

1. はじめに

地震動のフーリエ位相を円振動数で微分したものは群遅延時間と呼ばれ、[地震動の経時特性と関係を有している](#)¹⁾³⁾。波形合成の際にこの関係を利用し、適切な群遅延時間を与えることにより適切な経時特性を有する波形を合成しようとする研究も数多く行われている⁴⁾⁵⁾。その成果は実用的な設計入力地震動の策定にも応用されている⁶⁾⁷⁾。しかしながら、地震動のフーリエ位相（以下、地震動位相とよぶ）および群遅延時間の統計的性質については未解明な点も残されており、継続的な研究が行われている。それらの研究の中には「地震動位相は円振動数に対していたるところ微分不可能であり、地震動位相の円振動数に関する1階微分である群遅延時間は定義できない」としているものもある⁸⁾。このことが正しいとすれば、地震動位相の微分としての群遅延時間という概念に依拠してきた既往研究¹⁾⁵⁾の根拠が揺らぐことになり、その実務への応用にも疑問符が付くこととなってしまう。

そこで、本稿では、地震動位相の定義に立ち返り、まずは地震動のフーリエ変換の微分可能性について検討し、その結果に基づき、地震動位相の微分可能性について検討する。結論としては、地震動位相はいたるところ微分不可能ではないが、特定の条件下で微分不可能となる。

2. 地震動のフーリエ変換の微分可能性

本稿では地震動の時刻歴波形 $f(t)$ として、限定された時間区間 $[0, T]$ のみで値を持ち、その外側ではゼロであるもの（コンパクトサポート $[0, T]$ を有するもの）を考える。また地震動のフーリエ変換と逆変換は次式で定義する。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (2)$$

ここに ω は円振動数である。式(1)において ω での値と $\omega + \Delta\omega$ での値の差をとり $\Delta\omega$ で割ると

$$\frac{F(\omega+\Delta\omega)-F(\omega)}{\Delta\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{e^{-i(\omega+\Delta\omega)t}-e^{-i\omega t}}{\Delta\omega} dt = \int_0^T f(t) \frac{e^{-i(\omega+\Delta\omega)t}-e^{-i\omega t}}{\Delta\omega} dt \quad (3)$$

が得られる。第2式から第3式への変形は $f(t)$ がコンパクトサポート $[0, T]$ を有することによる。この両辺において $\Delta\omega \rightarrow 0$ の極限をとると

$$\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{F(\omega+\Delta\omega)-F(\omega)}{\Delta\omega} = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \int_0^T f(t) \frac{e^{-i(\omega+\Delta\omega)t}-e^{-i\omega t}}{\Delta\omega} dt = \int_0^T f(t) \left(\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{e^{-i(\omega+\Delta\omega)t}-e^{-i\omega t}}{\Delta\omega} \right) dt \quad (4)$$

が得られる。式(4)の第2式から第3式にかけて極限操作と積分の順序を入れ替えている。この点について気になる方は付録を参照していただきたい。ここで右辺の括弧内の極限は指数関数の微分であるから必ず存在し、右辺は

$$-i \int_0^T t f(t) e^{-i\omega t} dt = -i \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (5)$$

となる。よって左辺の極限も存在する。左辺の極限が存在する場合、それは $F(\omega)$ の ω に関する微分と呼ばれ、 $dF(\omega)/d\omega$ と書かれる。よって次式が成立する。

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = -i \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (6)$$

以上により、コンパクトサポート $[0, T]$ を有する時間関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ は円振動数 ω で微分可能であり、その実部 R と虚部 I も円振動数 ω で微分可能である。

ところで、ここまでの議論はかなり理詰めであったが、より直感的な説明として以下のような説明も可能である。まず、微分不可能な時間関数を考える。その一例として三角形で表される関数がある。この関数はフーリエ変換可能である（すなわち $\sin \omega t$, $\cos \omega t$ の和で表すことができる）が、その際、 $\omega \rightarrow \infty$ までの寄与が必要である。有限の ω までの和では尖った部分を表現することができないからである。すなわち一般に時間領域で微分不可能な関数は周波数領域では $\omega \rightarrow \infty$ まで値をもつ。ここで、時間領域と周波数領域を入れ替えれば、「周波数領域で微分不可能な関数は時間領域では $t \rightarrow \infty$ まで値をもつ」と言える。この対偶をとれば、時間領域でコンパクトサポートを有する関数は周波数領域では微分可能であると言える。

