

## 1. はじめに

水平成層地盤の任意の位置に単位インパルス力を作用させた場合の波動場，すなわち水平成層地盤のグリーン関数は，以下に説明する離散化波数法と呼ばれる方法<sup>1)</sup>で計算することができる。

離散化波数法では，震源から放射される地震波を様々な周波数と様々な波数を有する地震波の重ね合わせで表現する．ここで言う波数とは，厳密に言えば波数の水平成分のことである．波数の小さな地震波はテイクオフ・アングル（進行方向と水平面のなす角）の大きい波に対応しており，波数の大きな地震波はテイクオフ・アングルの小さい波に対応している．つまり，離散化波数法では，震源から放射される地震波を様々な周波数と様々なテイクオフ・アングルを有する波に分けて考える．水平な地層境界に入射した地震波は透過もしくは反射するが，このとき，地層境界が水平であれば地震波の波数は変化しない性質がある．そのため，水平成層地盤では，地震波の透過と反射は周波数と波数に対して独立に計算できる．そこで，周波数毎，波数毎に透過と反射の計算を行い，その結果をすべての周波数と波数について重ね合わせれば，任意の地点でのグリーン関数が求まる．以上が離散化波数法の概要である。

離散化波数法で，震源から放射される地震波を様々な波数を有する地震波の重ね合わせで，つまり波数積分の形で表現するとき，もしも媒質が非減衰であるならば，特定の波数に対して被積分関数の分母が0となってしまう，積分が精度良く計算できなくなる問題がある．そこで，離散化波数法が提案された当初<sup>1)</sup>から，[周波数に僅かに虚部を導入](#)<sup>2)</sup>して分母が0となることを回避することが提案されていた．以下に説明する離散化波数法でもこの方法を採用している．

以下に述べる方法により水平成層地盤のグリーン関数が求まれば，これと[表現定理](#)から，断層面上でのすべりに対する水平成層地盤の応答を求めることができる．

## 2. フーリエ変換対

以下に説明する方法では周波数に僅かに虚部を含む場合のフーリエ変換対として[次式](#)を用いる．

$$F(\omega_c) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega_c t} dt \quad (1)$$

$$f(t) = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_c)e^{i\omega_c t} d\omega_c \right) e^{\lambda t} \quad (2)$$

ここに $f(t)$ は任意の時刻歴波形， $F(\omega_c)$ はそのフーリエ変換である．また

$$\omega_c = \omega - \lambda i \quad (3)$$

である．以下，周波数領域での演算はすべて複素数 $\omega_c$ に対して行う．その結果得られた $F(\omega_c)$ から $f(t)$ を求めるには，通常のフーリエ逆変換のあとに $e^{\lambda t}$ を乗じればよい．なお，本稿のようにフーリエ順変換に $e^{-i\omega t}$ ，フーリエ逆変換に $e^{i\omega t}$ を用いる場合は，周波数に導入する虚部は負でなければならない．このことについては後に説明する． $\lambda$ の具体的な値は，FORTRANの倍精度計算を前提とすると， $\lambda = 2\pi/T$ 程度とするのが良い．ここに $T$ は[離散フーリエ変換](#)に用いるデータ長である．また，最終段階で $e^{\lambda t}$ を乗じる関係上，波形の後半に

はノイズが乗るので、あらかじめ必要なデータ長の2倍のデータ長で計算しておき、後半を棄却するのがよい。以下の説明では、煩雑なノーテーションを避けるため、 $\omega_c$ を単に $\omega$ と記す。

### 3. 媒質の減衰

離散化波数法は周波数領域の計算手法であるから、媒質の減衰は弾性波速度に僅かに虚部を導入することにより容易に考慮することができる。具体的には以下の計算において弾性波速度を

$$\alpha_c = \alpha \left(1 + \frac{i}{2Q_p}\right) \quad (4)$$

$$\beta_c = \beta \left(1 + \frac{i}{2Q_s}\right) \quad (5)$$

とすればよい。ここに $\alpha_c$ ,  $\beta_c$ はそれぞれ複素P波速度と複素S波速度、 $Q_p$ ,  $Q_s$ はそれぞれP波, S波に対するQ値である。本稿のようにフーリエ順変換に $e^{-i\omega t}$ , フーリエ逆変換に $e^{i\omega t}$ を用いる場合は、弾性波速度に導入する虚部は正でなければならない。弾性波速度に虚部が導入されることに伴い媒質のラメ定数にも虚部が導入される。以下の説明では、煩雑なノーテーションを避けるため、 $\alpha_c$ ,  $\beta_c$ と書かずに単に $\alpha$ ,  $\beta$ と記す。

## 4. 透過・反射の影響を受ける以前の波動場の波数積分表示と離散化

### 4.1 Explosion型の点震源の場合

ここでは explosion 型の点震源による波動場を波数積分の形に置き換え、さらにこれを離散化する過程について説明する。なお、本稿で最終的に説明したいのは単位インパルス力による波動場（すなわちグリーン関数）であり、ここで述べる explosion 型の点震源による波動場とは異なるものである。しかしながら、説明の都合上、まずは explosion 型の点震源による波動場について説明する。

等質等方な全無限弾性体における explosion 型の点震源に対する変位場のスカラーポテンシャルのフーリエ変換は次式で示される。

$$\hat{\phi} = \frac{1}{R} e^{-i\omega R/\alpha} \quad (6)$$

ここに $\hat{\phi}$ は変位場のスカラーポテンシャルのフーリエ変換、 $R$ は震源距離である。式(6)は震源から球面波が速度 $\alpha$ で伝播すること、その振幅が震源距離 $R$ に反比例して小さくなることを示している。

ここで、水平成層地盤における波動場の計算に便利な円筒座標系 $(r, \theta, z)$ を導入する (図-1)。 $z$ 座標は慣例に従い鉛直下向きにとる。円筒座標系において原点を震源にとれば、式(6)は式(7)のゾンマーフェルト積分の形に書くことができる (付録 A 参照)。

$$\hat{\phi} = -i \int_0^\infty \frac{k}{v} J_0(kr) e^{-iv|z|} dk \quad (7)$$

ここに

$$v = \sqrt{k_\alpha^2 - k^2}, \quad \text{Im}(v) < 0 \quad (8)$$

$$k_\alpha = \omega/\alpha$$

(9)

