第 1 版　2019/7/27

第 2 版　2020/4/19

非減衰 1 自由度系の残留応答速度は地動加速度のフーリエスペクトルに等しい

野津

1.　はじめに

非減衰 1 自由度系の残留応答速度は地動加速度のフーリエスペクトルの固有振動数における値に等しい．これは様々な教科書[1)2)3)]で紹介されている興味深い性質である．この関係は，応答スペクトルとフーリエスペクトルの対応を考える上で一つの手がかりとなるものである[1)2)]．また，この関係は，地震動継続時間中に非減衰 1 自由度系に入力されるエネルギーがフーリエスペクトルの自乗すなわちパワースペクトルの固有振動数における値に比例することを表しており[3)]，その意味でも工学的意義を有する．

既往の研究[4)]では上記の関係について Duhamel 積分に基づく時間領域での証明が与えられているが，ここでは周波数領域での証明を考えてみる．

2.　1 自由度系の運動方程式のフーリエ変換

非減衰 1 自由度系（**図-1**）の運動方程式は次式で与えられる．

$$m\ddot{x} + kx = -m\ddot{y} \tag{1}$$

ここにmは質量，kはばね定数，xは 1 自由度系の相対変位，$\ddot{y}$は地動加速度である．

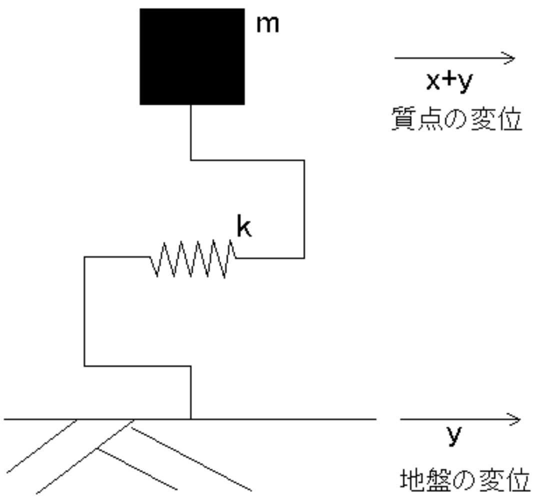

図-1　非減衰 1 自由度系

非減衰 1 自由度系は地震動終了後に自由振動を永久に繰り返すので，その応答$x(t)$のフーリエ変換は広義積分

$$\hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}\,dt \tag{2}$$

では定義できないという問題がある．そこで Phinney 法を適用することにして，実数ωではなく複素数

$$\omega_c = \omega - \lambda i \tag{3}$$

に対して次式によりフーリエ変換を行うことにする．

$$\hat{x}(\omega_c) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega_c t}\, dt \tag{4}$$

複素数であるω_cに対しても微分のフーリエ変換の公式が使えるので，式(1)の両辺をフーリエ変換することにより

$$\hat{x}(\omega_c) = -\frac{1}{\frac{k}{m} - {\omega_c}^2} \hat{\ddot{y}}(\omega_c) \tag{5}$$

が得られる．このとき，ω_cが虚部を含むため，式(5)右辺の係数の分母がゼロとなる心配はない．この点もPhinney法の利点の一つである．なお式(4)に式(3)を代入すると

$$\hat{x}(\omega_c) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x(t) e^{-\lambda t}\right) e^{-i\omega t}\, dt \tag{6}$$

となるので，$\hat{x}(\omega_c)$は$x(t)$に$e^{-\lambda t}$を乗じて減衰させたもの対して通常のフーリエ変換を適用したものとなっている．

3. エネルギーに関する式

式(1)の両辺に$\dot{x}$を乗じて積分すると

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2\right) = -m \dot{x} \ddot{y} \tag{7}$$

となる．ここで

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \tag{8}$$

とおけば次のエネルギーに関する式が得られる．

$$\dot{E} = -m \dot{x} \ddot{y} \tag{9}$$

Eは残留値を持つので通常のフーリエ変換は適用できないが，$\dot{E}$は地震動終了後にはゼロとなるので通常のフーリエ変換が適用できる．そして，$\dot{E}$の積分値がEの残留値であるから，$\dot{E}$のフーリエ変換で$\omega = 0$とおいたものがEの残留値である．よって，$\dot{E}$のフーリエ変換が求まればEの残留値が求まり，残留応答速度も求まるだろう．

