

## 1. はじめに

地震波干渉法 (seismic interferometry) では、2点において観測された波動場 (音波, 弾性波など) の相互相関関数から2点間のグリーン関数が導かれる。ここでは, Wapenaar and Fokkema<sup>1)</sup>や Wapenaar et al.<sup>2)</sup>に基づき, 地震波干渉法の定式化の流れを基礎からたどるとともに, 定式化において仮定されている事項を整理したいと考えている。そうすることにより, 地震波干渉法の適用条件についての理解が進むと考えられるためである。

ところで, 相互相関関数とグリーン関数との関係が厳密に成立するための前提条件を確認することが本稿の主題ではあるが, この関係が厳密に成立することを期待せず, 波動場の相互相関から2点間のグリーン関数の主要な位相が取り出せればよいと考える立場もあり得る。この場合の地震波干渉法を「緩い意味での地震波干渉法」と呼ぶことにする。緩い意味での地震波干渉法は原理も理解しやすく, より広範な条件の下で適用できると考えられる。そこで, 本稿では, まず, 緩い意味での地震波干渉法の原理について考え, 次に, 厳密な意味での地震波干渉法の定式化を見ていくことにする。後者においては, まず, 音波 (acoustic wave) に関する地震波干渉法の定式化を確認し, つづいて弾性波 (elastic wave) に関する地震波干渉法の定式化を確認する。

## 2. 緩い意味での地震波干渉法

いま, 空間内の2点 (A と B) において波動場が観測されており, その周辺に震源が分布している状況を考える。そして, 個々の震源が別の方向に放射する波は互いに無相関であると考えてみる。

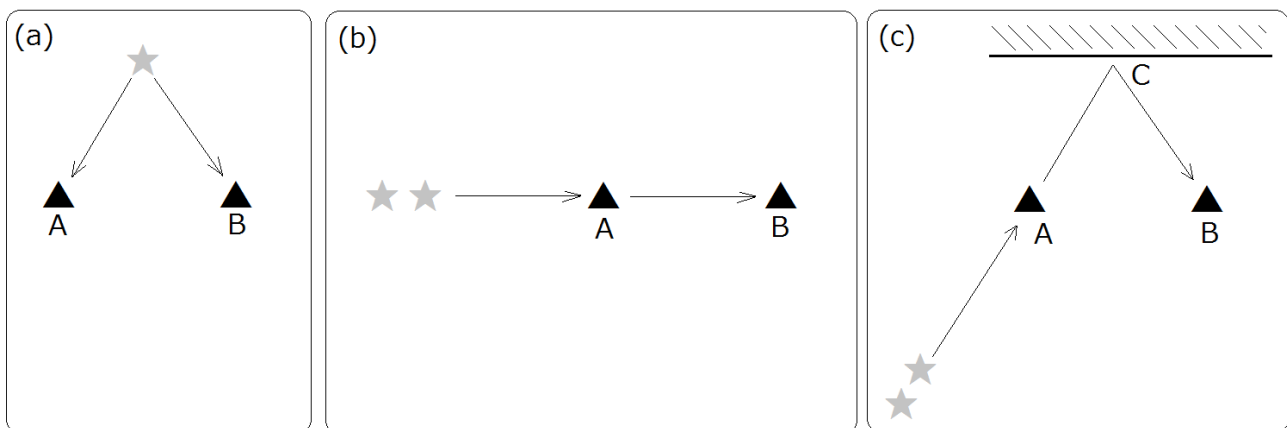


図-1 緩い意味での地震波干渉法の成立条件. (a) 震源から異なる方位に放射される波による寄与は消える. (b) 波線経路 AB の延長上にある震源の寄与によりグリーン関数の一部である直達波の位相が抽出される. (c) 波線経路 ACB の延長上にある震源の寄与によりグリーン関数の一部である反射波の位相が抽出される.

まず, A, B で観測される波動場の成分の一つとして, 図-1(a)に示すように, 震源から異なる方位に放射され A, B に到達する波が存在する場合, これらの波は互いに無相関なので, 観測波動場の相互相関に関して十分な数のスタッキングを行えば, これらの波による寄与は消えると考えられる。

次に、図-1(b)に示すように、A、Bを直接結ぶ波線の延長上にある震源を考える場合、この震源からの波は、まずAに到達した後で、一定の時間をおいてBに到達することになる。その時間差は常に波線経路ABの長さを波の速度cで割った値 ( $t_1$ とする) であり、その規則正しさ故に、観測波動場の相互相関に関してスタッキングを行った後も、この成分の寄与は残ることになり、相互相関関数は時刻 $t_1$ にピークを有することになる。このようにしてグリーン関数の一部である直達波の位相が相互相関から取り出されることになる。また、直達波の抽出に対しては、波線経路ABの延長上にある震源が重要な役割を果たすことがわかる。

同様に、図-1(c)に示すように、AをでてCで反射されBに至る波線経路を考える場合、この波線経路の延長上に存在する震源からの波は、まずAに到達した後で、一定の時間をおいてBに到達することになる。その時間差は常に波線経路ACBの長さを波の速度cで割った値 ( $t_2$ とする) であり、その規則正しさ故に、観測波動場の相互相関に関してスタッキングを行った後も、この成分の寄与は残ることになり、相互相関関数は時刻 $t_2$ にピークを有することになる。このようにしてグリーン関数の一部である反射波の位相が相互相関から取り出されることになる。また、反射波の抽出に対しては、波線経路ACBの延長上にある震源が重要な役割を果たすことがわかる。

このように、緩い意味での地震波干渉法は、原理も理解しやすく、たいへん広範な状況下で利用可能であると考えられる。音波、弾性波など波の種類にもよらず、2次元、3次元などの次元にもよらない。また媒質が減衰性媒質であっても差し支えない。しかしながら、ここで期待できるのは、2点間のグリーン関数の主要な位相が相互相関から抽出できるということだけであり、それ以上のこと（例えば個々の位相の相対的な振幅など）はわからない。そこで、以下においては、厳密な意味での地震波干渉法の定式化と適用条件について考える。

### 3. 音波に関する地震波干渉法

#### 3.1 音波の基礎方程式

図-2に示すように、音波を伝える媒質から微小要素をとりだし、 $x_1$ 方向の運動方程式をたてると次式が得られる。

$$\rho \dot{v}_i + p_{,i} = 0 \tag{1}$$

ここに $\rho$ は媒質の密度、 $v_i$ は速度の*i*成分、 $p$ は圧力（圧縮正）である。また本稿全体を通じて次の記号を用いる。

$$\text{時間微分} : \dot{\circ} \equiv \frac{\partial \circ}{\partial t}$$

$$\text{空間微分} : \circ_{,i} \equiv \frac{\partial \circ}{\partial x_i}$$

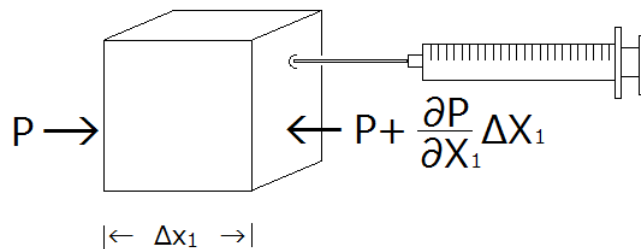


図-2 音波を伝える媒質の微小要素

添字には特に断らない限り総和規約を適用する.

一方, 応力-ひずみ関係は, injection source がないときには次式で与えられる.

$$\frac{1}{K}\dot{p} + v_{i,i} = 0 \quad (2)$$

ここに $K$ は体積弾性係数である. しかし, injection source があるときは, 応力-ひずみ関係は次式のように変わる.

$$\frac{1}{K}\dot{p} + v_{i,i} = q \quad (3)$$

ここで injection source とは図-2 に示すように (注射針などで) 外部から流体が注入される状況を指す. その単位体積あたり単位時間あたりの注入量をここでは $q$ としている. 流体が注入されることで, 体積ひずみの増加の一部が打ち消され, 圧力が上昇する効果がある.

