2019/7/12

勾配・発散・回転

野津

1. はじめに

ここではスカラー場の勾配とベクトル場の発散・回転について必要なことをまとめている.

2. 勾配・発散・回転の定義とその簡潔な表現

まず演算子∇を次式により定義する.

$$\nabla = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \tag{1}$$

これを用いてスカラー場の勾配とベクトル場の発散・回転は次式で定義される.

$$\text{勾配}\quad \mathrm{grad}\,\phi = \nabla\phi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\phi}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial x_3} \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\text{発散}\quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{\psi} = \nabla\cdot\boldsymbol{\psi} = \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\psi_3}{\partial x_3} \tag{3}$$

$$\text{回転}\quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\psi} = \nabla\times\boldsymbol{\psi} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\psi_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial\psi_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \tag{4}$$

ここにϕはスカラー場，$\boldsymbol{\psi}$はベクトル場である．勾配・発散・回転は以下のように簡潔に表現することができる.

$$\text{勾配の}i\text{成分}\qquad (\nabla\phi)_i = \phi_{,i} \tag{5}$$

$$\text{発散}\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{\psi} = \psi_{i,i} \tag{6}$$

$$\text{回転の}i\text{成分}\qquad (\nabla\times\boldsymbol{\psi})_i = \varepsilon_{ijk}\psi_{k,j} \tag{7}$$

ここで添え字には総和規約を適用する．またε_{ijk}は Levi-Civita の記号である.

3. 勾配・発散・回転が座標系に依存しないことについて

ここでは勾配・発散・回転をデカルト座標系の成分を用いて定義してしまったので，これらが座標系に依存するのではないかとの不安が残る．そこで，以下ではこの不安を払拭しておくことにする.

ここでは原点を共有する新旧のデカルト座標系を用意し，旧座標系$\boldsymbol{x}$から新座標系$\bar{\boldsymbol{x}}$への変換は次式で行えるものとする.

$$\begin{pmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\\ \bar{x}_3\end{pmatrix} = \boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} \tag{8}$$

ここに$\boldsymbol{Q}$は回転行列である．座標軸の並行移動だけでは勾配・発散・回転が影響を受けないことは明らかなので新旧座標系が原点を共有するとしても一般性を失わない．

3.1　勾配

ここでは，新旧の座標系で定義される勾配の間に式(8)の変換関係が成り立つことを示せばよい．すなわち

$$\frac{\partial\phi}{\partial\bar{x}_i} = Q_{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x_j} \tag{9}$$

となることを示せばよい．そこで，実際に式(9)の左辺を計算してみると

$$\frac{\partial\phi}{\partial\bar{x}_i} = \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial\bar{x}_i} = \frac{\partial\phi}{\partial x_j}Q_{ji}^{-1} \tag{10}$$

ここで，新座標のi成分を旧座標のj成分で偏微分したものと，旧座標のj成分を新座標のi成分で偏微分したものは等しい．これらはともに 2 つの座標軸のなす角の余弦に等しいからである．これを式で表現すると

$$Q_{ji}^{-1} = Q_{ij} \tag{11}$$

となる．式(10)(11)より式(9)が言える．すなわちスカラー場の勾配は座標系に依存しない（ベクトル量である）．

3.2　発散

新座標系における発散に式(10)と同様の計算を適用すると

$$\frac{\partial\bar{\psi}_i}{\partial\bar{x}_i} = \frac{\partial\bar{\psi}_i}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial\bar{x}_i} = \frac{\partial\bar{\psi}_i}{\partial x_j}Q_{ji}^{-1} = Q_{ij}\frac{\partial\bar{\psi}_i}{\partial x_j} \tag{12}$$

となる．ここでさらに右辺の$\bar{\psi}_i$を旧座標系で表現すると

$$\frac{\partial\bar{\psi}_i}{\partial\bar{x}_i} = Q_{ij}Q_{ik}\frac{\partial\psi_k}{\partial x_j} = Q_{ji}^{-1}Q_{ik}\frac{\partial\psi_k}{\partial x_j} = \delta_{jk}\frac{\partial\psi_k}{\partial x_j} = \frac{\partial\psi_j}{\partial x_j} \tag{13}$$

この右辺は旧座標系における発散に等しい．すなわちベクトル場の発散は座標系に依存しない（スカラー量である）．

3.3　回転

回転についてはテクニカルな処理が必要である．ここで示したいのは，新旧の座標系で定義される回転の間に式(8)の変換関係が成り立つこと，すなわち

$$\varepsilon_{imn}\frac{\partial\bar{\psi}_n}{\partial\bar{x}_m}=Q_{ij}\varepsilon_{jkl}\frac{\partial\psi_l}{\partial x_k} \tag{14}$$

となることである．そこでこの右辺を計算していくと

$$Q_{ij}\varepsilon_{jkl}\frac{\partial\psi_l}{\partial x_k}=Q_{ij}\varepsilon_{jkl}\frac{\partial\psi_l}{\partial\bar{x}_m}\frac{\partial\bar{x}_m}{\partial x_k}=\varepsilon_{jkl}Q_{ij}Q_{mk}\frac{\partial\psi_l}{\partial\bar{x}_m} \tag{15}$$