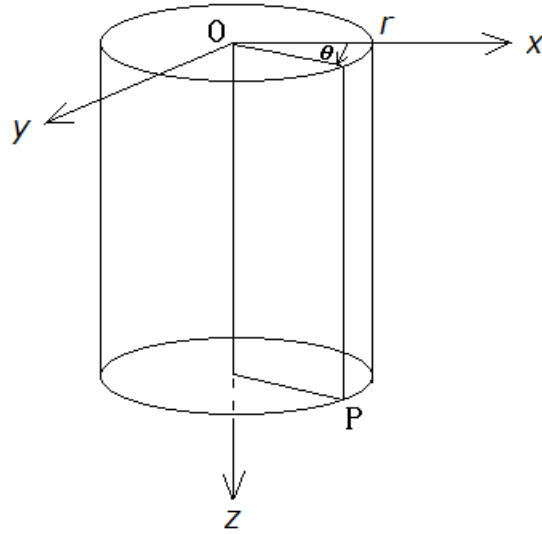


図-1 円筒座標系 (任意の点 P の座標を  $(r, \theta, z)$  の組み合わせで表示)

である.  $k$  は波数の水平成分を,  $v$  は P 波の波数の鉛直成分をそれぞれ示す.  $J_0$  は第 1 種 0 次のベッセル関数である.

式(7)の  $z$  に関する項を  $e^{i\omega t}$  と組み合わせると  $e^{i(\omega t - v|z|)}$  となることから,  $v$  が P 波の波数の鉛直成分を示すことが理解される. また,  $k$  が小さい波は進行方向が鉛直に近い波 (テイクオフ・アングルの大きい波) に,  $k$  が大きい波は進行方向が水平に近い波 (テイクオフ・アングルの小さい波) に対応していることも理解される. 従って, 式(7)は全波動場が様々なテイクオフ・アングルをもつ波の重ね合わせで表現されることを示している. 式(6)から(7)への書き換えを概念的に示すと図-2 のようになる. 式(6)から(7)への書き換えを行うのは, 地層境界での透過と反射が波数毎に計算できるので, 式(7)の形が便利であるからに他ならない.

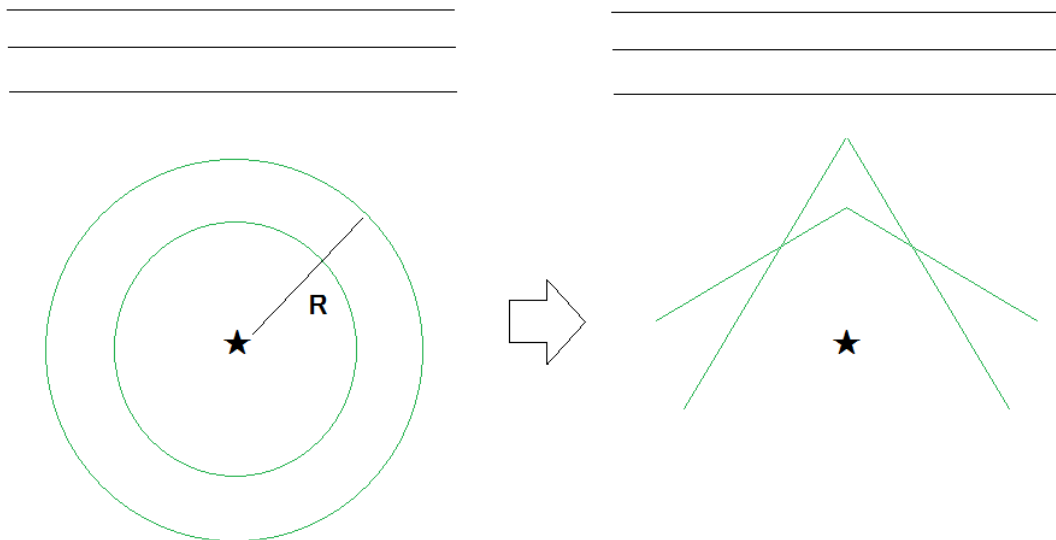


図-2 震源から放射される球面波 (左) と様々なテイクオフ・アングルをもつ波の重ね合わせ (右)

2. で周波数に虚部を導入した理由がここで理解できる。式(9)の定義から、もしも $\omega$ と $\alpha$ がともに実数であれば、 $k_\alpha$ も実数であり、特定の波数 $k$ に対して式(7)の被積分関数の分母が0となってしまう。このとき、式(7)の積分を精度良く計算することができなくなる。 $\alpha$ が実数であることは、3. によれば、媒質の減衰が0であることに対応する。その場合でも、 $\omega$ に虚部が導入されていれば、 $\omega$ 、 $k_\alpha$ 、 $\nu$ などはすべて複素平面（図-3）の第4象限にあることになるので、式(7)の被積分関数の分母は0とならず、積分が実行できる（ $\omega$ は第4象限、 $\alpha$ は第1象限であるから $k_\alpha = \omega/\alpha$ は第4象限である。また $k_\alpha^2$ も第4象限である。 $k_\alpha^2 - k^2$ は $k$ の大小により第4象限の場合と第3象限の場合がある。しかしいずれの場合も自乗して $k_\alpha^2 - k^2$ になる数は第4象限と第2象限に一つずつ存在し、このうち虚部が負であるものを $\nu$ としているので、 $\nu$ は第4象限にあることになる）。