3. 地震動位相の微分可能性

上述の結果を受け、以下では地震動位相の微分可能性を検討する。

地震動のフーリエ振幅 $A(\omega)$ および位相 $\theta(\omega)$ とフーリエ変換との関係は次式で与えられる。

$$F(\omega) = A(\omega) e^{-i\theta(\omega)} \quad (7)$$

ここで位相は澤田他⁹⁾にならい複素平面上で時計回りを正としている。先に述べたように $F(\omega)$ は ω に関して微分可能であり、 ω を変化させたとき $F(\omega)$ は複素平面上を滑らかに動く。それにも関わらず、 $F(\omega)$ から計算される位相 $\theta(\omega)$ が微分不可能となる場合があるとすれば、それはどのような場合であろうか。

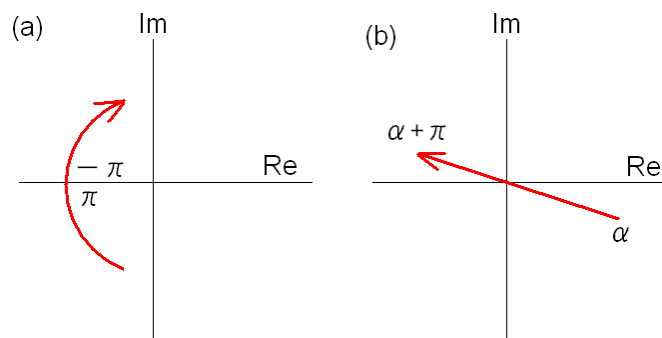


図-1 位相が微分不可能となる原理。矢印は複素平面上での $F(\omega)$ の動きを示す。(a)は ω の増加と共に $F(\omega)$ が複素平面上の第3象限から第2象限に移動する場合であり、このとき地震動位相に 2π の不連続が生じる。(b)は ω の増加と共に $F(\omega)$ が複素平面上の原点を横切る場合であり、このとき地震動位相には π の不連続が生じる。

原理的には、図-1 に示すように、それには二つの場合が考えられる。一つは、図-1(a)に示すように、例えば地震動位相を $(-\pi, \pi)$ の範囲で定義していて、 ω の増加と共に $F(\omega)$ が複素平面上の第3象限から第2象限に移動する場合であり、このとき地震動位相に 2π の不連続が生じ、地震動位相は微分不可能となる。もう一つは、図-1(b)に示すように、 ω の増加と共に $F(\omega)$ が複素平面上の原点を横切る場合であり、このとき地震動位相には π の不連続が生じ、地震動位相は微分不可能となる。このうち前者の問題点については、第3象限と第2象限の境界で位相が連続となるように位相を選ぶことにすれば（すなわちアンラップ操作を適切に行えば）解決できる。しかし、後者の問題点はアンラップ操作を適切に行っても解決できない。

佐藤^{10,11)}は、第3象限と第2象限の境界でのアンラップ操作を適切に行うことを前提に、位相差分を次式で求めることを提案している（この式の導出過程については後述）。

$$\Delta\theta(\omega) = -\frac{R\Delta I - I\Delta R}{R^2 + I^2} \quad (8)$$

ここに R は $F(\omega)$ の実部、 I は $F(\omega)$ の虚部、 ΔR は ΔF の実部、 ΔI は ΔF の虚部である（右辺の負号は位相を時計回りに定義したことによる）。この式は、第3象限と第2象限の境界にもそのまま適用可能であるという利点がある。この式は、地震動位相の微分可能性の検討にも用いることができる。すなわち、式(8)の両辺を $\Delta\omega$ で除し $\Delta\omega \rightarrow 0$ の極限をとれば

$$\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = -\frac{R(dI/d\omega) - I(dR/d\omega)}{R^2 + I^2} \quad (9)$$

が得られる。右辺の $(dR/d\omega)$ と $(dI/d\omega)$ については微分可能であることを既に確認しているの、右辺の分母 $(|F(\omega)|^2)$ の自乗である）がゼロとなる場合を除けば、位相 $\theta(\omega)$ は微分可能である。すなわち群遅延時間 $t_{gr}(\omega)$ は存在する。右辺の分母がゼロとなる場合は微分不可能である。まとめると、アンラップ操作を適切に行う場合、位相 $\theta(\omega)$ が微分不可能となるのは、 $F(\omega)$ が複素平面上の原点を通過する場合であり、またその場合に限られる。