式(1)(3)より次式を得る (ここでは媒質が一様でない場合にも対応できるよう式展開を行っている).

$$\frac{1}{K}\ddot{p} - \left(\frac{1}{\rho}p_{,i}\right)_{,i} = \dot{q} \quad (4)$$

### 3.2 相反性

音波の基礎方程式について, [弾性体の場合](#)と同様, 相反性を導くことができる.

式(4)を満足する任意の二つの圧力場 ( $p^I$ と $p^{II}$ ) を考える. これらは, 同じ支配方程式を満足するが, 外力・初期条件・境界条件などが異なるため, 異なる圧力場となっているものとする.

$$\frac{1}{K}\ddot{p}^I - \left(\frac{1}{\rho}p_{,i}^I\right)_{,i} = \dot{q}^I \quad (5)$$

$$\frac{1}{K}\ddot{p}^{II} - \left(\frac{1}{\rho}p_{,i}^{II}\right)_{,i} = \dot{q}^{II} \quad (6)$$

式(5)の両辺に $p^{II}$ を乗じて体積積分すると次式が得られる.

$$\int \left( \dot{q}^I - \frac{1}{K}\ddot{p}^I \right) p^{II} dV = - \int \left( \frac{1}{\rho}p_{,i}^I \right)_{,i} p^{II} dV$$

ここで部分積分を適用すると右辺は

$$= - \int \left( \frac{1}{\rho}p_{,i}^I p^{II} \right)_{,i} dV + \int \frac{1}{\rho}p_{,i}^I p_{,i}^{II} dV$$

となり, さらに右辺第 2 項に部分積分を適用すると

$$= - \int \left( \frac{1}{\rho}p_{,i}^I p^{II} \right)_{,i} dV + \int \left( \frac{1}{\rho}p^I p_{,i}^{II} \right)_{,i} dV - \int p^I \left( \frac{1}{\rho}p_{,i}^{II} \right)_{,i} dV$$

$$= - \int \left( \frac{1}{\rho} p_{,i}{}^I p^{II} \right)_{,i} dV + \int \left( \frac{1}{\rho} p^I p_{,i}{}^{II} \right)_{,i} dV + \int p^I \left( \dot{q}^{II} - \frac{1}{K} \ddot{p}^{II} \right) dV$$

ここで[ガウスの発散定理](#)を用いると

$$= - \int \frac{1}{\rho} p_{,i}{}^I p^{II} n_i dS + \int \frac{1}{\rho} p^I p_{,i}{}^{II} n_i dS + \int p^I \left( \dot{q}^{II} - \frac{1}{K} \ddot{p}^{II} \right) dV$$

右辺の被積分関数に含まれる

$$\frac{1}{\rho} p_{,i}$$

は式(1)によれば加速度を表すので右辺は

$$= \int \dot{v}_i{}^I p^{II} n_i dS - \int p^I \dot{v}_i{}^{II} n_i dS + \int p^I \left( \dot{q}^{II} - \frac{1}{K} \ddot{p}^{II} \right) dV$$

これを整理すると

$$\begin{aligned} & \int \left( \dot{q}^I - \frac{1}{K} \ddot{p}^I \right) p^{II} dV - \int p^I \left( \dot{q}^{II} - \frac{1}{K} \ddot{p}^{II} \right) dV \\ & = \int \dot{v}_i{}^I p^{II} n_i dS - \int p^I \dot{v}_i{}^{II} n_i dS \end{aligned}$$

(7)

となる。

さて、式(5)(6)から式(7)が導かれたが、このとき、式(5)(6)はそれぞれ別の時刻に対応していても構わない。すなわち、例えば、 $t = t_1$ に対応する $p^I$ と $t = t_2$ に対応する $p^{II}$ の間にも式(7)は成立する。そこで、時刻 $\tau$ における $p^I$ と、時刻 $t - \tau$ における $p^{II}$ に対する式(7)を考えた上で、式(7)の両辺を $\tau$ で $-\infty$ から $+\infty$ まで積分する。これは、二つの時間関数に関して次のような演算を行っていることになる。

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

これは二つの時間関数の合積である。そこで、合積の記号(\*)を用いると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int \left( \dot{q}^I - \frac{1}{K} \ddot{p}^I \right) * p^{II} dV - \int p^I * \left( \dot{q}^{II} - \frac{1}{K} \ddot{p}^{II} \right) dV \\ & = \int \dot{v}_i{}^I * p^{II} n_i dS - \int p^I * \dot{v}_i{}^{II} n_i dS \end{aligned}$$

左辺の被積分関数には

$$\ddot{p}^I * p^{II} - p^I * \ddot{p}^{II}$$

が含まれているが, そのフーリエ変換を考え, 合積のフーリエ変換と微分のフーリエ変換の公式を用いれば, ゼロとなることは明らかである. よって次式が得られる.

$$\begin{aligned} & \int \dot{q}^I * p^{II} dV - \int p^I * \dot{q}^{II} dV \\ &= \int \dot{v}_i^I * p^{II} n_i dS - \int p^I * \dot{v}_i^{II} n_i dS \end{aligned}$$

ここで, 一般に時間関数 $f$ と $g$ の合積については

$$\frac{d}{dt}(f * g) = \frac{df}{dt} * g = f * \frac{dg}{dt}$$

のような関係が成立することから, 次式が得られる.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \int \dot{q}^I * p^{II} dV - \int p^I * \dot{q}^{II} dV \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \int v_i^I * p^{II} n_i dS - \int p^I * v_i^{II} n_i dS \right) \end{aligned}$$

ここで初期条件として $p^I$ と $p^{II}$ は $t = -\infty$ でゼロであると考えると次式が得られる.

$$\begin{aligned} & \int q^I * p^{II} dV - \int p^I * q^{II} dV \\ &= \int v_i^I * p^{II} n_i dS - \int p^I * v_i^{II} n_i dS \end{aligned}$$

(8)

これが時間領域における相反性の式である. また, 両辺をフーリエ変換することにより, 周波数領域における相反性の式として次式が得られる (Wapenaar and Fokkema<sup>1)</sup>の式(5)).

$$\begin{aligned} & \int \hat{q}^I \hat{p}^{II} dV - \int \hat{p}^I \hat{q}^{II} dV \\ &= \int \hat{v}_i^I \hat{p}^{II} n_i dS - \int \hat{p}^I \hat{v}_i^{II} n_i dS \end{aligned}$$

(9)

これらの式は非一様な媒質に対しても適用可能である.

### 3.3 時間軸の反転

ここまでは音波に関する一般的な話であったが, ここから先の話は少し地震波干渉法らしくなってくる.

音波の基礎方程式(式(1)(3)(4))を満たす $p(t), v(t), q(t)$ があったとき, これらを時間軸上で反転させた $p(-t), -v(-t), -q(-t)$ も同じ方程式を満たす. そこで, 式(8)における I 系統の時間関数として $p^I(t), v^I(t), q^I(t)$ の代わりに $p^I(-t), -v^I(-t), -q^I(-t)$ を考えることにする.

ここで, 式(4)が $p$ の時間に関する二階微分を含むが一階微分を含まないという点が地震波干渉法にとって決定的に重要な意味をもっている. というのは, 任意の時間関数 $f(t)$ とそれを時間軸上で反転させた関数 $f(-t)$ に対し, 時間に関する二階微分は左右対称であるが, 時間に関する一階微分は左右対称でないためである. もしも式(4)が $p$ の時間に関する一階微分を含んでいれば,  $p(-t)$ は式(4)を満たすことができず, 以下の議論は成立しない. 式(4)が $p$ の時間に関する一階微分を含む場合とは, 減衰がある場合である. よって, 以下の議論では, 媒質が非減衰であることを仮定していることになる.