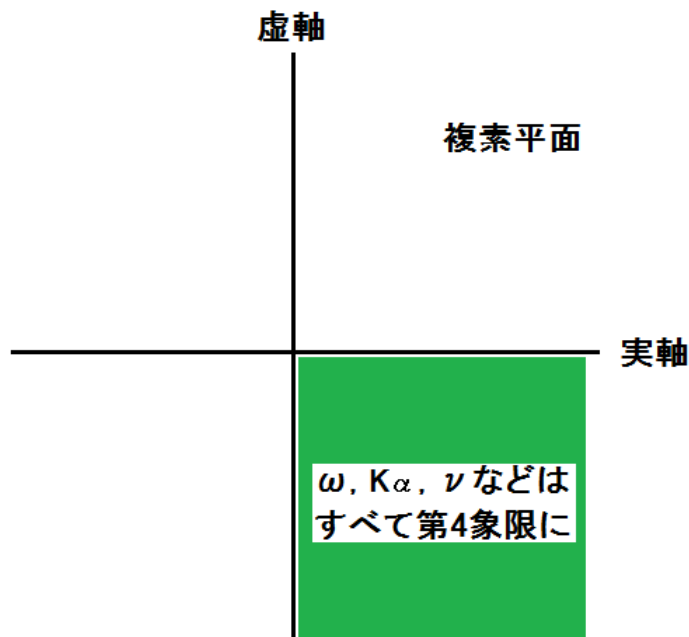


図-3 複素平面上での $\omega$ 、 $k_\alpha$ 、 $\nu$ などの位置

さて、Bouchon<sup>1)</sup>は式(7)の $k$ に関する積分を次の無限級数で置き換えることを提案した。

$$\hat{\phi} = -\frac{i\pi}{L} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{k_n}{\nu_n} J_0(k_n r) e^{-i\nu_n |z|} \quad (10)$$

ここに

$$k_n = 2\pi n/L \quad (11)$$

$$\nu_n = \sqrt{k_\alpha^2 - k_n^2}, \quad \text{Im}(\nu_n) < 0 \quad (12)$$

である。また $\varepsilon_n$ は次式により定義される。

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 2, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases} \quad (13)$$

式(10)の最も素朴な解釈は式(7)の積分に台形公式を適用したものという解釈である．ところが Bouchon<sup>1)</sup>は、原点を中心とする半径 $mL$  ( $m = 1, 2, \dots$ )の同心円状の震源による波動場を考え、これを式(7)の波動場に加えたものが厳密に式(10)の波動場に等しいことを示した．この解釈によれば、半径 $L$ を十分大きくとれば、問題としている時間ウインドウの範囲で同心円状の震源からの波が到達しないので、式(7)と式(10)とは厳密に等しくなる．具体的には

$$r < L/2 \text{ and } \sqrt{(L-r)^2 + z^2} > at \quad (14)$$

を満足するような $r$ ,  $t$ に対しては式(7)と式(10)は等しい．

## 4.2 鉛直方向の単位インパルス力の場合

Lamb<sup>3)</sup>によれば鉛直下向きの単位インパルス力 $\delta(t)\delta(\xi)$ が原点において時刻 $t = 0$ に作用したときの波動場(グリーン関数)は

$$\hat{u}_r(r, z, \omega) = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left( \frac{e^{-ik\beta R} - e^{-ik\alpha R}}{R} \right) \quad (15)$$

$$\hat{u}_z(r, z, \omega) = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{e^{-ik\beta R} - e^{-ik\alpha R}}{R} \right) + k_\beta^2 \frac{e^{-ik\beta R}}{R} \right) \quad (16)$$

で表される．ここに $\hat{u}_r(r, z, \omega)$ は変位のラディアル成分 ( $r$ 成分) のフーリエ変換,  $\hat{u}_z(r, z, \omega)$ は変位の鉛直成分 ( $z$ 成分) のフーリエ変換である．また $\rho$ は媒質の密度であり,

$$k_\beta = \omega/\beta \quad (17)$$

である．変位は対称性により $\theta$ に依存しない．また、変位のトランスバース成分 ( $\theta$ 成分) は対称性により0である．

式(15)は次のように導くことができる．[全無限弾性体のグリーン関数](#)の式(16)より、変位の $x$ 成分のフーリエ変換 $\hat{u}_x$ と $y$ 成分のフーリエ変換 $\hat{u}_y$ は次式で与えられる．

$$\hat{u}_x = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left( \frac{e^{-ik\beta R} - e^{-ik\alpha R}}{R} \right)$$

$$\hat{u}_y = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left( \frac{e^{-ik\beta R} - e^{-ik\alpha R}}{R} \right)$$

これらより変位のラディアル成分を求めると

$$\begin{aligned} \hat{u}_r &= \hat{u}_x \cos\theta + \hat{u}_y \sin\theta \\ &= \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{e^{-ik\beta R} - e^{-ik\alpha R}}{R} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \cos^2\theta \frac{\partial}{\partial r} + \sin^2\theta \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \frac{e^{-ik\beta R} - e^{-ik\alpha R}}{R} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{-ik\beta R} - e^{-ik\alpha R}}{R} \right) \right] \end{aligned}$$

となり式(15)が得られる。式(16)は[全無限弾性体のグリーン関数](#)の式(16)より直ちに得られる。

ここで、**explosion** 型の点震源に対して式(6)を式(10)に書き換えたのと同様、式(15)(16)を無限級数の形に書くと次式を得る。

$$\hat{u}_r(r, z, \omega) = \frac{1}{4L\rho\omega^2} \text{sgn}(z) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n k_n^2 (e^{-i\gamma_n|z|} - e^{-i\nu_n|z|}) J_1(k_n r) \quad (18)$$

$$\hat{u}_z(r, z, \omega) = -\frac{i}{4L\rho\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n k_n \left( \nu_n e^{-i\nu_n|z|} + \frac{k_n^2}{\gamma_n} e^{-i\gamma_n|z|} \right) J_0(k_n r) \quad (19)$$

ここに $\text{sgn}(z)$ は符号関数で $z$ が正のとき1,  $z$ が負のとき-1の値をとる。 $J_1$ は第1種1次のベッセル関数である。また

$$\gamma_n = \sqrt{k_\beta^2 - k_n^2}, \quad \text{Im}(\gamma_n) < 0 \quad (20)$$

はS波の波数の鉛直成分を示す。 $\gamma_n$ も $\nu_n$ と同様常に複素平面の第4象限にある。式(18)を求める際には付録Cにあるベッセル関数の公式を用いている。

### 4.3 水平方向の単位インパルス力の場合

Harkrider<sup>4)</sup>によれば水平方向( $\theta_0$ 方向)の単位インパルス力 $\delta(t)\delta(\xi)$ が原点において時刻 $t=0$ に作用したときの波動場(グリーン関数)は次式で与えられる。

$$\hat{u}_r(r, \theta, z, \omega) = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \cos(\theta - \theta_0) \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( \frac{e^{-ik_\beta R} - e^{-ik_\alpha R}}{R} \right) + k_\beta^2 \frac{e^{-ik_\beta R}}{R} \right) \quad (21)$$

$$\hat{u}_\theta(r, \theta, z, \omega) = -\frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \sin(\theta - \theta_0) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{-ik_\beta R} - e^{-ik_\alpha R}}{R} \right) + k_\beta^2 \frac{e^{-ik_\beta R}}{R} \right) \quad (22)$$

$$\hat{u}_z(r, \theta, z, \omega) = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \cos(\theta - \theta_0) \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left( \frac{e^{-ik_\beta R} - e^{-ik_\alpha R}}{R} \right) \quad (23)$$

