$c = \psi_{i,i} \quad (13)$$

で与えられる。両辺に空間座標に関する3重フーリエ変換を適用すると

$$\tilde{c} = -ik_i \tilde{\psi}_i \quad (14)$$

となり、これをベクトル表示に戻すと

$$\tilde{\mathbf{c}} = -i\mathbf{k} \cdot \tilde{\boldsymbol{\psi}} \quad (15)$$

となる。すなわちベクトル場 $\boldsymbol{\psi}$ の発散を求める操作は波数空間では $\mathbf{k}$ と $\tilde{\boldsymbol{\psi}}$ の内積を求める操作に変わる。元の空間でベクトル場の発散がゼロであるという条件は、波数空間では $\mathbf{k}$ と $\tilde{\boldsymbol{\psi}}$ が直交するという条件に変わる。

式(7)については、ベクトル場 $\boldsymbol{\psi}$ の回転を

$$\mathbf{D} = \nabla \times \boldsymbol{\psi} \quad (16)$$

とおくと、その成分表示は

$$D_i = \varepsilon_{ijk} \psi_{k,j} \quad (17)$$

で与えられる。両辺に空間座標に関する3重フーリエ変換を適用すると

$$\tilde{D}_i = -i\varepsilon_{ijk} k_j \tilde{\psi}_k \quad (18)$$

となり、これをベクトル表示に戻すと

$$\tilde{\mathbf{D}} = -i\mathbf{k} \times \tilde{\boldsymbol{\psi}} \quad (19)$$

となる。すなわちベクトル場 $\boldsymbol{\psi}$ の回転を求める操作は波数空間では $\mathbf{k}$ と $\tilde{\boldsymbol{\psi}}$ の外積を求める操作に変わる。

### 3. ヘルムホルツの定理

与えられたベクトル場 $\mathbf{A}$ に対し[次の恒等式](#)が成立する.

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (20)$$

左辺は $\mathbf{A}$ の個々の成分にラプラシアンを作用させるという意味である. 両辺に空間座標に関する3重フーリエ変換を適用すると式(5)(6)(7)より次式が得られる.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \frac{1}{k^2} (\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{A}}) \mathbf{k} - \frac{1}{k^2} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{A}}) \quad (21)$$

ここに $k$ はベクトル $\mathbf{k}$ の大きさを表す. ここで

$$\tilde{\phi} = \frac{i}{k^2} \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \quad (22)$$

$$\tilde{\psi} = -\frac{i}{k^2} \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{A}} \quad (23)$$

とおけば

$$\tilde{\mathbf{A}} = -i\tilde{\phi}\mathbf{k} - i\mathbf{k} \times \tilde{\psi} \quad (24)$$

であり, 両辺をフーリエ逆変換すると

$$\mathbf{A} = \nabla\phi + \nabla \times \psi \quad (1) \text{再掲}$$

が得られる. このように, ベクトル場 $\mathbf{A}$ の空間座標に関する3重フーリエ変換が可能であるとすると, ヘルムホルツの定理に早くたどり着くことができる.

ここで, 念のため,  $\tilde{\phi}$ と $\tilde{\psi}$ のフーリエ逆変換が可能であるか考えておくことにする. すなわち

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(k_1, k_2, k_3) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} dk_1 dk_2 dk_3 \quad (25)$$

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(k_1, k_2, k_3) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} dk_1 dk_2 dk_3 \quad (26)$$

のような積分が可能であるか考える. まず, 式(22)(23)に示すように,  $\tilde{\phi}$ と $\tilde{\psi}$ は $\tilde{\mathbf{A}}$ に $k^{-1}$ を乗じたような関数となっており,  $\tilde{\mathbf{A}}$ はもともと遠方で十分に早く減衰する関数であるから,  $\tilde{\phi}$ と $\tilde{\psi}$ も遠方で十分に早く減衰する関数である. したがって, 遠方での収束性は心配ない. 一方,  $\tilde{\phi}$ と $\tilde{\psi}$ は原点( $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ )付近では著しく大きな値をとるものの, 例えば $\tilde{\phi}$ は原点付近では

$$\tilde{\phi} \approx i \left( \tilde{A}_1(0) \frac{k_1}{k^2} + \tilde{A}_2(0) \frac{k_2}{k^2} + \tilde{A}_3(0) \frac{k_3}{k^2} \right) \quad (27)$$

となり、その各項は波数空間における奇関数であるから、原点付近の大きな値は積分に寄与しない。 $\tilde{\psi}$ の各成分についても同様である。したがって $\tilde{\phi}$ と $\tilde{\psi}$ のフーリエ逆変換は可能である。なお、フーリエ逆変換を実際に行った結果は次式となることが知られている。

$$\phi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nabla \cdot \mathbf{A}(\xi)}{|\mathbf{x} - \xi|} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (28)$$

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nabla \times \mathbf{A}(\xi)}{|\mathbf{x} - \xi|} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (29)$$