一般に実時間関数 $f(t)$ のフーリエ変換を $\hat{f}(\omega)$ とすると,  $f(-t)$ のフーリエ変換は $\hat{f}^*(\omega)$ である. ここに上付き文字の\*は共役複素数を表す. よって, I 系統の時間関数を置き換える場合, 式(9)は次式となる (Wapenaar and Fokkema<sup>1)</sup>の式(6)).

$$\int (\hat{q}^{I*} \hat{p}^{II} + \hat{p}^{I*} \hat{q}^{II}) dV = \int (\hat{v}_i^{I*} \hat{p}^{II} + \hat{p}^{I*} \hat{v}_i^{II}) n_i dS \quad (10)$$

ここで表-1 に示す 2 系統のグリーン関数を考える. これらを式(10)に代入すると次式が得られる.

$$\begin{aligned} & \hat{G}^*(\mathbf{x}_B, \omega; \mathbf{x}_A) + \hat{G}(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x}_B) \\ &= - \int_{\partial D} \frac{1}{i\omega\rho} \left( \hat{G}^*(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) \hat{G}_{,i}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) - \hat{G}^*_{,i}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) \right) n_i dS \end{aligned}$$

ここで右辺の面積積分は $\partial D$ 上で行うものとした. ここでさらにグリーン関数の相反性 (グリーン関数の相反性は表-1 に示す 2 系統のグリーン関数を式(8)に代入することで得られる) を考慮すると次式が得られる (Wapenaar et al.<sup>2)</sup>の式(11)).

$$\hat{G}^*(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x}_B) + \hat{G}(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x}_B) = - \int_{\partial D} \frac{1}{i\omega\rho} \left( \hat{G}^*(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) \hat{G}_{,i}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) - \hat{G}^*_{,i}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) \right) n_i dS \quad (11)$$

表-1 2 系統のグリーン関数

载荷条件	時間領域	周波数領域
载荷点 : $\mathbf{x}_A$	$q^I = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_A) \delta(t)$ $p^I = G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_A)$	$\hat{q}^I = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_A)$ $\hat{p}^I = \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A)$ $\hat{v}_i^I = -(i\omega\rho)^{-1} \hat{G}_{,i}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A)$
载荷点 : $\mathbf{x}_B$	$q^{II} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_B) \delta(t)$ $p^{II} = G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_B)$	$\hat{q}^{II} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_B)$ $\hat{p}^{II} = \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B)$ $\hat{v}_i^{II} = -(i\omega\rho)^{-1} \hat{G}_{,i}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B)$

### 3.4 球面波による近似

ここまでの定式化は広範な条件下で成立するものであったが, ここから先, 様々な仮定が登場する.

まず, 図-3 に示すように, 点 $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B$ から十分に離れた領域では媒質は一様であるとする. このとき,  $\partial D$ を十分に大きな球面として設定すれば,  $\partial D$ 上の点 $\mathbf{x}$ に点 $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B$ から到来する波は, 直達波であれ, 点 $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B$ 周

辺の不均質による散乱波であれ，球の中心方向から到来するとみなすことができる．すなわちグリーン関数は球面波で近似でき，

$$\hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) = \frac{1}{r} e^{-i\omega r/c} S^A(\omega) \quad (12)$$

$$\hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) = \frac{1}{r} e^{-i\omega r/c} S^B(\omega) \quad (13)$$

と書くことができる．ここに $r$ は $\partial D$ の半径， $c$ は音速， $S^A(\omega)$ と $S^B(\omega)$ は輻射の強さを表す．点 $\mathbf{x}_A$ ， $\mathbf{x}_B$ 周辺の媒質の不均質性の影響により，一般には $S^A(\omega)$ と $S^B(\omega)$ は異なる値をとりうる．また，式(12)(13)では，グリーン関数には外向きの波だけが含まれるとしている．これは， $\partial D$ の外側では媒質は一樣としているので，点 $\mathbf{x}_A$ ， $\mathbf{x}_B$ から出発して $\partial D$ の外側を通過して点 $\mathbf{x}$ に到達する波はないためである．

式(12)(13)より

$$\hat{G}_{,i}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) n_i = -\frac{i\omega}{c} \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) \quad (14)$$

$$\hat{G}_{,i}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) n_i = -\frac{i\omega}{c} \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) \quad (15)$$

であり（高次の微少量は無視した），これらを用いると，式(11)右辺の被積分関数の第1項と第2項は等しいことがわかり，式(11)は

$$\hat{G}^*(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x}_B) + \hat{G}(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x}_B) = \frac{2}{i\omega\rho} \int_{\partial D} \hat{G}_{,i}^*(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) \hat{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) n_i dS$$

となる．そしてさらに式(14)の関係を用いると次式が得られる（Wapenaar et al.<sup>2)</sup>の式(16))．

$$\hat{G}^*(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x}_B) + \hat{G}(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x}_B) = \frac{2}{\rho c} \int_{\partial D} \hat{G}^*(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x}) \hat{G}(\mathbf{x}_B, \omega; \mathbf{x}) dS \quad (16)$$

これを時間領域に戻した式は次式となる．

$$G(\mathbf{x}_A, -t; \mathbf{x}_B) + G(\mathbf{x}_A, t; \mathbf{x}_B) = \frac{2}{\rho c} \int_{\partial D} G(\mathbf{x}_A, -t; \mathbf{x}) * G(\mathbf{x}_B, t; \mathbf{x}) dS \quad (17)$$

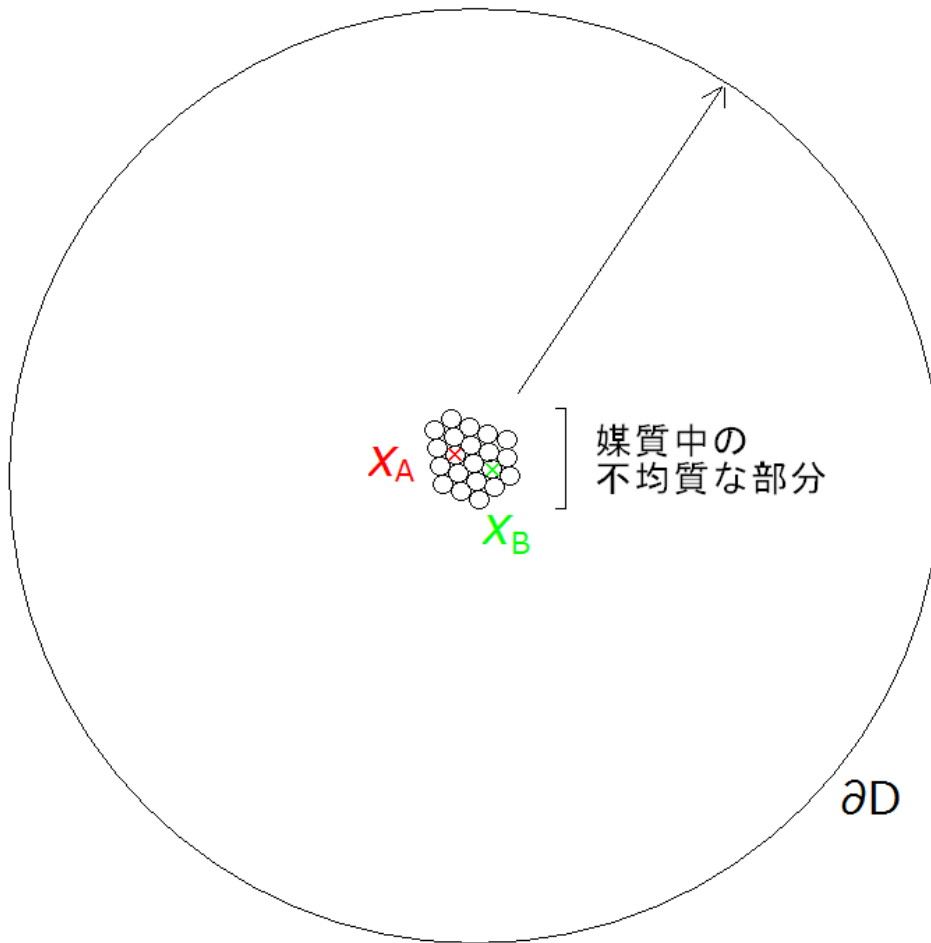


図-3 十分に大きな $\partial D$ 上での積分

### 3.5 ノイズ震源

ここまではグリーン関数同士の関係に関する議論であり、実際に観測される波動場とは関係がなかったが、ここからは、実際に観測される波動場の解釈の話に移る。

ここでは、 $\partial D$ 上にノイズ震源が並んでおり、それによる波動場が点 $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B$ で観測されている状況を考える。ここで、 $\partial D$ 上に震源がきれいに配列されているという状況は非現実的であり、そのような条件が地震波干渉法のために必要だとすると、地震波干渉法を適用できる場面は極めて限られてしまうことになる。しかし、実際には、 $\partial D$ 上に本物の震源が並んでいる必要はない。図-4に示すように、空間内の一点を波が透過しているとき、この点は、一方から来た波を吸収し、反対の方向に同じ振幅の波を放射していると見なすこともできる。すなわち、空間内のあらゆる点はノイズ源とみなすことができる。よって、「 $\partial D$ 上にノイズ震源が並んでいる状況」(図-5左)は「 $\partial D$ の外部からノイズ波が入射している状況」(図-5右)と等価である。後者の状況はおおいにあり得る状況なので、この仮定により地震波干渉法の適用範囲が大きく狭められることはない。ただし、後に述べるようにノイズ波は等方的に入射している必要がある。