なお、Katukura et al.¹²⁾は群遅延時間を次式で計算することを提案している。

$$t_{gr}(\omega) = -\text{Im} \left[\frac{F'(\omega)}{F(\omega)} \right] \quad (10)$$

この式の右辺の括弧内に

$$\frac{dF}{d\omega} = \frac{dR}{d\omega} + i \frac{dI}{d\omega} \quad (11)$$

を代入して整理しても式(9)が得られる。

4. 地震動の群遅延時間と経時特性の関係の再検討

以上の検討結果から、地震動位相は「いたるところ微分不可能」ではないが、 $F(\omega)$ がゼロとなる周波数では微分不可能となることがわかった。すなわち、 $F(\omega)$ がゼロとなる周波数では群遅延時間は定義できないことになる。このことが、地震動の群遅延時間と経時特性の関係にどのような影響を及ぼすか興味があるが、結論としては、影響はないと言える。

地震動の群遅延時間の平均値と平均到来時刻との関係は次式で与えられる。

$$\langle t \rangle = \frac{\int_0^{\infty} t_{gr}(\omega) |F(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega}$$

ここに $\langle t \rangle$ は平均到来時刻（コーエン³⁾は平均時間と呼んでいる）， $t_{gr}(\omega)$ は群遅延時間である．この式の導出過程では，次式により時間に関する積分から周波数に関する積分への置き換えが行われる（[なぜ群遅延時間と地震動の経時特性は関係があるのか？（その1）](#)の式(14)）．

$$\int_{-\infty}^{\infty} t |f(t)|^2 dt = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) \frac{dF(\omega)}{d\omega} d\omega$$

この右辺において， $F(\omega)$ がゼロとなる周波数を積分区間から外し，以降の議論に進めば，結論に変わりはないことがわかる．

一方，地震動の群遅延時間の標準偏差と到来時刻の標準偏差との関係は[次式](#)で与えられる．

$$\sigma_t^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{dA(\omega)}{d\omega} \right)^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega} + \sigma_{tgr}^2$$

ここに σ_t は到来時刻の標準偏差， σ_{tgr} は群遅延時間の標準偏差， $A(\omega)$ はフーリエ振幅スペクトルである．この式の導出過程では，次式により時間に関する積分から周波数に関する積分への置き換えが行われる（[なぜ群遅延時間と地震動の経時特性は関係があるのか？（その2）](#)の式(9)）．

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{dF(\omega)}{d\omega} \right|^2 d\omega$$

この右辺において， $F(\omega)$ がゼロとなる周波数を積分区間から外し，以降の議論に進めば，結論に変わりはないことがわかる．

5. 群遅延時間の差分近似の不安定性

理論上は位相が微分不可能となるのは $F(\omega)$ が複素平面上の原点を通過する場合だけであるが，数値計算上は， $F(\omega)$ がちょうど原点を通過しなくても，原点付近を通過するとき， ω の変化に対して位相が急激に変化し，群遅延時間の差分近似である $\Delta\theta/\Delta\omega$ が数値的に不安定となり得る．