この点については付録で述べる。

式(24)の右辺第1項は $\mathbf{k}$ に平行なベクトル、右辺第2項は $\mathbf{k}$ に垂直なベクトルである。したがってヘルムホルツ分解とは波数空間においてはベクトル $\tilde{\mathbf{A}}$ を $\mathbf{k}$ に平行な成分と垂直な成分に分ける操作であると言える。図-1は $\mathbf{k}$ に垂直な平面を示したものであるが、式(23)で決まる $\tilde{\psi}$ はこの面内のベクトル(図-1の赤)であり、式(24)では $\mathbf{k}$ と $\tilde{\psi}$ の外積により $\tilde{\mathbf{A}}$ の $\mathbf{k}$ に垂直な成分(図-1の緑)を作りだしている(実際には $\tilde{\mathbf{A}}$ も $\tilde{\psi}$ も複素数を成分とするベクトルであるから、この議論は少し厳密さに欠ける。実部と虚部のそれぞれに対して検討しその結果を総合すれば厳密な議論になる)。

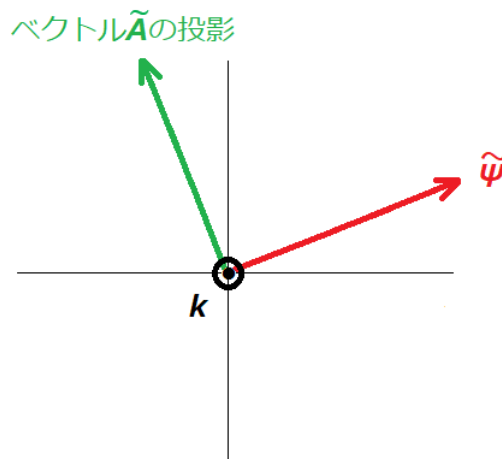


図-1 ベクトル $\mathbf{k}$ に垂直な平面。 $\tilde{\psi}$ はこの面内のベクトル(赤)であり、 $\mathbf{k}$ と $\tilde{\psi}$ の外積により $\tilde{\mathbf{A}}$ の $\mathbf{k}$ に垂直な成分(緑)を作りだしている。

ところで、ベクトル場 $\mathbf{A}$ を式(1)のように表すことができるとして、その表し方は一通りなのだろうか。この問題を、スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルが3重フーリエ変換可能である(広義積分が可能である)との条件の下で考えてみたい。いまベクトル場 $\mathbf{A}$ を上で求めたものとは別のスカラーポテンシャル $\phi'$ とベクトルポテンシャル $\psi'$ を用いて

$$\mathbf{A} = \nabla \phi' + \nabla \times \psi' \quad (30)$$

と表すことができたとする。式(30)から式(1)を引くと

$$\mathbf{0} = \nabla(\phi' - \phi) + \nabla \times (\psi' - \psi) \quad (31)$$

が得られ、両辺に3重フーリエ変換を適用すると

$$\vec{0} = -i(\vec{\phi}' - \vec{\phi})\mathbf{k} - i\mathbf{k} \times (\vec{\psi}' - \vec{\psi}) \quad (32)$$

が得られる。右辺第1項は $\mathbf{k}$ に平行なベクトル、右辺第2項は $\mathbf{k}$ に垂直なベクトルであるから、それらの和がゼロとなるためには、それぞれの項が（原点 $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ 以外では）ゼロでなければならない。

右辺第1項がゼロとなるべきことから、原点 $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ 以外では

$$\vec{\phi}' = \vec{\phi} \quad (33)$$

でなければならない。これは元の空間において $\phi'$ と $\phi$ が一定値だけしか異なることを意味している。ここで、スカラーポテンシャルが3重フーリエ変換可能であるという条件も併せて考えると、結局 $\phi$ は一通りしかないことになる。

一方、右辺第2項がゼロとなるべきことから、 $\vec{\psi}' - \vec{\psi}$ は $\mathbf{k}$ に平行でなければならない。すなわち原点 $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ 以外では

$$\vec{\psi}' - \vec{\psi} = -i\chi\mathbf{k} \quad (34)$$

と書くことができる（ $\chi$ は $\mathbf{k}$ の関数）。このことは、図-1において、赤のベクトルを $\mathbf{k}$ に乗じる方法以外に、赤のベクトルに $\mathbf{k}$ に平行なベクトルを加えたものを $\mathbf{k}$ に乗じる方法によっても、緑のベクトルを作り出せることに対応している。式(34)をフーリエ逆変換すると

$$\psi' - \psi = \nabla\chi \quad (35)$$

となる（ここでもベクトルポテンシャルが3重フーリエ変換可能であるという条件から左辺と右辺が一定値だけ異なる可能性は排除される）。すなわちベクトルポテンシャルは別のスカラー場 $\chi$ の勾配の分だけ自由度があることになる。このようにベクトルポテンシャルには自由度があるが、式(1)右辺の第2項は $\psi$ から計算しても $\psi'$ から計算しても（[勾配の回転はゼロ](#)だから）同じである。

付録 スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルの具体的な形

スカラーポテンシャル $\phi$ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{\psi}$ の具体的な形を示すために、まず、ポアソン方程式

$$\nabla^2 u = -\delta(\mathbf{x}) \quad (\text{A1})$$

の解が

$$u = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \quad (\text{A2})$$

で与えられることを示す.