このとき、点 $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B$ における波動場は次式のように書くことができる。

$$u(\mathbf{x}_A, t) = \int_{\partial D} G(\mathbf{x}_A, t; \mathbf{x}) * N(\mathbf{x}, t) dS \quad (18)$$



$$u(\mathbf{x}_B, \mathbf{t}) = \int_{\partial D} G(\mathbf{x}_B, \mathbf{t}; \mathbf{x}') * N(\mathbf{x}', \mathbf{t}) dS \quad (19)$$

ここでは、 $\partial D$ の内部には震源がないという仮定が入っていることに注意が必要である。

ここで、 $\partial D$ 上におけるノイズの振幅は場所によらないこと、 $\partial D$ 上の異なる2点におけるノイズは互いに無相関であることを仮定すると次式が得られる。

$$\langle N(\mathbf{x}, -\mathbf{t}) * N(\mathbf{x}', \mathbf{t}) \rangle = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') S_N(\mathbf{t}) \quad (20)$$

これを用いると次式が得られ、

$$\langle u(\mathbf{x}_A, -\mathbf{t}) * u(\mathbf{x}_B, \mathbf{t}) \rangle = \int_{\partial D} G(\mathbf{x}_A, -\mathbf{t}; \mathbf{x}) * G(\mathbf{x}_B, \mathbf{t}; \mathbf{x}) * S_N(\mathbf{t}) dS \quad (21)$$

式(17)(21)より次式が得られる。

$$\{G(\mathbf{x}_A, -\mathbf{t}; \mathbf{x}_B) + G(\mathbf{x}_A, \mathbf{t}; \mathbf{x}_B)\} * S_N(\mathbf{t}) = \frac{2}{\rho c} \langle u(\mathbf{x}_A, -\mathbf{t}) * u(\mathbf{x}_B, \mathbf{t}) \rangle \quad (22)$$

すなわち、点 $\mathbf{x}_A$ ,  $\mathbf{x}_B$ で観測されたノイズの相互相関をとることにより、2点間のグリーン関数に関する情報が得られることになる。

ここで「2点間のグリーン関数が得られる」とは書かず「2点間のグリーン関数に関する情報が得られる」と書いた。式(22)より、グリーン関数の振幅を推定するためには、 $S_N(\mathbf{t})$ の振幅に関する情報が必要となる。また、グリーン関数の位相の推定においても、 $S_N(\mathbf{t})$ の影響が全くないとは言えない。しかし、 $S_N(\mathbf{t})$ の継続時間に比べてグリーン関数の継続時間が十分に長ければ、式(22)によりグリーン関数の位相を推定できると考えられる。

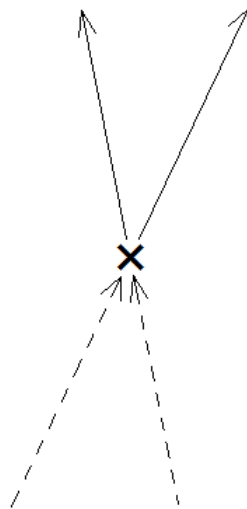


図-4 空間内のあらゆる点はノイズ源とみなすことができる

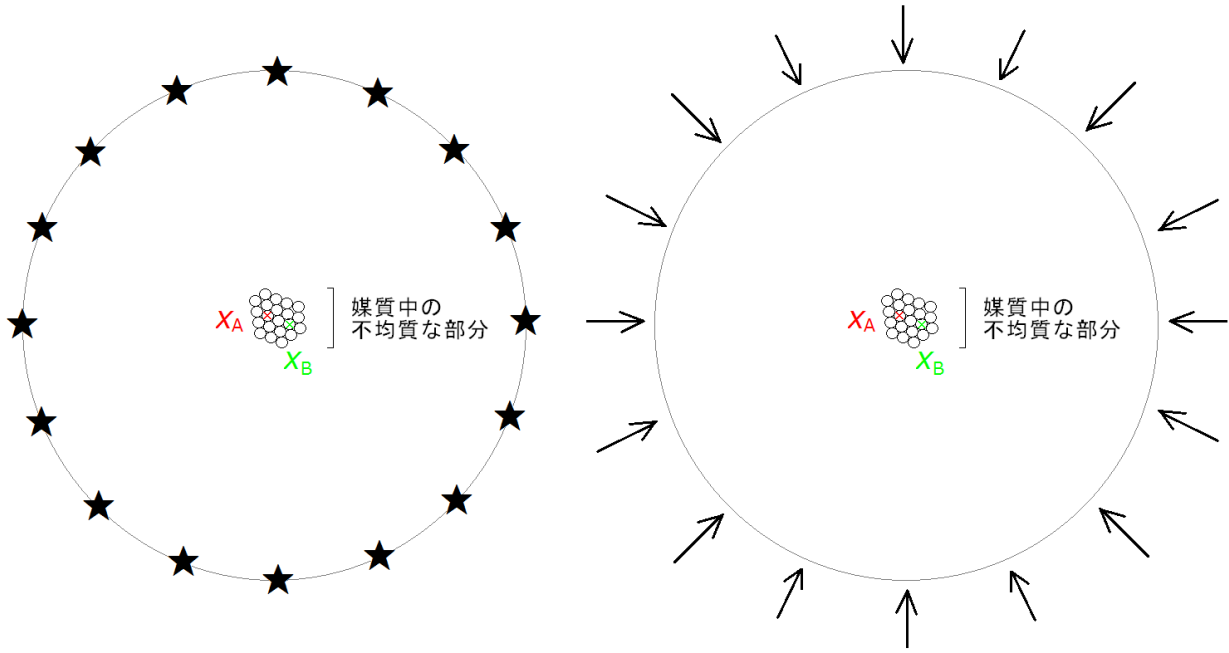


図-5 「 $\partial D$ 上にノイズ震源が並んでいる状況」(左)は「 $\partial D$ の外部からノイズ波が入射している状況」(右)と等価である

なお、ここまでの議論に登場した物理量のうち $N(\mathbf{x}, t)$ は $r$  ( $\partial D$ の半径)の設定に依存する量である。なぜなら、式(18)右辺において

$$G(\mathbf{x}_A, t; \mathbf{x}) \propto \frac{1}{r}$$

$$\int_{\partial D} dS \propto r^2$$

であり、式(18)左辺の $u(\mathbf{x}_A, t)$ は $r$ に依存すべきではないから、結果的に

$$N(\mathbf{x}, t) \propto \frac{1}{r}$$

となるべきだからである。一方、式(21)より $S_N(t)$ は $r$ の設定に依存しない量である。

## 4. 弾性波に関する地震波干渉法

### 4.1 弾性波の基礎方程式

弾性波の基礎方程式としては [Navier の式](#) を用いればよい。

$$\rho \ddot{u}_i = (c_{ijkl} u_{k,l})_j + f_i \quad (23)$$

ここに $u_i$ は変位、 $f_i$ は外力、 $\rho$ は密度、 $c_{ijkl}$ は弾性定数である。

## 4.2 相反性

式(23)より以下の相反性が導かれる。

$$\begin{aligned} \int f_i^I * u_i^{II} dV - \int f_i^{II} * u_i^I dV \\ = - \int t_i^I * u_i^{II} dS + \int t_i^{II} * u_i^I dS \end{aligned} \quad (24)$$