ここに $\hat{u}_r(r, \theta, z, \omega)$ は変位のラディアル成分( $r$ 成分)のフーリエ変換、 $\hat{u}_\theta(r, \theta, z, \omega)$ は変位のトランスバース成分( $\theta$ 成分)のフーリエ変換、 $\hat{u}_z(r, \theta, z, \omega)$ は変位の鉛直成分( $z$ 成分)のフーリエ変換である。 $\theta_0 = 0$ は $x$ 軸方向の载荷を、 $\theta_0 = \pi/2$ は $y$ 軸方向の载荷を意味する。

式(21)~(23)は[全無限弾性体のグリーン関数](#)の式(16)から導くことができる。以下、このことを確認する。対称性により変位の各成分が $\theta - \theta_0$ に依存することは明らかであるため、ここでは $\theta_0 = 0$ の場合について示す。まず、準備として、 $\psi$ を $\theta$ に依存しない任意の関数とし、直交座標系における演算子と円筒座標系における演算子の関係を調べておくと、

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \cos^2 \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \sin^2 \theta$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \sin \theta \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \sin \theta \cos \theta$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \sin^2 \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \cos^2 \theta$$

である。一方、[全無限弾性体のグリーン関数](#)の式(16)より、変位の $x$ 成分のフーリエ変換 $\hat{u}_x$ と $y$ 成分のフーリエ変換 $\hat{u}_y$ は次式で与えられる。

$$\hat{u}_x = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{e^{-ik\beta R} - e^{-ik\alpha R}}{R} \right) + k_\beta^2 \frac{e^{-ik\beta R}}{R} \right)$$

$$\hat{u}_y = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{e^{-ik\beta R} - e^{-ik\alpha R}}{R} \right)$$

これらより変位のラディアル成分とトランスバース成分を求めると

$$\hat{u}_r = \hat{u}_x \cos \theta + \hat{u}_y \sin \theta$$

$$= \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \left[ \left( \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sin \theta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \left( \frac{e^{-ik\beta R} - e^{-ik\alpha R}}{R} \right) + k_\beta^2 \frac{e^{-ik\beta R}}{R} \cos \theta \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \left[ \left( \cos^3 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \sin^2 \theta \cos \theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \sin^2 \theta \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \sin^2 \theta \cos \theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \frac{e^{-ik\beta R} - e^{-ik\alpha R}}{R} \right) + k_\beta^2 \frac{e^{-ik\beta R}}{R} \cos \theta \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \cos \theta \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( \frac{e^{-ik\beta R} - e^{-ik\alpha R}}{R} \right) + k_\beta^2 \frac{e^{-ik\beta R}}{R} \right]$$

$$\hat{u}_\theta = -\hat{u}_x \sin \theta + \hat{u}_y \cos \theta$$

$$= \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \left[ \left( -\sin \theta \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \left( \frac{e^{-ik\beta R} - e^{-ik\alpha R}}{R} \right) - k_\beta^2 \frac{e^{-ik\beta R}}{R} \sin \theta \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \left[ \left( -\sin \theta \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \sin^3 \theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \sin \theta \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \sin \theta \cos^2 \theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \frac{e^{-ik\beta R} - e^{-ik\alpha R}}{R} \right) - k_\beta^2 \frac{e^{-ik\beta R}}{R} \sin \theta \right]$$

$$= -\frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \sin \theta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{-ik\beta R} - e^{-ik\alpha R}}{R} \right) + k_\beta^2 \frac{e^{-ik\beta R}}{R} \right]$$

となり式(21)(22)が得られる。さらに、[全無限弾性体のグリーン関数](#)の式(16)より、変位の $z$ 成分のフーリエ変換 $\hat{u}_z$ は

$$\hat{u}_z = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left( \frac{e^{-ik\beta R} - e^{-ik\alpha R}}{R} \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e^{-ik\beta R} - e^{-ik\alpha R}}{R} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{-ik\beta R} - e^{-ik\alpha R}}{R} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left( \frac{e^{-ik\beta R} - e^{-ik\alpha R}}{R} \right)$$

となり式(23)が得られる。

式(21)(22)(23)を無限級数の形に書くと次式を得る。

$$\hat{u}_r(r, \theta, z, \omega) = -\frac{i}{4L\rho\omega^2} \cos(\theta - \theta_0) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left[ \left( \frac{k_n^2}{v_n} e^{-iv_n|z|} + \gamma_n e^{-i\gamma_n|z|} \right) \frac{d}{dr} J_1(k_n r) + \frac{k_n^2}{\gamma_n} e^{-i\gamma_n|z|} \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right] \quad (24)$$

$$\hat{u}_\theta(r, \theta, z, \omega) = \frac{i}{4L\rho\omega^2} \sin(\theta - \theta_0) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left[ \left( \frac{k_n^2}{v_n} e^{-iv_n|z|} + \gamma_n e^{-i\gamma_n|z|} \right) \frac{1}{r} J_1(k_n r) + \frac{k_n^2}{\gamma_n} e^{-i\gamma_n|z|} \frac{d}{dr} J_1(k_n r) \right] \quad (25)$$

$$\hat{u}_z(r, \theta, z, \omega) = \frac{sgn(z)}{4L\rho\omega^2} \cos(\theta - \theta_0) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n k_n^2 (e^{-i\gamma_n|z|} - e^{-iv_n|z|}) J_1(k_n r) \quad (26)$$

式(24)(25)(26)を求める際には付録Cにあるベッセル関数の公式を用いている。

## 5. 地層境界における透過・反射の計算

### 5.1 透過・反射の計算の概要

式(18)(19)(24)(25)(26)では震源から放射された地震波が様々な波数 $k_n$ を有する波の重ね合わせで表現されている。ここで図-4に示すように水平成層地盤の任意の層に震源がある場合を考えると、震源から放射された地震波は地層境界で透過と反射を繰り返すことになるが、この透過と反射は波数 $k_n$ 毎に独立に計算することができる。そこで、波数 $k_n$ 毎に透過と反射の計算を行い、その結果をすべての波数について重ね合わせれば、周波数領域のグリーン関数が求まる。