そこで，以下，$\dot{E}$のフーリエ変換について検討する．まず，式(9)を次のように書き換える．

$$\dot{E} = -m\left(\dot{x} e^{-\lambda t}\right)\left(\ddot{y} e^{\lambda t}\right) \tag{10}$$

右辺で$\dot{x}$に$e^{-\lambda t}$を乗じたのは，後にそのフーリエ変換を式(5)で求めるためである．一方，$\ddot{y}$はゼロで始まりゼロで終わる関数なので$e^{\lambda t}$を乗じても相変わらずフーリエ変換可能である．ここで式(10)のフーリエ変換を行うが，その際，時間領域の積は周波数領域の合積であるという性質を利用する．すなわち

$$f(t) \to \hat{f}(\omega)$$
$$g(t) \to \hat{g}(\omega)$$

であるとき

$$f(t)g(t) \to \frac{1}{2\pi}\hat{f}(\omega) * \hat{g}(\omega)$$

であることを利用する．ここに矢印（→）はフーリエ変換を表す．実際に式(10)のフーリエ変換を行うと

$$\hat{\hat{E}} = -\frac{1}{2\pi} m\hat{\dot{x}}(\omega - \lambda i) * \hat{\ddot{y}}(\omega + \lambda i) \tag{11}$$

となる．ここで右辺の$\hat{\dot{x}}(\omega - \lambda i) = \hat{\dot{x}}(\omega_c)$を式(5)で求めることにすると

$$\hat{\hat{E}} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{i(\omega-\lambda i)m}{\frac{k}{m}-(\omega-\lambda i)^2}\hat{\ddot{y}}(\omega - \lambda i)\right) * \hat{\ddot{y}}(\omega + \lambda i) \tag{12}$$

となり，右辺の合積を書き下せば

$$\hat{\hat{E}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{i(\omega\prime-\lambda i)m}{\frac{k}{m}-(\omega\prime-\lambda i)^2}\hat{\ddot{y}}(\omega' - \lambda i)\hat{\ddot{y}}(\omega - \omega' + \lambda i)\, d\omega' \tag{13}$$

となる．そして$\omega = 0$での値をとれば

$$\hat{\hat{E}}\bigg|_{\omega=0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{i(\omega\prime-\lambda i)m}{\frac{k}{m}-(\omega\prime-\lambda i)^2}\hat{\ddot{y}}(\omega' - \lambda i)\hat{\ddot{y}}(-\omega' + \lambda i)\, d\omega' \tag{14}$$

となり，変数変換$\Omega = \omega' - \lambda i$を行えば

$$\begin{aligned}\hat{\hat{E}}\bigg|_{\omega=0} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda i-\infty}^{-\lambda i+\infty} \frac{i\Omega m}{\frac{k}{m}-\Omega^2}\hat{\ddot{y}}(\Omega)\hat{\ddot{y}}(-\Omega)\, d\Omega \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda i-\infty}^{-\lambda i+\infty} \frac{i\Omega m}{\left(\Omega+\sqrt{\frac{k}{m}}\right)\left(\Omega-\sqrt{\frac{k}{m}}\right)}\hat{\ddot{y}}(\Omega)\hat{\ddot{y}}(-\Omega)\, d\Omega \end{aligned} \tag{15}$$

となる．

ここで右辺の積分を留数定理を用いて行うことを考える．被積分関数が$\pm\Omega$で絶対値が等しく符号が逆であることを考慮すると，**図-2** の A→B→B'→C→D→A'→A の積分経路において，B'→C での積分と D→A'での積分は互いに打ち消し合い，C→D の積分もゼロとなる．また，B→B'の積分と A'→A の積分は$|\Omega| \to \infty$のときゼロに収束する（被積分関数の分母にΩ^2があるため）．したがって式(15)の積分（すなわち経路 A→B で