ここに $u_i^I$ と $u_i^{II}$ は式(23)を満足する変位場、 $f_i^I$ と $f_i^{II}$ は対応する外力、 $t_i^I$ と $t_i^{II}$ は対応するトラクションである。式(24)をフーリエ変換すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \int \hat{f}_i^I \hat{u}_i^{II} dV - \int \hat{f}_i^{II} \hat{u}_i^I dV \\ = - \int \hat{t}_i^I \hat{u}_i^{II} dS + \int \hat{t}_i^{II} \hat{u}_i^I dS \end{aligned} \quad (25)$$

これらの式は非一様な媒質に対しても適用可能である。

## 4.3 時間軸の反転

Navier 式(式(23))を満たす $u_i(t)$ ,  $f_i(t)$ ,  $t_i(t)$ があったとき、これらを時間軸上で反転させた $u_i(-t)$ ,  $f_i(-t)$ ,  $t_i(-t)$ も同じ方程式を満たす。そこで、式(24)における I 系統の時間関数として $u_i^I(t)$ ,  $f_i^I(t)$ ,  $t_i^I(t)$ の代わりに $u_i^I(-t)$ ,  $f_i^I(-t)$ ,  $t_i^I(-t)$ を考えることにする。ここでも、音波の場合と同様、Navier 式(式(23))が $u_i$ の時間に関する二階微分を含むが一階微分を含まないという点が決定的に重要な意味をもっている。もしも Navier 式が $u_i$ の時間に関する一階微分を含んでいれば、 $u_i(-t)$ は Navier 式を満たすことができず、以下の議論は成立しない。Navier 式が $u_i$ の時間に関する一階微分を含む場合とは、減衰がある場合である。よって、以下の議論では、媒質が非減衰であることを仮定していることになる。

I 系統の時間関数を置き換える場合、式(25)は次式に変わる。

$$\int \hat{f}_i^{I*} \hat{u}_i^{II} dV - \int \hat{f}_i^{II} \hat{u}_i^{I*} dV = - \int \hat{t}_i^{I*} \hat{u}_i^{II} dS + \int \hat{t}_i^{II} \hat{u}_i^{I*} dS$$

この式は変位場に関する式となっているが、両辺に $i\omega$ を乗じることで速度場に関する式に変換することができる。その際、

$$\begin{aligned} \hat{v}_i &= i\omega \hat{u}_i \\ \hat{v}_i^* &= -i\omega \hat{u}_i^* \end{aligned}$$

であるから、 $\hat{v}_i^{I*}$ を含む項は符号を反転させる必要があり、次式が得られる (Wapenaar et al.<sup>2)</sup>の式(7))。

$$\int (\hat{f}_i^{I*} \hat{v}_i^{II} + \hat{f}_i^{II} \hat{v}_i^{I*}) dV = - \int (\hat{t}_i^{I*} \hat{v}_i^{II} + \hat{t}_i^{II} \hat{v}_i^{I*}) dS \quad (26)$$

ここで表-2に示す通り2系統のグリーン関数を考える．ここではWapenaar and Fokkema<sup>1)</sup>に倣い速度のグリーン関数を $G^{v,f}$ としている．またトラクションの式が表中の式になることについては[弾性波動論の基礎](#)を読むとわかるようになっている．

表-2 2系統のグリーン関数

载荷条件	時間領域	周波数領域
载荷点： $\mathbf{x}_A$ 载荷方向： $\mathbf{n}$	$f_i^I = \delta_{in} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_A) \delta(t)$ $v_i^I = G_{in}^{v,f}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_A)$	$\hat{f}_i^I = \delta_{in} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_A)$ $\hat{v}_i^I = \hat{G}_{in}^{v,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A)$ $\hat{t}_i^I = \hat{T}_{in}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) = \frac{c_{ijkl}}{i\omega} \hat{G}_{kn,l}^{v,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) n_j$
载荷点： $\mathbf{x}_B$ 载荷方向： $\mathbf{m}$	$f_i^{II} = \delta_{im} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_B) \delta(t)$ $v_i^{II} = G_{im}^{v,f}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_B)$	$\hat{f}_i^{II} = \delta_{im} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_B)$ $\hat{v}_i^{II} = \hat{G}_{im}^{v,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B)$ $\hat{t}_i^{II} = \hat{T}_{im}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) = \frac{c_{ijkl}}{i\omega} \hat{G}_{km,l}^{v,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) n_j$

これらを式(26)に代入すると次式が得られ（右辺の面積積分は $\partial D$ 上で行うものとした）,

$$\begin{aligned} & \hat{G}_{nm}^{*v,f}(\mathbf{x}_B, \omega; \mathbf{x}_A) + \hat{G}_{nm}^{v,f}(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x}_B) \\ &= - \int_{\partial D} \frac{c_{ijkl}}{i\omega} \left( \hat{G}_{in}^{*v,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) \hat{G}_{km,l}^{v,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) - \hat{G}_{kn,l}^{*v,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) \hat{G}_{im}^{v,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) \right) n_j dS \end{aligned}$$

さらに[グリーン関数の相反性](#)を考慮すると次式が得られる（Wapenaar et al.<sup>2)</sup>の式(8)）.

$$\begin{aligned} & \hat{G}_{nm}^{*v,f}(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x}_B) + \hat{G}_{nm}^{v,f}(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x}_B) \\ &= - \int_{\partial D} \frac{c_{ijkl}}{i\omega} \left( \hat{G}_{in}^{*v,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) \hat{G}_{km,l}^{v,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) - \hat{G}_{kn,l}^{*v,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) \hat{G}_{im}^{v,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) \right) n_j dS \end{aligned}$$

ただし、この式は少し見通しが悪いので、表-2中の記号 $\hat{T}$ を用いると次式が得られる．

$$\begin{aligned} & \hat{G}_{nm}^{*v,f}(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x}_B) + \hat{G}_{nm}^{v,f}(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x}_B) \\ &= - \int_{\partial D} \left( \hat{G}_{in}^{*v,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) \hat{T}_{im}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) + \hat{T}_{in}^*(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) \hat{G}_{im}^{v,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) \right) dS \end{aligned} \quad (27)$$

このように書き換えると、右辺の被積分関数が速度ベクトルとトラクションベクトルの内積であることが明確になるので少し扱いやすくなる．

#### 4.4 球面波による近似

ここまでの定式化は広範な条件下で成立するものであったが、ここから先、様々な仮定が登場する．

まず、[図-3](#)に示すように、点 $\mathbf{x}_A$ ,  $\mathbf{x}_B$ から十分に離れた領域では媒質は一様であるとする。このとき、 $\partial D$ を十分に大きな球面として設定すれば、 $\partial D$ 上の点 $\mathbf{x}$ に点 $\mathbf{x}_A$ ,  $\mathbf{x}_B$ から到来する波は、直達波であれ、点 $\mathbf{x}_A$ ,  $\mathbf{x}_B$ 周辺の不均質による散乱波であれ、球の中心方向からP波またはS波として到来するとみなすことができる。すなわちグリーン関数はP波とS波からなり、それぞれは球面波で近似できるので、

$$\hat{G}_{in}^{v,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) = \frac{1}{r} e^{-i\omega r/c} S_{in}^A(\omega) \quad (28)$$

$$\hat{G}_{im}^{v,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) = \frac{1}{r} e^{-i\omega r/c} S_{im}^B(\omega) \quad (29)$$

と書くことができる。ここに $r$ は $\partial D$ の半径、 $c$ はP波速度 $\alpha$ またはS波速度 $\beta$ 、 $S_{in}^A(\omega)$ と $S_{im}^B(\omega)$ は輻射の強さを表す。 $S_{in}^A(\omega)$ と $S_{im}^B(\omega)$ にはラディエーションパターンの影響や点 $\mathbf{x}_A$ ,  $\mathbf{x}_B$ 周辺の不均質の影響などが含まれる。また、式(28)(29)では、グリーン関数には外向きの波だけが含まれるとしている。これは、 $\partial D$ の外側では媒質は一様としているので、点 $\mathbf{x}_A$ ,  $\mathbf{x}_B$ から出発して $\partial D$ の外側を通過して点 $\mathbf{x}$ に到達する波はないためである。なお、式(28)(29)以降は等方な弾性体を考え、弾性体の特性を規定するパラメータはP波速度、S波速度、密度の3つであるとする。