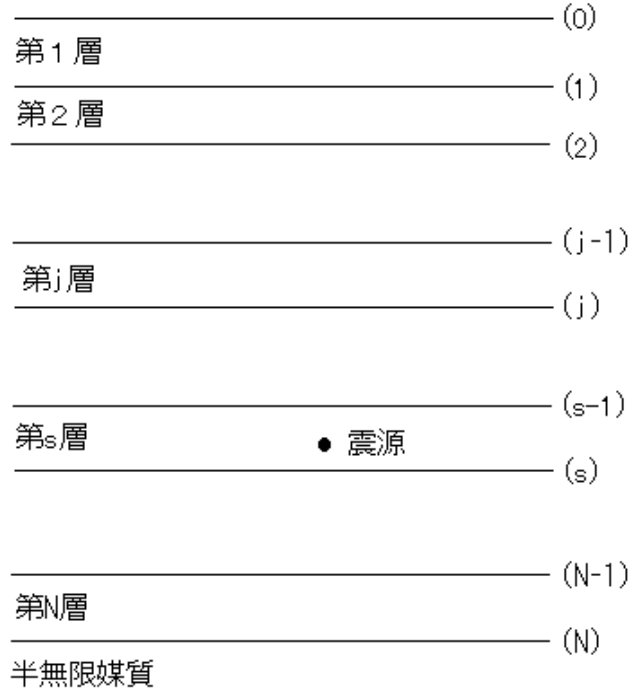


図-4 水平成層地盤

水平成層地盤での透過と反射を計算するための行列演算についてはこれまで多くの研究者により改良が重ねられてきた。その経緯については瀧瀬<sup>5)</sup>によりまとめられている。以下においては Luco and Apsel<sup>6)</sup>による反射/透過マトリクスを若干修正して用いている。Luco and Apselの方法は、それ以前の Haskell マトリクス<sup>7)</sup>



と比較して、常に波動伝播の方向に演算を進めることにより指数関数の発散を回避しているという点で優れている。なお、Hisada<sup>9)10)11)</sup>が指摘しているように Luco and Apsel の方法には発散しやすい指数関数が震源項に残っているという問題がある。この問題に対しては震源層における地震波の収支の計算を工夫することで対処可能である。この点については後述する。

以下、鉛直方向の単位インパルス力の場合と水平方向の単位インパルス力の場合に分けて説明する。

## 5.2 鉛直方向の単位インパルス力の場合

図-4 に示すように、各地層に浅い方から順に1,2,3,...,N,N+1のように番号をふる。第N+1層は基盤に対応する。z座標は鉛直下向きにとり、地表面をz=0とする。第j層上端のz座標をz<sup>(j-1)</sup>とする。第s層は震源のある層である。図-4 では震源が基盤以外の層にある場合を示しているが、震源は基盤内にあっても良い。すなわちs=N+1であっても良い。

まず、鉛直下向きの単位インパルス力 $\delta(t)\delta(\xi)$ が時刻t=0において点(0,0,z<sub>s</sub>)に作用したときの第j層における変位および応力のフーリエ変換を次の形に書く。

$$\hat{u}_r^j(r, z, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n V_1^{jn} J_1(k_n r) \quad (27)$$

$$\hat{u}_z^j(r, z, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n V_2^{jn} J_0(k_n r) \quad (28)$$

$$\hat{\sigma}_{rz}^j(r, z, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n V_3^{jn} J_1(k_n r) \quad (29)$$

$$\hat{\sigma}_{zz}^j(r, z, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n V_4^{jn} J_0(k_n r) \quad (30)$$

ここにV<sub>1</sub><sup>jn</sup>, V<sub>2</sub><sup>jn</sup>, V<sub>3</sub><sup>jn</sup>, V<sub>4</sub><sup>jn</sup>は motion-stress vector と呼ばれ、それぞれz, ωの関数である。ここでは motion-stress vector は次の形に書けるものとする。

$$\begin{pmatrix} V_1^{jn} \\ V_2^{jn} \\ V_3^{jn} \\ V_4^{jn} \end{pmatrix} = \omega^{-1} \times \begin{pmatrix} \alpha_j k_n & \beta_j \gamma_{jn} & & & \alpha_j k_n & \beta_j \gamma_{jn} \\ -i\alpha_j v_{jn} & i\beta_j k_n & & & i\alpha_j v_{jn} & -i\beta_j k_n \\ 2i\alpha_j \mu_j k_n v_{jn} & i\beta_j \mu_j (\gamma_{jn}^2 - k_n^2) & -2i\alpha_j \mu_j k_n v_{jn} & -i\beta_j \mu_j (\gamma_{jn}^2 - k_n^2) & & \\ \alpha_j \mu_j (\gamma_{jn}^2 - k_n^2) & -2\beta_j \mu_j k_n \gamma_{jn} & \alpha_j \mu_j (\gamma_{jn}^2 - k_n^2) & -2\beta_j \mu_j k_n \gamma_{jn} & & \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} e^{-iv_{jn}(z^{(j)}-z)} & & & & 0 \\ & e^{-i\gamma_{jn}(z^{(j)}-z)} & & & \\ & & e^{-iv_{jn}(z-z^{(j-1)})} & & \\ & & & e^{-i\gamma_{jn}(z-z^{(j-1)})} & \\ & 0 & & & e^{-iv_{jn}(z-z^{(j-1)})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_u^{jn} \\ SV_u^{jn} \\ P_d^{jn} \\ SV_d^{jn} \end{pmatrix} \quad (31)$$

ここにP<sub>u</sub><sup>jn</sup>, SV<sub>u</sub><sup>jn</sup>, P<sub>d</sub><sup>jn</sup>, SV<sub>d</sub><sup>jn</sup>はそれぞれ上昇するP波, 上昇するSV波, 下降するP波, 下降するSV波の振幅である。上昇波の振幅は第j層の下端において, 下降波の振幅は第j層の上端において, それぞれ評価されている。α<sub>j</sub>は第j層のP波速度, β<sub>j</sub>は第j層のS波速度, μ<sub>j</sub>は第j層のラメ定数である。また,

$$v_{jn} = \sqrt{(\omega/\alpha_j)^2 - k_n^2}, \quad \text{Im}(v_{jn}) < 0 \quad (32)$$

$$\gamma_{jn} = \sqrt{(\omega/\beta_j)^2 - k_n^2}, \quad \text{Im}(\gamma_{jn}) < 0 \quad (33)$$