右辺のψ_lを新座標系で表現すると

$$Q_{ij}\varepsilon_{jkl}\frac{\partial\psi_l}{\partial x_k}=\varepsilon_{jkl}Q_{ij}Q_{mk}Q_{ln}^{-1}\frac{\partial\bar{\psi}_n}{\partial\bar{x}_m}=\varepsilon_{jkl}Q_{ij}Q_{mk}Q_{nl}\frac{\partial\bar{\psi}_n}{\partial\bar{x}_m} \tag{16}$$

ところで一般に3×3の正方行列A_{ij}の行列式に関して次式が成り立つ（項毎に比較するとすぐに証明できる）．

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}=\varepsilon_{ijk}A_{1i}A_{2j}A_{3k} \tag{17}$$

ここで数の組(1,2,3)の順序を入れ替えた(l,m,n)に対し

$$\varepsilon_{ijk}A_{li}A_{mj}A_{nk}$$

のような積を考えると，これは行列A_{ij}の行を入れ替えたものの行列式となっている．一般に行列A_{ij}の行を奇数回入れ替えると行列式は(-1)倍，偶数回入れ替えると行列式は$(+1)$倍となる．(l,m,n)が(1,2,3)の奇置換ならば行を奇数回入れ替えることになるので行列式は(-1)倍，(l,m,n)が(1,2,3)の偶置換ならば行を偶数回入れ替えることになるので行列式は$(+1)$倍となる．したがって

$$\varepsilon_{ijk}A_{li}A_{mj}A_{nk}=\varepsilon_{lmn}\varepsilon_{ijk}A_{1i}A_{2j}A_{3k}=\varepsilon_{lmn}|\boldsymbol{A}| \tag{18}$$

となることがわかる．これを式(16)の右辺に適用すると

$$Q_{ij}\varepsilon_{jkl}\frac{\partial\psi_l}{\partial x_k}=\varepsilon_{imn}|\boldsymbol{Q}|\frac{\partial\bar{\psi}_n}{\partial\bar{x}_m} \tag{19}$$

回転行列$\boldsymbol{Q}$の行列式は 1 なので

$$Q_{ij}\varepsilon_{jkl}\frac{\partial\psi_l}{\partial x_k}=\varepsilon_{imn}\frac{\partial\bar{\psi}_n}{\partial\bar{x}_m} \tag{20}$$

となり式(14)が成立する．すなわちベクトル場の回転は座標系に依存しない（ベクトル量である）．

4.　ラプラシアン

スカラー場ϕの勾配の発散すなわち

$$\nabla\cdot(\nabla\phi)=\phi_{,ii}=\frac{\partial^2\phi}{\partial {x_1}^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial {x_2}^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial {x_3}^2} \tag{21}$$

を表すためにラプラスの演算子（ラプラシアン）が用いられることが多い．ラプラシアンは

$$\nabla^2=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2}{\partial {x_1}^2}\\ \dfrac{\partial^2}{\partial {x_2}^2}\\ \dfrac{\partial^2}{\partial {x_3}^2}\end{pmatrix} \tag{22}$$

で定義され，これを用いてスカラー場ϕの勾配の発散は

$$\nabla\cdot(\nabla\phi)=\nabla^2\phi \tag{23}$$

のように表される．

5.　勾配・発散・回転の性質

勾配・発散・回転は以下の性質を有する．これらは式(5)(6)(7)を用いると簡単に証明できる．これらの式は弾性波動論において多用される．

(1) $\nabla\times(\nabla\phi)=\mathbf{0}$（勾配の回転はゼロ）

左辺のi成分を計算すると

$$\left(\nabla\times(\nabla\phi)\right)_i=\varepsilon_{ijk}\phi_{,kj}=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ijk}\phi_{,kj}+\varepsilon_{ijk}\phi_{,kj}\right)=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ijk}\phi_{,kj}+\varepsilon_{ikj}\phi_{,jk}\right)=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ijk}\phi_{,kj}-\varepsilon_{ijk}\phi_{,kj}\right)=0$$

となる．■

(2) $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{\psi})=0$（回転の発散はゼロ）

実際に左辺を計算すると

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{\psi})=\varepsilon_{ijk}\psi_{k,ji}=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ijk}\psi_{k,ji}+\varepsilon_{ijk}\psi_{k,ji}\right)=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ijk}\psi_{k,ji}+\varepsilon_{jik}\psi_{k,ij}\right)=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ijk}\psi_{k,ji}-\varepsilon_{ijk}\psi_{k,ji}\right)=0$$

となる．■

(3) $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\psi}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}) - \nabla^2 \boldsymbol{\psi}$

右辺第 2 項は$\boldsymbol{\psi}$の個々の成分にラプラシアンを作用させるという意味である．左辺のi成分は

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\psi_{m,lj}$$

であるが，ε_{ijk}の値が変化しないように添え字の順序を入れ替えると

$$\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\psi_{m,lj}$$

となる．これを Levi-Civita の記号の性質を用いて変形すると

$$(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{lj})\psi_{m,lj} = \psi_{j,ji} - \psi_{i,jj}$$

となり，証明すべき式の右辺のi成分に一致する．