式(27)右辺の被積分関数に含まれる速度とトラクションはいずれもP波の項とS波の項を含むが、P波の項とS波の項の内積はゼロとなるので、被積分関数の評価をすすめるにあたり、P波とS波を独立に扱うことができる。

式(28)(29)を表-2中の $\hat{T}$ の定義式に代入すれば

$$\hat{T}_{in}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) = -\rho c \hat{G}_{in}^{v,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) \quad (30)$$

$$\hat{T}_{im}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) = -\rho c \hat{G}_{im}^{v,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) \quad (31)$$

であり（この計算は、波の進行方向と平行にローカルな座標系をとると比較的簡単に行うことができる）、これらを用いると、式(27)右辺の被積分関数の第1項と第2項は等しいことがわかり、式(27)は

$$\hat{G}_{nm}^{*v,f}(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x}_B) + \hat{G}_{nm}^{v,f}(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x}_B) = -2 \int_{\partial D} \hat{T}_{in}^*(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) \hat{G}_{im}^{v,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) dS \quad (32)$$

となる。

ここで、グリーン関数に対応する[スカラーポテンシャル](#)と[ベクトルポテンシャル](#)を導入する。これらをWapenaar and Fokkema<sup>1)</sup>の式(A-15)(A-16)に従い次式で定義する。

$$\hat{G}_{0n}^{\phi,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) = -\frac{\rho \alpha^2}{i\omega} \hat{G}_{in,i}^{v,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) \quad (33)$$

$$\hat{G}_{kn}^{\phi,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) = \frac{\rho \beta^2}{i\omega} \varepsilon_{kji} \hat{G}_{in,j}^{v,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) \quad (34)$$

$$\hat{G}_{0m}^{\phi,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) = -\frac{\rho \alpha^2}{i\omega} \hat{G}_{im,i}^{v,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) \quad (35)$$

$$\hat{G}_{km}^{\phi,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) = \frac{\rho \beta^2}{i\omega} \varepsilon_{kji} \hat{G}_{im,j}^{v,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) \quad (36)$$

ここに小文字の $k$ は1~3の値をとり、ベクトルポテンシャルの各成分を表す。これらと式(28)(29)を用いると、式(32)は次式となる（Wapenaar and Fokkema<sup>1)</sup>の式(A-14)（詳細は付録参照）。

$$\hat{G}_{nm}^{*v,f}(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x}_B) + \hat{G}_{nm}^{v,f}(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x}_B) = \frac{2}{i\omega\rho} \int_{\partial D} \hat{G}_{Kn,i}^{*\phi,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) \hat{G}_{Km}^{\phi,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) n_i dS \quad (37)$$

ここに大文字の $K$ は $0 \sim 3$ の値をとり、 $K = 0$ はスカラーポテンシャル、 $K = 1 \sim 3$ はベクトルポテンシャルに対応する。 $K$ には総和規約を適用するので、式(37)右辺はP波に関する項とS波に関する項の和となる。

ところで、式(33)-(36)の右辺に含まれる $\hat{G}_{in}^{v,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A)$ 等は相反性を満足するので、これらを $\hat{G}_{ni}^{v,f}(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x})$ 等に置き換えても右辺の値は変わらない。そこで、実際にその置き換えを行ったものを、次のような記号で表す。

$$\hat{G}_{n0}^{v,\phi}(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x}) = -\frac{\rho\alpha^2}{i\omega} \hat{G}_{ni,i}^{v,f}(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x}) \quad (38)$$

$$\hat{G}_{nk}^{v,\phi}(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x}) = \frac{\rho\beta^2}{i\omega} \varepsilon_{kji} \hat{G}_{ni,j}^{v,f}(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x}) \quad (39)$$

$$\hat{G}_{m0}^{v,\phi}(\mathbf{x}_B, \omega; \mathbf{x}) = -\frac{\rho\alpha^2}{i\omega} \hat{G}_{mi,i}^{v,f}(\mathbf{x}_B, \omega; \mathbf{x}) \quad (40)$$

$$\hat{G}_{mk}^{v,\phi}(\mathbf{x}_B, \omega; \mathbf{x}) = \frac{\rho\beta^2}{i\omega} \varepsilon_{kji} \hat{G}_{mi,j}^{v,f}(\mathbf{x}_B, \omega; \mathbf{x}) \quad (41)$$

ここに右辺の空間微分は載荷点 $\mathbf{x}$ の座標に関する空間微分である。

式(38)-(41)の右辺に含まれる $\hat{G}_{ni}^{v,f}(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x})$ 等は $\partial D$ 上の点 $\mathbf{x}$ に単位インパルス力を作用させた場合の点 $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B$ における速度応答であったが、式(38)-(41)ではそれを載荷点座標に関して微分した上で組み合わせているので、式(38)-(41)の左辺は、単位インパルス力よりももう少し複雑な外力を点 $\mathbf{x}$ に作用させた場合の点 $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B$ における速度応答である。しかし、これがどのような外力であるかについて悩むことは生産的でない。式(38)(40)の左辺は式(33)(35)の左辺に等しいが、式(33)(35)の左辺は、点 $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B$ を出発し、点 $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B$ 周辺の不均質性の影響を受けた後、最終的にはP波となって点 $\mathbf{x}$ に到達する波である。よって、相反性より、式(38)(40)の左辺は、点 $\mathbf{x}$ を出発し、しばらくはP波として伝播した後、最終的に点 $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B$ に到達する波である。したがって、式(38)(40)右辺の演算が表す外力は、「結果的にP波だけを生じるような外力」であると理解しておくことが重要である。同様に、式(39)(41)の左辺は式(34)(36)の左辺に等しいが、式(34)(36)の左辺は、点 $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B$ を出発し、点 $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B$ 周辺の不均質性の影響を受けた後、最終的にはS波となって点 $\mathbf{x}$ に到達する波である。よって、相反性より、式(39)(41)の左辺は、点 $\mathbf{x}$ を出発し、しばらくはS波として伝播した後、最終的に点 $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B$ に到達する波である。したがって、式(39)(41)右辺の演算が表す外力は、「結果的にS波だけを生じるような外力」であると理解しておくことが重要である。

式(38)-(41)を用いて式(37)の右辺を書き換えると次式が得られる (Wapenaar and Fokkema<sup>1)</sup>の式(73))。

$$\hat{G}_{nm}^{*v,f}(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x}_B) + \hat{G}_{nm}^{v,f}(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x}_B) = \frac{2}{i\omega\rho} \int_{\partial D} \hat{G}_{nK,i}^{*v,\phi}(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x}) \hat{G}_{mK}^{v,\phi}(\mathbf{x}_B, \omega; \mathbf{x}) n_i dS \quad (42)$$

ここでさらに式(28)(29)を用いると次式が得られる (Wapenaar and Fokkema<sup>1)</sup>の式(76))。

$$\hat{G}_{nm}^{*v,f}(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x}_B) + \hat{G}_{nm}^{v,f}(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x}_B) = \frac{2}{\rho c^k} \int_{\partial D} \hat{G}_{nK}^{*v,\phi}(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x}) \hat{G}_{mK}^{v,\phi}(\mathbf{x}_B, \omega; \mathbf{x}) dS \quad (43)$$

ここに

$$c^K = \begin{cases} \alpha & \text{for } K = 0 \\ \beta & \text{for } K = 1,2,3 \end{cases} \quad (44)$$

である。これを時間領域に戻した式は次式となる。

$$G_{nm}^{v,f}(\mathbf{x}_A, -t; \mathbf{x}_B) + G_{nm}^{v,f}(\mathbf{x}_A, t; \mathbf{x}_B) = \frac{2}{\rho c^K} \int_{\partial D} G_{nK}^{v,\phi}(\mathbf{x}_A, -t; \mathbf{x}) * G_{mK}^{v,\phi}(\mathbf{x}_B, t; \mathbf{x}) dS \quad (45)$$

