2018/12/28

# ベクトルの外積・Levi-Civita の記号

野津

## 1.　はじめに

ベクトルの外積を定義するとき，いきなり成分で定義する方法もあるが，その場合，定義されたものが座標系による恐れは無いのかという不安が残る．したがって，やはり，幾何学的な意味に基づいて外積を定義しておく方が良い．ここではベクトルの外積について座標系によらない定義を与え，その成分表示との関係を説明する．特にベクトルの向きについては，文献[1)2)]の説明が非常に興味深く感じられたのでそれを紹介している．また，ベクトルの外積の成分表示に便利な Levi-Civita の記号についても説明している．ベクトルの外積の話が主であるが，まずは準備としてベクトルの内積の話から始める．

## 2.　ベクトルの内積とその成分

ベクトル$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$の内積$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$は,

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta \tag{1}$$

で定義される．ここに$|\boldsymbol{a}|$はベクトル$\boldsymbol{a}$の大きさ，$|\boldsymbol{b}|$はベクトル$\boldsymbol{b}$の大きさ，$\theta$はベクトル$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$のなす角である（**図-1**）．この定義は座標系に依存する心配はない．

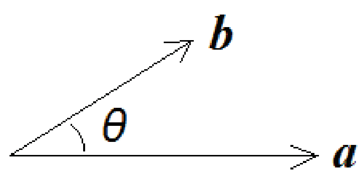


**図-1**　ベクトル$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$とそれらのなす角

ベクトル$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$の成分が

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} \tag{2}$$

で与えられるとき，ベクトル$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$の内積はよく知られているように

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \tag{3}$$

で与えられる．これは次のように示すことができる．定義により

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta \tag{4}$$

であるが，余弦定理により

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta \tag{5}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= \frac{1}{2}\{|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 + {b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2 - (a_1-b_1)^2 - (a_2-b_2)^2 - (a_3-b_3)^2\right\} \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\end{aligned}$$

以上により式(3)を示すことができた．添え字に関して総和規約を適用する場合，ベクトル$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$の内積は

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_ib_i \tag{6}$$

とも書くことができる．弾性波動論の分野においてこうしたシンプルな表現を活用できることのメリットは大きい．

### 3. ベクトルの外積とその成分

ベクトル$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$の外積$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$は，
[1] $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$の張る面に対して垂直で，
[2] $\boldsymbol{a}$から$\boldsymbol{b}$に右ねじを回したときにねじの進む向きを向いており，
[3] $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$の作る平行四辺形の面積を大きさとするような
ベクトルとして定義される（$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$は逆向きである）．この定義は座標系に依存する心配はない．
ベクトルの$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$の成分が式(2)で与えられるとき，外積$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$の成分は

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

で与えられる（右手系を前提としている）．以下，式(7)で与えられる「ベクトル」が[1]-[3]の性質を実際に有していることを確認する．ここで「ベクトル」と括弧付きで書いているのは，この段階ではまだ座標系によらない量であることが確認できていないためである．

まず[1]については，式(7)より

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a} = (a_2b_3 - a_3b_2)a_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)a_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)a_3 = 0 \tag{8}$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)b_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)b_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)b_3 = 0 \tag{9}$$

となることから確認できる．

[3]については，式(7)より

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= ({a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2)({b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 \\ &= |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\cos^2\theta\end{aligned}$$

$$= |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 \sin^2\theta$$

$$\therefore\ |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$$

となることから確認できる．

最後に[2]についてであるが，これは意外と難しい．これについては文献[1)2)]の説明が非常に興味深く感じられたのでそれを紹介したい．いま，ベクトル$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$を角度$\theta$を保ったまま少しずつ回転させ，最終的に$\boldsymbol{a}$を$(|\boldsymbol{a}|,0,0)$に，$\boldsymbol{b}$を$(|\boldsymbol{b}|\cos\theta, |\boldsymbol{b}|\sin\theta, 0)$に一致させる．この過程で，ベクトル$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$の成分は少しずつ変化し，式(7)で与えられる「ベクトル」の成分も少しずつ変化するけれども，その変化は連続的である．もともと式(7)で与えられる「ベクトル」は常に$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$の張る面に垂直で大きさは$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$であることが保証されている．これにさらに変化が連続的であるという条件が加われば，<u>式(7)で与えられる「ベクトル」は$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$の張る面の反対側に飛び移ることはできない</u>．ところで最終的に$\boldsymbol{a}$を$(|\boldsymbol{a}|,0,0)$に，$\boldsymbol{b}$を$(|\boldsymbol{b}|\cos\theta, |\boldsymbol{b}|\sin\theta, 0)$に一致させたときには式(7)で与えられる「ベクトル」は$(0,0,|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta)$であり，$\boldsymbol{a}$から$\boldsymbol{b}$に右ねじを回したときにねじの進む向きを向いている．よって，もともと式(7)で与えられる「ベクトル」は$\boldsymbol{a}$から$\boldsymbol{b}$に右ねじを回したときにねじの進む向きを向いていたと言える．これで[2]が確認できた．

ベクトルの外積の成分は Levi-Civita の記号を用いて表すことができる．Levi-Civita の記号は次式で与えられる．

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 \ldots (i,j,k)\text{が}(1,2,3)\text{の偶置換の場合} \\ -1 \ldots (i,j,k)\text{が}(1,2,3)\text{の奇置換の場合} \\ \ \ 0 \ldots \text{その他の場合} \end{cases} \tag{10}$$

具体的には

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$$
$$\varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = -1$$

である．式(7)(10)よりベクトル$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$の成分は次式で与えられる．

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_i = \varepsilon_{ijk}a_j b_k \tag{11}$$

$\varepsilon_{ijk}$には次の性質がある．

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \tag{12}$$

式(12)は

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} \\ -\delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn}\end{aligned} \tag{13}$$

と書き換えることができるが，この右辺は$(l,m,n)$が$(i,j,k)$の偶置換の時$1$，$(i,j,k)$の奇置換の時$-1$，その他の場合$0$であるから，左辺と一致することが確認できる．したがって式(12)が正しいことが確認できる．式(13)の右辺は$l=i$のとき

$$\begin{aligned}&\delta_{jm}\delta_{kn}+\delta_{in}\delta_{ji}\delta_{km}+\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{ki}\\&-\delta_{in}\delta_{jm}\delta_{ki}-\delta_{jn}\delta_{km}-\delta_{im}\delta_{ji}\delta_{kn}\end{aligned}$$

であり，$i$について総和をとると

$$\begin{aligned}&3\delta_{jm}\delta_{kn}+\delta_{jn}\delta_{km}+\delta_{jn}\delta_{km}\\&-\delta_{jm}\delta_{kn}-3\delta_{jn}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{kn}\\&=\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km}\end{aligned}$$

となる．よって次式が得られる．

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn}=\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km} \tag{14}$$

この式は利用する機会が多い.

**参考文献**


1) 竹野茂治：外積の大きさについて，2009，http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/basic2/data/exterior2.pdf.
2) E. クライツィグ（堀素夫訳）：線形代数とベクトル解析，培風館，1987.