である。Motion-stress vector の各成分が式(31)で与えられるとき、式(27)(28)(29)(30)の変位と応力が円筒座標系における Navier の式および応力～変位関係式を満足することは、式(27)(28)(29)(30)をこれらの関係式に代入することにより確認できる。

式(27)(28)(29)(30)はすでに Navier の式および応力～変位関係式を満足しているのであるから、後は境界条件と放射条件を満足するように  $P_u^{jn}$ ,  $SV_u^{jn}$ ,  $P_d^{jn}$ ,  $SV_d^{jn}$  を決定すれば、鉛直下向きの単位インパルス力  $\delta(t)\delta(\xi)$  に対する波動場が求まることになる。なお、第  $j$  層に震源がある場合、震源の上方と下方で波動場が異なるので、震源の上方と下方で  $P_u^{jn}$ ,  $SV_u^{jn}$ ,  $P_d^{jn}$ ,  $SV_d^{jn}$  を使い分けなければならない。この点については後述する。

ここで、式を見やすくするため

$$\begin{pmatrix} D^j \\ S^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1^{jn} \\ V_2^{jn} \\ V_3^{jn} \\ V_4^{jn} \end{pmatrix} \quad (34)$$

$$\begin{pmatrix} E_{11}^j & E_{12}^j \\ E_{21}^j & E_{22}^j \end{pmatrix} = \omega^{-1} \times \begin{pmatrix} \alpha_j k_n & \beta_j \gamma_{jn} & \alpha_j k_n & \beta_j \gamma_{jn} \\ -i\alpha_j \nu_{jn} & i\beta_j k_n & i\alpha_j \nu_{jn} & -i\beta_j k_n \\ 2i\alpha_j \mu_j k_n \nu_{jn} & i\beta_j \mu_j (\gamma_{jn}^2 - k_n^2) & -2i\alpha_j \mu_j k_n \nu_{jn} & -i\beta_j \mu_j (\gamma_{jn}^2 - k_n^2) \\ \alpha_j \mu_j (\gamma_{jn}^2 - k_n^2) & -2\beta_j \mu_j k_n \gamma_{jn} & \alpha_j \mu_j (\gamma_{jn}^2 - k_n^2) & -2\beta_j \mu_j k_n \gamma_{jn} \end{pmatrix} \quad (35)$$

$$\begin{pmatrix} \Lambda_j(z^{(j)} - z) & 0 \\ 0 & \Lambda_j(z - z^{(j-1)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\nu_{jn}(z^{(j)}-z)} & 0 \\ e^{-i\nu_{jn}(z^{(j)}-z)} & 0 \\ 0 & e^{-i\nu_{jn}(z-z^{(j-1)})} \\ 0 & e^{-i\nu_{jn}(z-z^{(j-1)})} \end{pmatrix} \quad (36)$$

$$\begin{pmatrix} C_u^j \\ C_d^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_u^{jn} \\ SV_u^{jn} \\ P_d^{jn} \\ SV_d^{jn} \end{pmatrix} \quad (37)$$

と書くことにすると、式(31)は以下のように書き直すことができる。

$$\begin{pmatrix} D^j \\ S^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{11}^j & E_{12}^j \\ E_{21}^j & E_{22}^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_j(z^{(j)} - z) & 0 \\ 0 & \Lambda_j(z - z^{(j-1)}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_u^j \\ C_d^j \end{pmatrix} \quad (38)$$

ここで  $\Lambda_j$  には  $e^{-i\nu|z|}$  のような形をした指数関数は含まれるが  $e^{i\nu|z|}$  のような形をした指数関数は含まれない。このことは後に無限級数の収束性を考える上で重要となる。

以下、 $C_u^j$ ,  $C_d^j$  が満足すべき境界条件および放射条件について考えていく。まず、自由表面では応力はゼロでなければならないから

$$E_{21}^1 \Lambda_1 C_u^1 + E_{22}^1 C_d^1 = 0 \quad (39)$$

である（ここではノーテーションを簡単にするため  $\Lambda_j(z^{(j)} - z^{(j-1)})$  を単に  $\Lambda_j$  と書いている）。次に、第  $j$  層と第  $j+1$  層の間 ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) では変位と応力が連続でなければならないから

$$\begin{pmatrix} E_{11}^{j+1} & E_{12}^{j+1} \\ E_{21}^{j+1} & E_{22}^{j+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{j+1} C_u^{j+1} \\ C_d^{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{11}^j & E_{12}^j \\ E_{21}^j & E_{22}^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_u^j \\ \Lambda_j C_d^j \end{pmatrix} \quad (40)$$

である ( $\Lambda_{j+1} C_u^{j+1}$ は第 $j+1$ 層上端における上昇波の振幅,  $\Lambda_j C_d^j$ は第 $j$ 層下端における下降波の振幅). さらに,  $s \neq N+1$ のときは, 基盤内では上向きの波は存在しないはずであるから次式が成立する.

$$C_u^{N+1} = 0 \quad (41)$$

この最後の条件については少し解説が必要である. 図-3で説明したように,  $\nu$ は複素平面上の第4象限に存在し, 同様に $\gamma$ も複素平面上の第4象限に存在することから, motion-stress vectorの構成要素である $P_u e^{i\nu z}$ と $SV_u e^{i\gamma z}$ はともに減衰しながら上昇する波を表す. したがって, 仮にこれらの波が基盤内に存在すると,  $z \rightarrow \infty$ で振幅が無限大となり不都合である. したがって, 式(41)は, 基盤内に上向きの波が存在しない条件を示すと同時に,  $z \rightarrow \infty$ で振幅が無限大とならない条件を示していると言える.