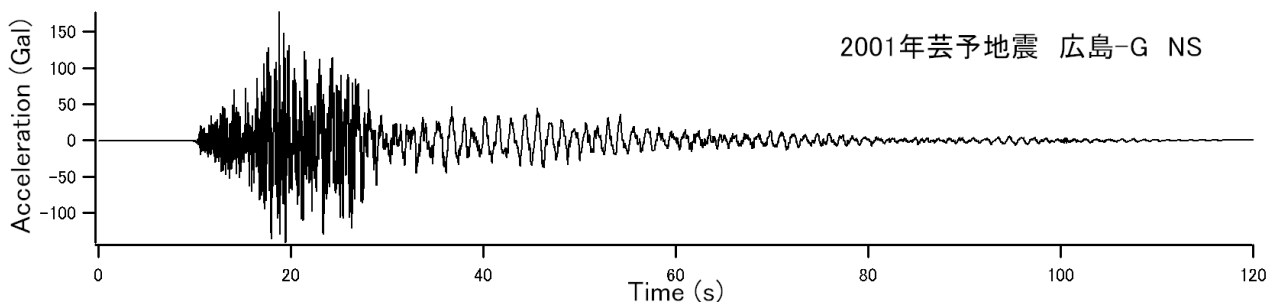


図-2 数値計算例の対象とする加速度波形

ここでは図-2に示す加速度波形に対して実際に群遅延時間の差分近似 $\Delta\theta/\Delta\omega$ を計算し、その数値的な不安定が、 $F(\omega)$ が複素平面上の原点に近接することによって生じていることを確認する。図-2に示す加速度波形は2001年芸予地震の際に港湾地域強震観測¹³⁾の観測点「広島-G」で観測された波形のNS成分であり、その数値データは文献13)の付録CDまたは[港湾地域強震観測のホームページ](#)から入手できる。 Δt は0.01sである。データ長は120sであり、100~120sの範囲にcos型のテーパを適用した上で後続のゼロを追加し $N=2^{18}$ 個のデータとした。群遅延時間の差分近似としては式(9)の差分近似である次式を用いた。

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta\omega} = -\frac{R(\Delta I/\Delta\omega) - I(\Delta R/\Delta\omega)}{R^2 + I^2} \quad (12)$$

式(12)に現れる $\Delta R/\Delta\omega$ と $\Delta I/\Delta\omega$ の計算には式(6)の近似である次式を用いた。

$$\frac{\Delta F}{\Delta\omega} = -i \Delta t \sum_{k=1}^N t_k f_k e^{-i\omega t_k} \quad (13)$$

ここに f_k は $t = t_k = (k-1)\Delta t$ (ただし $k = 1, 2, \dots, N$) における $f(t)$ の値である。

群遅延時間の差分近似 $\Delta\theta/\Delta\omega$ の計算結果を図-3の上段に、同じ波形のフーリエ振幅スペクトルを図-3の下段にそれぞれ示す。群遅延時間の差分近似の計算結果においては、ところどころで著しく絶対値の大きい値が出現している。これは、文献10)における釧路沖地震に対する位相差分の計算結果および文献11)における兵庫県南部地震に対する位相差分の計算結果と同様の傾向である。そして、群遅延時間の差分近似の絶対値が著しく大きい値を示している周波数においては、フーリエ振幅スペクトルの値が極小値を示しているように見える。

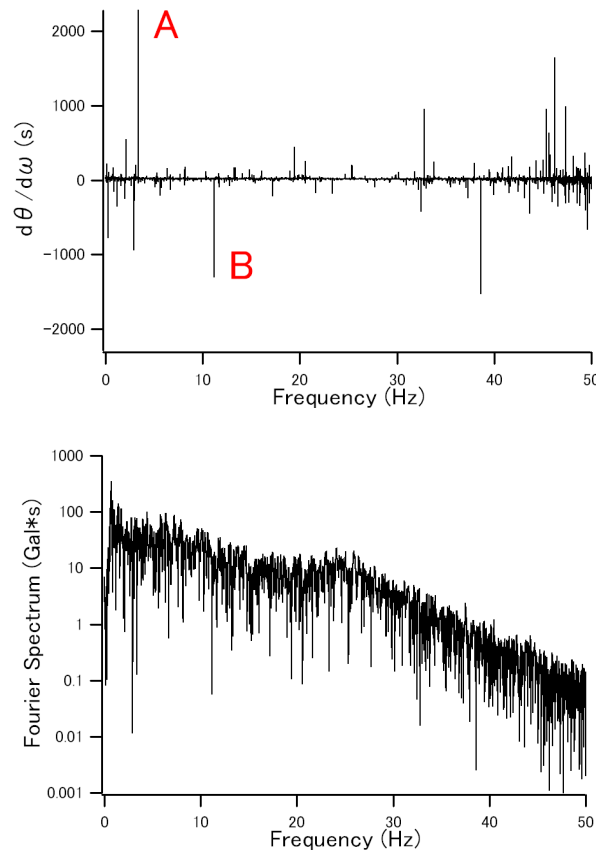


図-3 図-2の波形に対する群遅延時間の差分近似 $\Delta\theta/\Delta\omega$ の計算結果(上)とフーリエ振幅スペクトル(下)