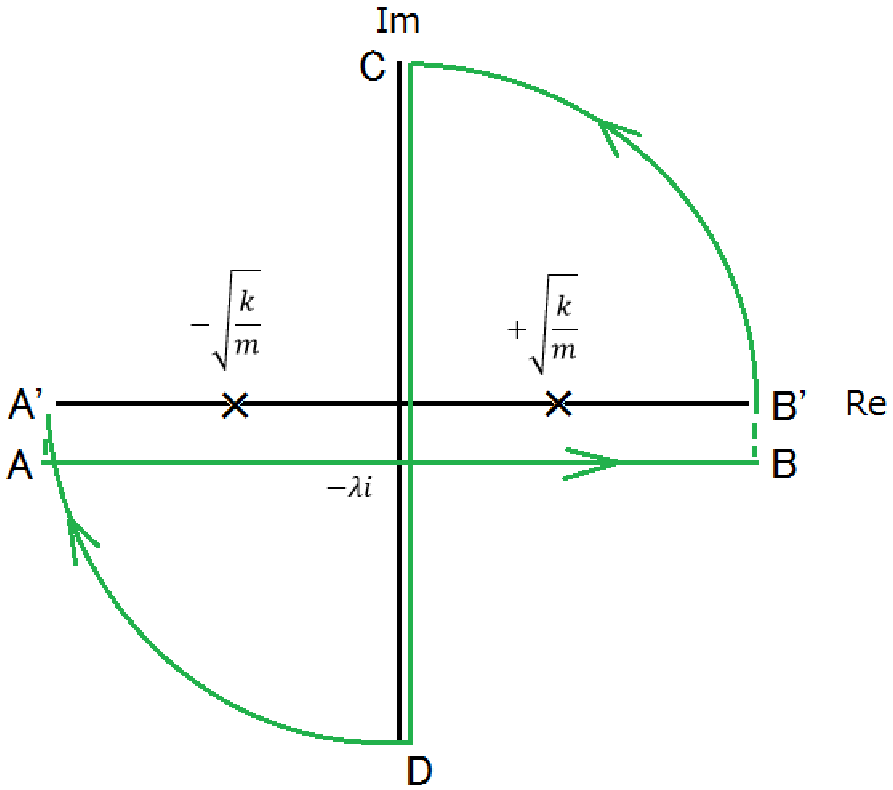

図-2　Ω平面上での積分経路

の積分）は経路 A→B→B'→C→D→A'→A での積分に置き換えることができる．式(15)の被積分関数は$\pm\sqrt{k/m}$に特異点を有する．このうち$+\sqrt{k/m}$における留数が拾われる形となり，積分結果は次式となる．

$$\hat{E}\Big|_{\omega=0}=\frac{1}{2}m\hat{\ddot{y}}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)\hat{\ddot{y}}\left(-\sqrt{\frac{k}{m}}\right) \tag{16}$$

地動加速度のフーリエ変換は実関数のフーリエ変換であるから＋側と－側で互いに共役である．このことを考慮すると次式が得られる．

$$\hat{E}\Big|_{\omega=0}=\frac{1}{2}m\left|\hat{\ddot{y}}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)\right|^2 \tag{17}$$

この左辺はEの残留値すなわち地震動終了後に自由振動を行っている系の運動エネルギーと弾性エネルギーの和であり，系の残留応答速度をv_{max}とすれば

$$\hat{E}\Big|_{\omega=0}=\frac{1}{2}m{v_{max}}^2 \tag{18}$$

である．式(17)(18)より

$$v_{max}=\left|\hat{\ddot{y}}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)\right| \tag{19}$$

である．すなわち非減衰1自由度系の残留応答速度は地動加速度のフーリエスペクトルの固有振動数における値に等しい．

参考文献

1) 大崎順彦：新・地震動のスペクトル解析入門，鹿島出版会，1994年，p.151.

2) 柴田明徳：最新 耐震構造解析，第2版，森北出版，2003年，p.154.

3) 秋山宏：エネルギーの釣合に基づく建築物の耐震設計，技報堂出版，1999年，p.13.

4) Hudson, D.E.: Some problems in the application of spectrum techniques to strong-motion earthquake analysis, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol.52, No.2, 1962, pp.417-430.