ここで, 修正反射/透過マトリクス $T_d^{(j)}$ ,  $R_d^{(j)}$ ,  $T_u^{(j)}$ ,  $R_u^{(j)}$ を次式により定義する.

$$\begin{pmatrix} C_u^j \\ C_d^{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_u^{(j)} & R_d^{(j)} \\ R_u^{(j)} & T_d^{(j)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{j+1} C_u^{j+1} \\ \Lambda_j C_d^j \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (42)$$

これは, 図-5に示す通り, 第 $j$ 層下端における上昇波の振幅が第 $j+1$ 層上端における上昇波の振幅と第 $j$ 層下端における下降波の振幅から決まることを表している (第 $j+1$ 層上端における下降波の振幅についても同様).

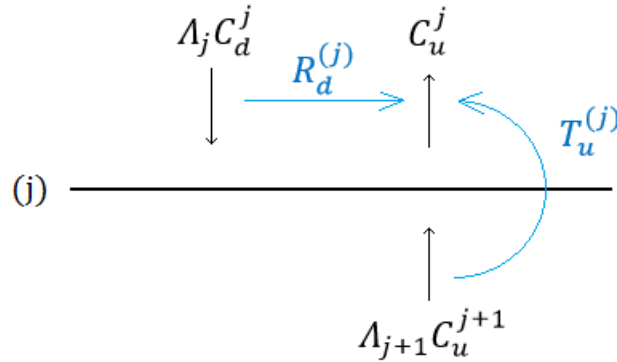


図-5 修正反射/透過マトリクス

自由表面では, 修正反射/透過マトリクスのうち $R_u^{(0)}$ のみが定義される.

$$C_d^1 = R_u^{(0)} \Lambda_1 C_u^1 \quad (43)$$

修正反射/透過マトリクスの具体的な形は, 式(39)(40)(41)より次のとおり求まる.

$$R_u^{(0)} = -(E_{22}^1)^{-1} E_{21}^1 \quad (44)$$

$$\begin{pmatrix} T_u^{(j)} & R_d^{(j)} \\ R_u^{(j)} & T_d^{(j)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{11}^j & -E_{12}^{j+1} \\ E_{21}^j & -E_{22}^{j+1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E_{11}^{j+1} & -E_{12}^j \\ E_{21}^{j+1} & -E_{22}^j \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (45)$$

$s \neq N + 1$ のときは，基盤内では上向きの波は存在しないため，式(45)は $j = N$ では次式に置き換わる．

$$\begin{pmatrix} R_d^{(N)} \\ T_d^{(N)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{11}^N & -E_{12}^{N+1} \\ E_{21}^N & -E_{22}^{N+1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -E_{12}^N \\ -E_{22}^N \end{pmatrix} \quad (46)$$

次に一般化反射/透過マトリクス $\tilde{R}_u^{(j)}$ ， $\tilde{T}_u^{(j)}$ ， $\tilde{R}_d^{(j)}$ ， $\tilde{T}_d^{(j)}$ を次式により定義する．  
震源より上の地層境界に対し

$$C_u^j = \tilde{T}_u^{(j)} \Lambda_{j+1} C_u^{j+1} \quad (j = 1, 2, \dots, s-1) \quad (47)$$

$$C_d^{j+1} = \tilde{R}_u^{(j)} \Lambda_{j+1} C_u^{j+1} \quad (j = 0, 1, \dots, s-1) \quad (48)$$

震源より下の地層境界に対し

$$C_d^{j+1} = \tilde{T}_d^{(j)} \Lambda_j C_d^j \quad (j = N, N-1, \dots, s) \quad (49)$$

$$C_u^j = \tilde{R}_d^{(j)} \Lambda_j C_d^j \quad (j = N, N-1, \dots, s) \quad (50)$$

一般化反射/透過マトリクスの概念を図-6に示す．式(47)(48)では震源よりも上方の地層境界に対して $\tilde{T}_u^{(j)}$ と $\tilde{R}_u^{(j)}$ が定義されており，これらは第 $j$ 層における上昇波の振幅（と第 $j+1$ 層における下降波の振幅）を第 $j+1$ 層における上昇波の振幅のみで表そうとするものである．そのためには， $\tilde{T}_u^{(j)}$ と $\tilde{R}_u^{(j)}$ の中に，第 $j$ 層よりも上方に存在するすべての地層の情報が含まれていなければならない．同様に，式(49)(50)では震源よりも下方の地層境界に対して $\tilde{T}_d^{(j)}$ と $\tilde{R}_d^{(j)}$ が定義されており，これらは第 $j+1$ 層における下降波の振幅（と第 $j$ 層における上昇波の振幅）を第 $j$ 層における下降波の振幅のみで表そうとするものである．そのためには， $\tilde{T}_d^{(j)}$ と $\tilde{R}_d^{(j)}$ の中に，第 $j+1$ 層よりも下方に存在するすべての地層の情報が含まれていなければならない．

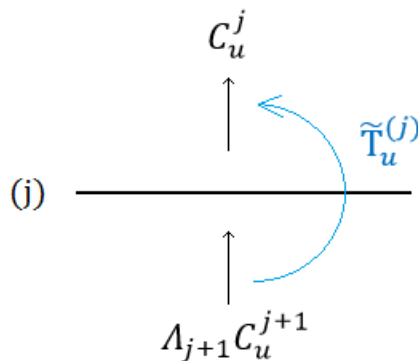


図-6 一般化反射/透過マトリクス

一般化反射/透過マトリクスは修正反射/透過マトリクスから次の漸化式により求めることができる．震源より上の地層境界に対しては

$$\tilde{R}_u^{(0)} = R_u^{(0)} \quad (51)$$

$$\tilde{T}_u^{(j)} = (I - R_d^{(j)} \Lambda_j \tilde{R}_u^{(j-1)} \Lambda_j)^{-1} T_u^{(j)} \quad (j = 1, 2, \dots, s-1) \quad (52)$$

$$\tilde{R}_u^{(j)} = R_u^{(j)} + T_d^{(j)} \Lambda_j \tilde{R}_u^{(j-1)} \Lambda_j \tilde{T}_u^{(j)} \quad (j = 1, 2, \dots, s-1) \quad (53)$$