このことをよりわかりやすく示すため、図-3 上段に A, B として示す 2 箇所の特異値に着目して、その付近を拡大して示したものが図-4 である。これらの図から、フーリエ振幅スペクトルが極小値を示している周波数において、群遅延時間の差分近似が特異な値となっていることが確認できる。すなわち、複素平面上で $F(\omega)$ が原点に接近するとき、群遅延時間の計算結果に数値的不安定が生じている。この数値的不安定をそのままにしたまま群遅延時間の統計的性質について議論すると誤った結論に陥る恐れがある。

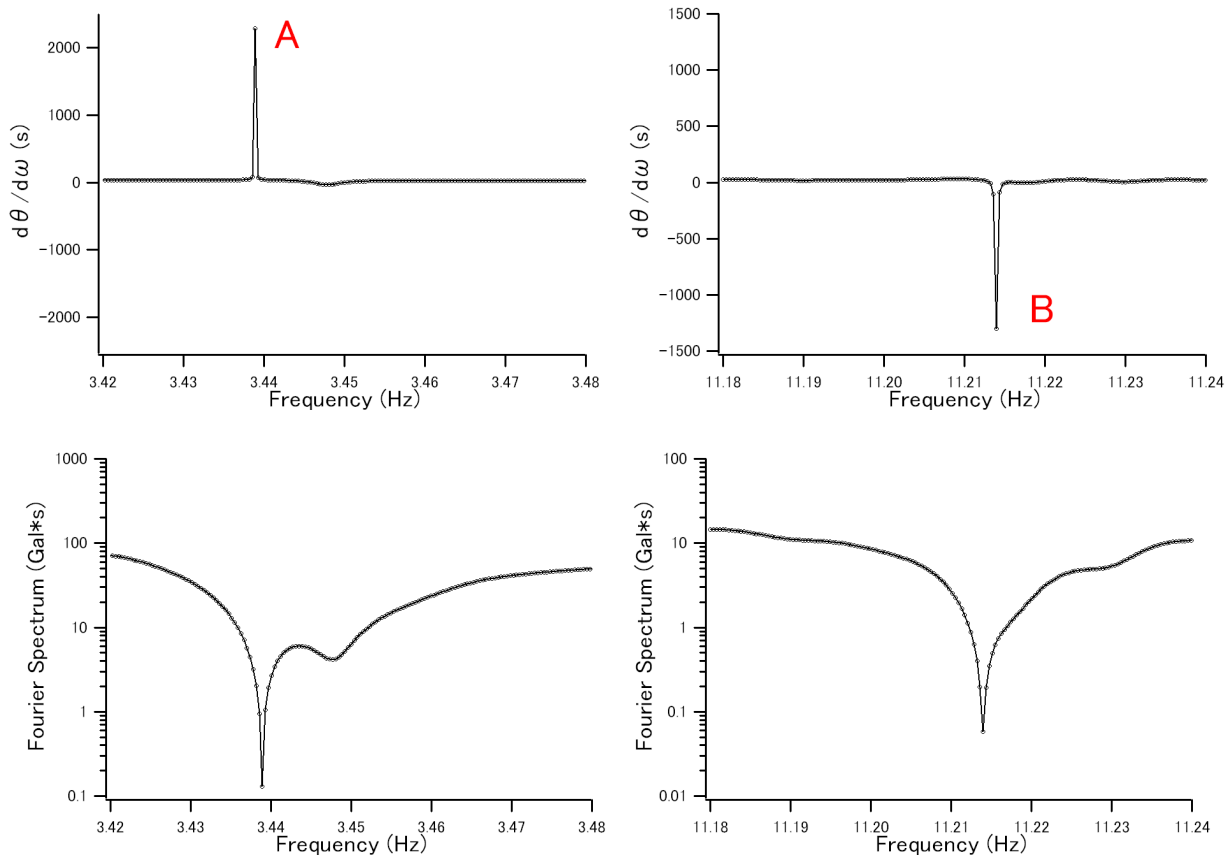


図-4 図-3 の 3.44Hz 付近 (左) と 11.21Hz 付近 (右) を拡大したもの

6. 群遅延時間の差分近似の数値的不安定への対処方法

群遅延時間の差分近似の数値的不安定への対処方法として一つ考えられるのは、 $|F(\omega)|$ がある程度大きい ω に対する群遅延時間だけを採用することである。ここで式(8)の導出過程について再確認を行う。図-5に示すように複素平面上で半径 $|F(\omega)|$ の円を考えると、点 $F(\omega)$ における接線方向のベクトルは $(I, -R)$ で表される。したがって ΔF の接線方向成分は内積の演算から $-(R\Delta I - I\Delta R)/\sqrt{R^2 + I^2}$ となり、

$$\tan(\Delta\theta) = -\frac{R\Delta I - I\Delta R}{R^2 + I^2}$$

が成立する。ここでさらに、 $\tan(\Delta\theta) \cong \Delta\theta$ が成立する程度に $\Delta\theta$ が小さいとすれば、式(8)が成立する。