空間座標に関する3重フーリエ変換を式(A1)に適用すると

$$-k^2 \tilde{u} = -1 \quad (\text{A3})$$

すなわち

$$\tilde{u} = \frac{1}{k^2} \quad (\text{A4})$$

となり、式(A4)の両辺をフーリエ逆変換すると

$$u = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{k^2} dk_1 dk_2 dk_3 \quad (\text{A5})$$

となる. この積分は座標系のとり方に依存しない形になっているので、 $k_3$ 軸をベクトル $\mathbf{x}$ の方向にとることにする. そしてさらに図-A1に示す球座標系を導入すると、ベクトル $\mathbf{k}$ とベクトル $\mathbf{x}$ のなす角は $\theta$ となるので、それらの内積は、ベクトル $\mathbf{x}$ の大きさを $r$ とすれば

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = kr \cos \theta \quad (\text{A6})$$

で与えられる. また微小な体積は

$$dV = k^2 \sin \theta d\theta d\phi dk \quad (\text{A7})$$

で与えられる. 式(A6)(A7)を式(A5)に代入すると

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{k^2 \sin \theta e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{k^2} d\theta d\phi dk = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \sin \theta d\theta dk \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \left[ \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{ikr} \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} dk = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr} dk = \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^{\infty} \frac{\sin kr}{k} dk \end{aligned}$$

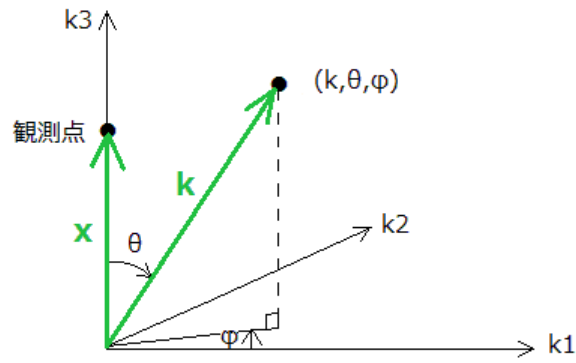


図-A1 球座標系

この最後の積分は正弦積分であり、その値は $\pi/2$ であるから、結局

$$u = \frac{1}{4\pi r}$$

である。すなわち式(A1)の解が式(A2)で与えられることが示された。

式(A2)を式(A1)に代入し $\mathbf{x}$ を $\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}$ に置き換えた式

$$\nabla_x^2 \left( \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|} \right) = -\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \quad (\text{A8})$$

の両辺に $f(\boldsymbol{\xi})$ を乗じ体積積分すると

$$\int f(\boldsymbol{\xi}) \nabla_x^2 \left( \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|} \right) dV_{\boldsymbol{\xi}} = -f(\mathbf{x}) \quad (\text{A9})$$

となり、被積分関数に含まれるラプラシアンは積分の外に出すことができるので

$$\nabla_x^2 \left( \frac{1}{4\pi} \int \frac{f(\boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|} dV_{\boldsymbol{\xi}} \right) = -f(\mathbf{x}) \quad (\text{A10})$$

となる。これより次式が得られる。

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{f(\boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|} dV_{\boldsymbol{\xi}} \rightarrow \frac{1}{k^2} \tilde{f} \quad (\text{A11})$$

ここに矢印 ( $\rightarrow$ ) はフーリエ変換を表す。式(A11)の $f(\boldsymbol{\xi})$ として $-\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{A}(\boldsymbol{\xi})$ を選べば

$$-\frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{A}(\boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|} dV_{\boldsymbol{\xi}} \rightarrow -\frac{1}{k^2} \widetilde{\nabla \cdot \mathbf{A}} = \frac{i}{k^2} \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \quad (\text{A12})$$

が得られる。また、式(A11)の $f(\boldsymbol{\xi})$ として $\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \times \mathbf{A}(\boldsymbol{\xi})$ の一つの成分を選べば

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla_{\xi} \times A(\xi)}{|\mathbf{x} - \xi|} dV_{\xi} \rightarrow \frac{1}{k^2} \widetilde{\nabla} \times \mathbf{A} = -\frac{i}{k^2} \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{A}} \quad (\text{A13})$$

が得られる． よって式(22)(23)より  $\phi$  と  $\psi$  の具体的な形は

$$\phi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla_{\xi} \cdot A(\xi)}{|\mathbf{x} - \xi|} dV_{\xi} \quad (\text{A14})$$

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla_{\xi} \times A(\xi)}{|\mathbf{x} - \xi|} dV_{\xi} \quad (\text{A15})$$

となる．