#### 4.5 ノイズ震源

ここまではグリーン関数同士の関係に関する議論であり、実際に観測される波動場とは関係がなかったが、ここからは、実際に観測される波動場の解釈の話に移る。

ここでは、 $\partial D$ 上にノイズ震源が並んでおり、それによる波動場が点 $\mathbf{x}_A$ ,  $\mathbf{x}_B$ で観測されている状況を考える。音波のところで説明したように空間内のあらゆる点はノイズ源とみなすことができるので (図-4)。「 $\partial D$ 上にノイズ震源が並んでいる状況」は「 $\partial D$ の外部からノイズ波が入射している状況」と等価である (図-5)。

このとき、点 $\mathbf{x}_A$ ,  $\mathbf{x}_B$ における波動場は次式のように書くことができる。

$$v_n(\mathbf{x}_A, \mathbf{t}) = \int_{\partial D} G_{nK}^{v,\phi}(\mathbf{x}_A, \mathbf{t}; \mathbf{x}) * N_K(\mathbf{x}, \mathbf{t}) dS \quad (46)$$

$$v_m(\mathbf{x}_B, \mathbf{t}) = \int_{\partial D} G_{mL}^{v,\phi}(\mathbf{x}_B, \mathbf{t}; \mathbf{x}') * N_L(\mathbf{x}', \mathbf{t}) dS \quad (47)$$

ここでは、 $\partial D$ の内部には震源がないという仮定が入っていることに注意が必要である。

ここで、 $\partial D$ 上におけるノイズの振幅は場所によらないこと、 $\partial D$ 上の異なる2点におけるノイズは互いに無相関であること、異なる成分のノイズは互いに無相関であること、P波ノイズとS波ノイズの振幅比がある定められた値であることを仮定すると次式が得られる。

$$\langle N_K(\mathbf{x}, -t) * N_L(\mathbf{x}', t) \rangle = \frac{\rho\alpha}{\rho c^K} \delta_{KL} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') S_N(t) \quad (48)$$

これを用いると次式が得られ、

$$\langle v_n(\mathbf{x}_A, -\mathbf{t}) * v_m(\mathbf{x}_B, \mathbf{t}) \rangle = \frac{\rho\alpha}{\rho c^K} \int_{\partial D} G_{nK}^{v,\phi}(\mathbf{x}_A, -t; \mathbf{x}) * G_{mK}^{v,\phi}(\mathbf{x}_B, t; \mathbf{x}) * S_N(t) dS \quad (49)$$

式(45)(49)より次式が得られる (Wapenaar and Fokkema<sup>1)</sup>の式(87))。

$$\{G_{nm}^{v,f}(\mathbf{x}_A, -t; \mathbf{x}_B) + G_{nm}^{v,f}(\mathbf{x}_A, t; \mathbf{x}_B)\} * S_N(t) = \frac{2}{\rho\alpha} \langle v_n(\mathbf{x}_A, -\mathbf{t}) * v_m(\mathbf{x}_B, \mathbf{t}) \rangle \quad (50)$$

すなわち、点 $\mathbf{x}_A$ ,  $\mathbf{x}_B$ で観測されたノイズの相互相関をとることにより、2点間のグリーン関数に関する情報が得られることになる。

ところで、 $N_K(\mathbf{x}, t)$ の各成分の振幅比が式(48)に従うと仮定することは、点 $\mathbf{x}$ から円の中心方向に向かうP波とS波の振幅比にどのような仮定を設けることに対応するだろうか。式(46)右辺の被積分関数に含まれる $G_{nK}^{v,\phi}(\mathbf{x}_A, t; \mathbf{x})$ は、不均質の影響がない場合、周波数領域では次式となる。

$$\hat{G}_{nK}^{v,\phi}(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x}) = \begin{cases} -\frac{i\omega}{4\pi\alpha} r_n \frac{1}{r} e^{-i\omega r/\alpha} & \text{for } K = 0 \\ \frac{i\omega}{4\pi\beta} \varepsilon_{Kjn} r_j \frac{1}{r} e^{-i\omega r/\beta} & \text{for } K = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (51)$$

前者に含まれる $r_n$ は、波の進行方向に平行なベクトルであり、その大きさは1である。一方、後者に含まれる $\varepsilon_{Kjn} r_j$ は、 $r_n$ との内積をとると0であるから波の進行方向に垂直なベクトルであり、その大きさは、自分自身との内積をとれば

$$\sqrt{(\varepsilon_{kin} r_i)(\varepsilon_{kjn} r_j)} = \sqrt{(\delta_{ij}\delta_{nn} - \delta_{in}\delta_{jn})r_i r_j} = \sqrt{3r_i r_i - r_n r_n} = \sqrt{2}$$

である。なお上式では $n$ に関する総和と $k$ に関する総和をとっている。 $n$ に関する総和は各成分の和に対応し、 $k$ に関する総和は、 $N_K(\mathbf{x}, t)$ が互いに無相関であることから、それらによるノイズ波の振幅を加える場合には自乗和をとるべきであることに対応する。これと、 $N_K(\mathbf{x}, t)$ の各成分の振幅比が式(48)であることを考慮すると、点 $\mathbf{x}$ から円の中心方向に向かうS波はP波に対して $\sqrt{2}(\alpha/\beta)^{1.5}$ 倍の振幅を有していると仮定していることになる。

## 5. 地震波干渉法の適用条件

以上をもとに、地震波干渉法の適用条件を整理すると次の通りとなる。

まず、緩い意味での地震波干渉法として、波動場の相互相関から2点間のグリーン関数の主要な位相が取り出せればよいと考える場合は、観測点周辺に分布する個々の震源が別々の方向に放射する波が互いに無相関であることさえ仮定できれば良く、緩い意味での地震波干渉法はたいへん広範な状況下で利用可能であると考えられる。音波、弾性波など波の種類にもよらず、2次元、3次元などの次元にもよらない。また媒質が減衰性媒質であっても差し支えない。

しかしながら、2点 $\mathbf{x}_A$ 、 $\mathbf{x}_B$ における相互相関関数とグリーン関数との間に一定の関係が成立することを期待する厳密な意味での地震波干渉法が適用できるためには、より多くの前提条件が必要であり、本稿のここまでの分析によると以下の条件が必要である。

### (1) 媒質が非減衰であること

音波に関する式(4)が $p$ の時間に関する一階微分を含まないこと、弾性波に関する式(23)が $u_i$ の時間に関する一階微分を含まないことが決定的に重要な意味をもっている。地震波干渉法では、グリーン関数 $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_A)$ の時間反転である $G(\mathbf{x}, -t; \mathbf{x}_A)$ が支配方程式を満足することが前提となっている。この関数は、 $t = -\infty$ において無限遠を発し、原点に向かって収斂していき、 $t = 0$ で収斂を終えて消えてしまう、いささか奇妙な関数である。非減衰の場合、この関数は支配方程式を満足できるが、減衰性の媒質では問題が生じる。減衰性の媒質の場合、グリーン関数 $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_A)$ は伝播とともに徐々に振幅が(幾何減衰から期待される以上に)小さくなる。よって、その時間反転である $G(\mathbf{x}, -t; \mathbf{x}_A)$ は、伝播とともに徐々に振幅が(幾何減衰から期待される以上に)大きくなるのでなければならない。そのような関数が支配方程式を満足することは通常は不可能である。これを可能とするためには、減衰により失われるエネルギーを補償する機構として、震源が3次元的に分布しているといった特殊な状況を考えなければならなくなる<sup>34)</sup>。



(2) 点 $\mathbf{x}_A$ ,  $\mathbf{x}_B$ から十分に離れた領域では媒質は一様であること

この仮定の下で,  $\partial D$ を十分に大きな球面として設定すれば, グリーン関数を球面波で近似でき,  $\partial D$ 上の積分における被積分関数からグリーン関数の空間微分を消去できる.

(3)  $\partial D$ の内部には震源がない

点 $\mathbf{x}_A$ ,  $\mathbf{x}_B$ における波動場を式(18)(19)(46)(47)に示すように $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_A$ 間および $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_B$ 間のグリーン関数で表現できるためにはこの条件が必要である.

(4)  $\partial D$ の外部からノイズ波が等方的に入射していること, 異なる方位からのノイズ波は互いに無相関であること.