ここで、式(8)により $\Delta\theta$ を推定できるためには、 $\tan(\Delta\theta)$ が十分に小さくなければならないこと、すなわち、 $|F(\omega)|$ に対して相対的に $|\Delta F|$ が十分小さくなければならないことがわかるが、どの程度小さくならないであろうか。

これを明らかにするために、ここでは $F(\omega) = 1$ に固定し（すなわち $F(\omega)$ は実軸上にあるとする）、 ΔF に関しては絶対値を $0 \sim 2$ 、向きを $0 \sim 360^\circ$ の範囲で変化させ、式(8)により計算される $\Delta\theta$ と正しい $\Delta\theta$ との比較を行った。なお、ここでは $F(\omega) = 1$ としているため、正しい $\Delta\theta$ は $F(\omega) + \Delta F$ の複素平面上の位置から容易に求めることができる。

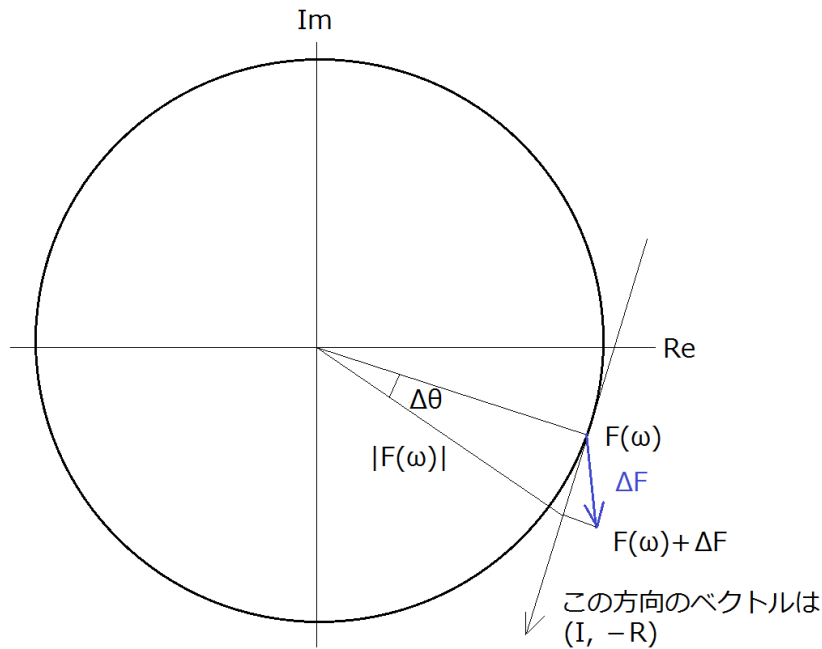


図-5 式(8)の導出過程の概念図

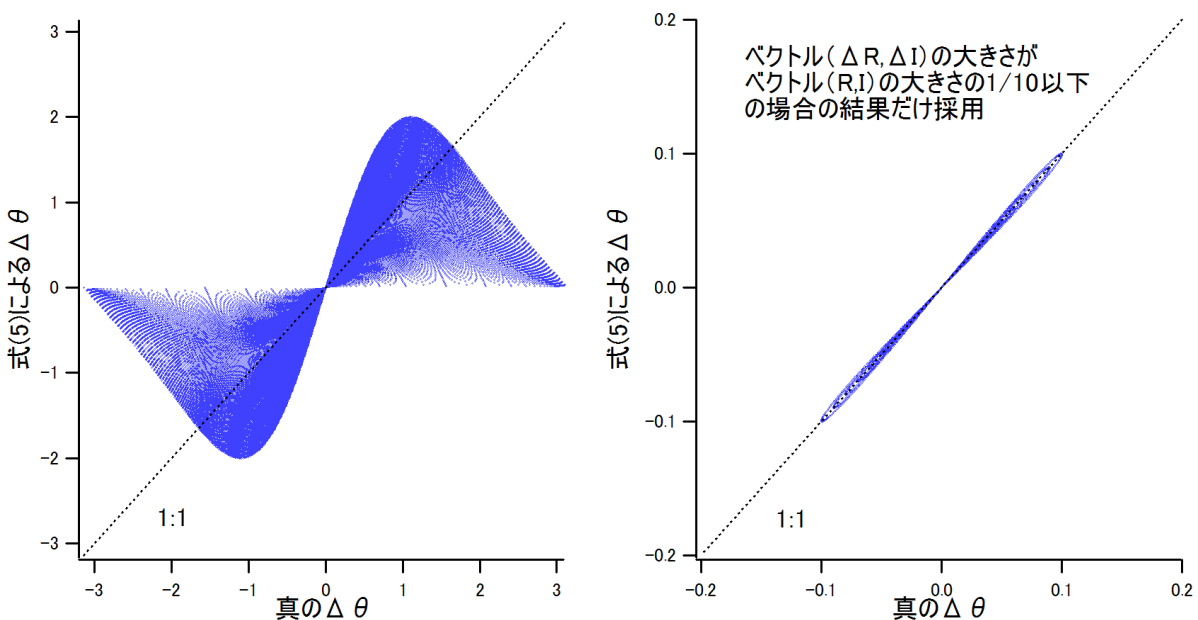


図-6 式(8)で計算される位相差分の精度。 (左) ΔF の絶対値を $0 \sim 2$ 、向きを $0 \sim 360^\circ$ の範囲で変化させた場合、 (右) 上記のうち ΔF の絶対値が F の絶対値の $1/10$ 以下の場合。

図-6 に結果を示す。 ΔF の絶対値を $0 \sim 2$ 、向きを $0 \sim 360^\circ$ の範囲で変化させた場合は、式(8)により計算される $\Delta\theta$ は全く正しくない場合もある。しかし、 ΔF の絶対値が F の絶対値の $1/10$ 以下の場合に限れば、結果は

ほぼ 1:1 の線に乗っており、式(8)により $\Delta\theta$ を正しく計算できることがわかる。そこで、式(8)と等価な式である式(12)により群遅延時間を計算する場合には、 ΔF の絶対値が F の絶対値の 1/10 以下の場合の計算結果を採用することが数値的不安定への一つの対処方法である。