(5) 弾性波の場合,  $\partial D$ の外部から入射するノイズ波のうち, P波とS波は互いに無相関であること, また, S波はP波に対して $\sqrt{2}(\alpha/\beta)^{1.5}$ 倍の振幅を有していること (単位体積あたりのエネルギーは $2(\alpha/\beta)^3$ 倍であること)

(1) – (5) の条件はかなり厳しい条件であるように思え, 相互相関関数とグリーン関数との関係が厳密に成立することはなかなか期待しにくいのではないかと考えられる.

#### 参考文献

- 1) Wapenaar, K. and J. Fokkema: Green's function representation for seismic interferometry, Geophysics, Vol.71, No.4, pp.SI33-SI46, 2006.
- 2) Wapenaar, K., E. Slob, R. Snieder and A. Curtis: Tutorial on seismic interferometry: Part 2 – Underlying theory and new advances, Geophysics, Vol.75, No.5, pp.75A211-75A227, 2010.
- 3) Snieder, K.: Extracting the Green's functions of attenuating heterogeneous acoustic media from uncorrelated waves, Journal of Acoustic Society of America, Vol.121, No.5, pp.2637-2643, 2007.
- 4) 中原恒: 地震波干渉法により減衰構造を求めるための理論的背景, 地震 2, 第 65 巻, pp.243-249, 2013 年.

付録 式(37)の導出

式(30)(31)(32)より

$$\hat{G}_{nm}^{*v,f}(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x}_B) + \hat{G}_{nm}^{v,f}(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x}_B) = 2\rho c \int_{\partial D} \hat{G}_{in}^{*v,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) \hat{G}_{im}^{v,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) dS \quad (\text{A1})$$

である．ここで，式(33)-(36)で定義したスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルを用いると，右辺のグリーン関数は次式のように P 波項と S 波項に分けることができる ([変位場のポテンシャル](#)参照)．

$$\hat{G}_{in}^{v,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) = \frac{i\omega}{\rho\omega^2} \left( \hat{G}_{0n,i}^{\phi,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) + \varepsilon_{ijk} \hat{G}_{kn,j}^{\phi,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) \right) \quad (\text{A2})$$

$$\hat{G}_{im}^{v,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) = \frac{i\omega}{\rho\omega^2} \left( \hat{G}_{0m,i}^{\phi,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) + \varepsilon_{ijk} \hat{G}_{km,j}^{\phi,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) \right) \quad (\text{A3})$$

これらを式(A1)に代入すると次式が得られる．

$$\begin{aligned} \hat{G}_{nm}^{*v,f}(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x}_B) + \hat{G}_{nm}^{v,f}(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x}_B) &= \frac{2\alpha}{\rho\omega^2} \int_{\partial D} \hat{G}_{0n,i}^{*\phi,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) \hat{G}_{0m,i}^{\phi,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) dS \\ &+ \frac{2\beta}{\rho\omega^2} \int_{\partial D} \varepsilon_{ijk} \hat{G}_{kn,j}^{*\phi,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) \varepsilon_{ipq} \hat{G}_{qm,p}^{\phi,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) dS \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

$\partial D$ 上で P 波と S 波は互いに直交するので，式(A4)右辺では P 波項と S 波項の積を考慮する必要はない．さて，いま P 波も S 波も球面波で近似できるとしているので，式(29)(35)より

$$\hat{G}_{0m}^{\phi,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) = -\frac{\rho\alpha^2}{i\omega} \left( \frac{1}{r} e^{-\frac{i\omega r}{\alpha}} S_{km}^B(\omega) \right)_{,k} = \rho\alpha n_k \frac{1}{r} e^{-\frac{i\omega r}{\alpha}} S_{km}^B(\omega) \quad (\text{A5})$$

となる．ここで  $\mathbf{x}_k$  に関する微分を行う際は指数関数のみを微分しているが，これは， $1/r$ を微分することにより表れる  $1/r^2$ は高次の微小量と考えているためである．また  $r_{,k} = n_k$  という関係を用いている．式(A5)より次式が得られる．

$$\hat{G}_{0m,i}^{\phi,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) = -i\omega\rho n_i n_k \frac{1}{r} e^{-\frac{i\omega r}{\alpha}} S_{km}^B(\omega) = -\frac{i\omega}{\alpha} \hat{G}_{0m}^{\phi,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) n_i \quad (\text{A6})$$

同様に，式(29)(36)より

$$\hat{G}_{km}^{\phi,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) = \frac{\rho\beta^2}{i\omega} \varepsilon_{kji} \left( \frac{1}{r} e^{-\frac{i\omega r}{\beta}} S_{im}^B(\omega) \right)_{,j} = -\rho\beta \varepsilon_{kji} n_j \frac{1}{r} e^{-\frac{i\omega r}{\beta}} S_{im}^B(\omega) \quad (\text{A7})$$

となる．これより次式が得られる．

$$\hat{G}_{km,l}^{\phi,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) = i\omega\rho \varepsilon_{kji} n_i n_j \frac{1}{r} e^{-\frac{i\omega r}{\beta}} S_{im}^B(\omega) = -\frac{i\omega}{\beta} \hat{G}_{km}^{\phi,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) n_l \quad (\text{A8})$$

式(A6)(A8)を式(A4)に代入すると次式が得られる.

$$\begin{aligned} \hat{G}_{nm}^{*v,f}(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x}_B) + \hat{G}_{nm}^{v,f}(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x}_B) &= \frac{2}{i\omega\rho} \int_{\partial D} \hat{G}_{0n,i}^{*\phi,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) \hat{G}_{0m}^{\phi,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) n_i dS \\ &+ \frac{2}{i\omega\rho} \int_{\partial D} \varepsilon_{ijk} \hat{G}_{kn,j}^{*\phi,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) \varepsilon_{ipq} \hat{G}_{qm}^{\phi,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) n_p dS \end{aligned} \quad (A9)$$

右辺第2項の積分は, Levi-Civita の記号に関する [公式](#)

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km} \quad (A10)$$

を適用すると

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \varepsilon_{ijk} \hat{G}_{kn,j}^{*\phi,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) \varepsilon_{ipq} \hat{G}_{qm}^{\phi,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) n_p dS &= \int_{\partial D} (\delta_{jp} \delta_{kq} - \delta_{jq} \delta_{kp}) \hat{G}_{kn,j}^{*\phi,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) \hat{G}_{qm}^{\phi,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) n_p dS \\ &= \int_{\partial D} \hat{G}_{kn,j}^{*\phi,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) \hat{G}_{km}^{\phi,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) n_j dS - \int_{\partial D} \hat{G}_{kn,j}^{*\phi,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) \hat{G}_{jm}^{\phi,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) n_k dS \end{aligned}$$

となるが, 式(A8)を参照すると, 最後の被積分関数の一部は

$$\hat{G}_{kn,j}^{*\phi,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) n_k = i\omega\rho (\varepsilon_{kli} n_k n_l) n_j \frac{1}{r} e^{-\frac{i\omega r}{B}} S_{in}^B(\omega) = 0$$

となるため, 式(A9)は結局

$$\begin{aligned} \hat{G}_{nm}^{*v,f}(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x}_B) + \hat{G}_{nm}^{v,f}(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x}_B) &= \frac{2}{i\omega\rho} \int_{\partial D} \hat{G}_{0n,i}^{*\phi,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) \hat{G}_{0m}^{\phi,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) n_i dS \\ &+ \frac{2}{i\omega\rho} \int_{\partial D} \hat{G}_{kn,i}^{*\phi,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) \hat{G}_{km}^{\phi,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) n_i dS \end{aligned} \quad (A11)$$

となる. 右辺第1項はP波に関する項, 第2項はS波に関する項である. ここで本文で定義した $K(=0,1,2,3)$ を用いると右辺第1項と第2項を統合することができ

$$\hat{G}_{nm}^{*v,f}(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x}_B) + \hat{G}_{nm}^{v,f}(\mathbf{x}_A, \omega; \mathbf{x}_B) = \frac{2}{i\omega\rho} \int_{\partial D} \hat{G}_{Kn,i}^{*\phi,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_A) \hat{G}_{Km}^{\phi,f}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_B) n_i dS \quad (A12)$$

が得られる (本文の式(37)).