ところで、群遅延時間を計算するとき、実際には個々の ω に対する群遅延時間ではなく、ある周波数帯における群遅延時間の平均値や標準偏差だけが必要である場合が多い。その場合、もっと簡単な方法がある。

ある周波数帯における群遅延時間の平均値は

$$\langle t_{gr} \rangle = \frac{\int_{\omega_1}^{\omega_2} t_{gr}(\omega) |F(\omega)|^2 d\omega}{\int_{\omega_1}^{\omega_2} |F(\omega)|^2 d\omega}$$

で与えられるが、被積分関数の $t_{gr}(\omega)$ に式(9)右辺を代入すると $|F(\omega)|^2$ は打ち消し合って

$$\langle t_{gr} \rangle = -\frac{\int_{\omega_1}^{\omega_2} [R(dI/d\omega) - I(dR/d\omega)] d\omega}{\int_{\omega_1}^{\omega_2} |F(\omega)|^2 d\omega}$$

となる。式(9)で $|F(\omega)|^2$ が分母に来ることが数値的不安定の原因であったが、ここでは $|F(\omega)|^2$ が分母から消えているので数値的不安定が生じない。

同様に、ある周波数帯における群遅延時間の標準偏差を計算する際には

$$\frac{\int_{\omega_1}^{\omega_2} t_{gr}^2(\omega) |F(\omega)|^2 d\omega}{\int_{\omega_1}^{\omega_2} |F(\omega)|^2 d\omega}$$

のような積分を行う必要があるが、被積分関数の $t_{gr}(\omega)$ に式(9)右辺を代入すると $|F(\omega)|^2$ は打ち消し合って

$$\frac{\int_{\omega_1}^{\omega_2} [(dI/d\omega) \cos \theta + (dR/d\omega) \sin \theta]^2 d\omega}{\int_{\omega_1}^{\omega_2} |F(\omega)|^2 d\omega}$$

となる。式(9)で $|F(\omega)|^2$ が分母に来ることが数値的不安定の原因であったが、ここでは $|F(\omega)|^2$ が分母から消えているので数値的不安定が生じない。

参考文献

- 1) 和泉正哲, 勝倉裕: 地震動の位相情報に関する基礎的研究, 日本建築学会論文報告集, No.327, pp. 20-28, 1983 年.
- 2) 理論地震動研究会編: 地震動—その合成と波形処理, 鹿島出版会, 1994 年.
- 3) L.コーエン著, 吉川昭・佐藤俊輔訳: 時間-周波数解析, 朝倉書店, pp. 1-26, 1998 年.
- 4) 佐藤智美, 植竹富一, 菅原良次: 群遅延時間を用いた長周期地震動の経験的経時特性モデルに関する研究, 日本建築学会構造系論文集, No.493, pp. 31-39, 1997 年.
- 5) 佐藤忠信, 室野剛隆, 西村昭彦: 観測波に基づく地震動の位相スペクトルのモデル化, 土木学会論文集, No.640/I-50, pp.119-130, 2000 年.
- 6) 鉄道総合技術研究所編: 鉄道構造物等設計標準・同解説 耐震設計, 丸善出版, 2012 年.

- 7) 大川出, 齊藤大樹, 佐藤智美, 佐藤俊明, 北村春幸, 鳥井信吾, 辻泰一, 北村佳久, 藤田聡, 関谷裕二, 関松太郎: 長周期地震動に対する超高層建築物等の安全対策に関する検討, 建築研究所資料, No.127, 2010年.
- 8) 佐藤忠信: 確率過程として見た地震動位相の不可解性, 第35回地震工学研究発表会, 土木学会, 2015年.
- 9) 澤田純男, 盛川仁, 土岐憲三, 横山圭樹: 強震動の位相スペクトルにおける伝播経路・サイト特性の分離, 第10回日本地震工学シンポジウム, pp. 915-920, 1998年.
- 10) 佐藤忠信: 地震動位相差分の確率特性とその数理的解釈, 土木学会論文集 A1, Vol.70, No.2, pp.295-305, 2014年.
- 11) 佐藤忠信, 吉田郁政, 大島義信: 地震動位相のモデル化について, 土木学会論文集 A1, Vol.70, No.4, pp.I_273-I_284, 2014年.
- 12) Katukura, H., Ohno, S. and Izumi, M.: Symmetrical FFT technique and its applications to earthquake engineering, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.18, pp.717-725, 1989.
- 13) 深澤清尊, 佐藤陽子, 野津厚, 菅野高弘: 港湾地域強震観測年報 (2001), 港湾空港技術研究所資料, No.1019, 2002年.

付録 極限操作と積分の順序の入れ替え

本文の式(4)の第2式から第3式にかけて極限操作と積分の順序を入れ替えている点について補足説明する。これは

$$G_{\Delta\omega}(t) = f(t) \frac{e^{-i(\omega+\Delta\omega)t} - e^{-i\omega t}}{\Delta\omega} \quad (\text{A1})$$

$$G(t) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} G_{\Delta\omega}(t) \quad (\text{A2})$$

と書くことにすれば

$$\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \int_0^T G_{\Delta\omega}(t) dt = \int_0^T G(t) dt \quad (\text{A3})$$

として良いのかという問題である。そこで $\varepsilon - \delta$ 論法を用いて考えることにすると、式(A2)より、どんなに小さい正の数 ε に対しても、適当な正の数 δ が存在し、 $|\Delta\omega| < \delta$ を満たす全ての実数 $\Delta\omega$ に対し

$$|G_{\Delta\omega}(t) - G(t)| < \varepsilon \quad (\text{A4})$$

が成立する。このとき δ としては $[0, T]$ の範囲で t に依らない共通の値を選ぶことができる（一様収束）。個々の t における誤差に上限があるので、積分結果の誤差にも上限がある。すなわち、どんなに小さい正の数 ε に対しても、適当な正の数 δ が存在し、 $|\Delta\omega| < \delta$ を満たす全ての実数 $\Delta\omega$ に対し

$$\left| \int_0^T G_{\Delta\omega}(t) dt - \int_0^T G(t) dt \right| < \varepsilon T \quad (\text{A5})$$

が成立する。このことは式(A3)が成立することを意味する。