震源より下の地層境界に対しては

$$\tilde{T}_d^{(N)} = T_d^{(N)} \quad (54)$$

$$\tilde{R}_d^{(N)} = R_d^{(N)} \quad (55)$$

$$\tilde{T}_d^{(j)} = (I - R_u^{(j)} \Lambda_{j+1} \tilde{R}_d^{(j+1)} \Lambda_{j+1})^{-1} T_d^{(j)} \quad (j = N-1, N-2, \dots, s) \quad (56)$$

$$\tilde{R}_d^{(j)} = R_d^{(j)} + T_u^{(j)} \Lambda_{j+1} \tilde{R}_d^{(j+1)} \Lambda_{j+1} \tilde{T}_d^{(j)} \quad (j = N-1, N-2, \dots, s) \quad (57)$$

もしも震源層の P 波および SV 波の振幅が与えられれば、式(47)(48)を用いて震源層より上の層の振幅を、式(49)(50)を用いて震源層より下の層の振幅を計算することができる。式(51)~(57)より一般化反射/透過マトリクスには  $e^{-iv|z|}$  のような形をした指数関数は含まれるが  $e^{iv|z|}$  のような形をした指数関数は含まれない。このことは後に無限級数の収束性を考える上で重要となる。

震源層の P 波および SV 波の振幅は図-7 に示す地震波の収支から求めることができる。

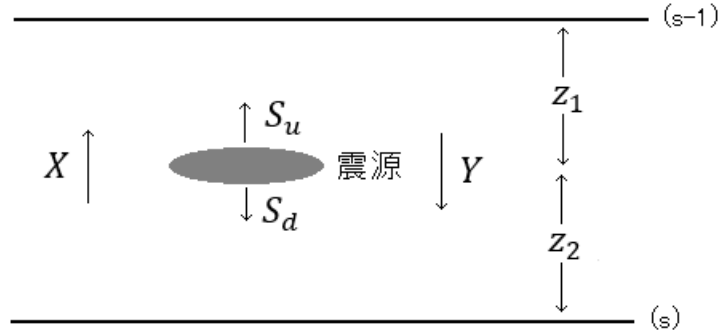


図-7 震源層における地震波の収支

図-7 において  $S_u$  は震源から上向きに放射される地震波の振幅を震源から出た直後の深度で評価したもの、 $S_d$  は同じく下向きに放射される地震波の振幅を震源から出た直後の深度で評価したもの、 $X$  は第  $s$  層内を下から上へ伝播する地震波の振幅を震源の深度で評価したもの、 $Y$  は第  $s$  層内を上から下へ伝播する地震波の振幅を震源の深度で評価したものである。  $z_1$  は震源より上の部分の層厚、  $z_2$  は震源より下の部分の層厚である。  $S_u$  および  $S_d$  は既知であり、鉛直下向きに作用する単位インパルス力の場合には式(18)(19)と式(27)(28)を比較することにより次式で与えられる。

$$S_u = \left( \begin{array}{c} \frac{k_n}{4L\rho_s\omega\alpha_s} \\ -\frac{k_n^2}{4L\rho_s\omega\beta_s\gamma_{sn}} \end{array} \right), S_d = \left( \begin{array}{c} -\frac{k_n}{4L\rho_s\omega\alpha_s} \\ \frac{k_n^2}{4L\rho_s\omega\beta_s\gamma_{sn}} \end{array} \right) \quad (58)$$

震源層内での地震波の収支を考えると未知数  $X$ ,  $Y$  に関する次の連立方程式を得る。なお次式ではノーテーションを簡単にするため  $\Lambda_s(z_1)$  を  $\Lambda_{s1}$ ,  $\Lambda_s(z_2)$  を  $\Lambda_{s2}$  と書いている。

$$Y = \Lambda_{s1} \tilde{R}_u^{(s-1)} \Lambda_{s1} (X + S_u) \quad (59)$$

$$X = \Lambda_{s2} \tilde{R}_d^{(s)} \Lambda_{s2} (Y + S_d) \quad (60)$$

これを $X$ ,  $Y$ について解くと次式を得る.

$$X = (I - \Lambda_{s2} \tilde{R}_d^{(s)} \Lambda_{s2} \Lambda_{s1} \tilde{R}_u^{(s-1)} \Lambda_{s1})^{-1} \Lambda_{s2} \tilde{R}_d^{(s)} \Lambda_{s2} (\Lambda_{s1} \tilde{R}_u^{(s-1)} \Lambda_{s1} S_u + S_d) \quad (61)$$

$$Y = (I - \Lambda_{s1} \tilde{R}_u^{(s-1)} \Lambda_{s1} \Lambda_{s2} \tilde{R}_d^{(s)} \Lambda_{s2})^{-1} \Lambda_{s1} \tilde{R}_u^{(s-1)} \Lambda_{s1} (\Lambda_{s2} \tilde{R}_d^{(s)} \Lambda_{s2} S_d + S_u) \quad (62)$$

$X$ ,  $Y$ を求めた後に

$$\Lambda_s C_u^s = \Lambda_{s1} (X + S_u) \quad (63)$$

$$\Lambda_s C_d^s = \Lambda_{s2} (Y + S_d) \quad (64)$$

により $\Lambda_s C_u^s$  (震源層上端での上昇波の振幅) と $\Lambda_s C_d^s$  (震源層下端での下降波の振幅) を求め式(47)(48)(49)(50)の漸化式を適用すれば各層の振幅を求めることができる.

震源が基盤内にある場合 (すなわち $s = N + 1$ の場合) には

$$\Lambda_s C_u^s = \Lambda_{s1} S_u \quad (65)$$

により $\Lambda_s C_u^s$  (基盤上端での上昇波の振幅) を求め式(47)(48)の漸化式を適用すれば各層の振幅を求めることができる.

### 5.3 水平方向の単位インパルス力の場合

水平方向 ( $\theta_0$ 方向) の単位インパルス力 $\delta(t)\delta(\xi)$ が時刻 $t = 0$ において点 $(0,0, z_s)$ に作用したときの第 $j$ 層における変位および応力のフーリエ変換を次の形に書く.

$$\hat{u}_r^j(r, \theta, z, \omega) = -\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left( V_1^{jn} \frac{d}{dr} J_1(k_n r) + H_1^{jn} \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) \cos(\theta - \theta_0) \quad (66)$$

$$\hat{u}_\theta^j(r, \theta, z, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left( V_1^{jn} \frac{1}{r} J_1(k_n r) + H_1^{jn} \frac{d}{dr} J_1(k_n r) \right) \sin(\theta - \theta_0) \quad (67)$$

$$\hat{u}_z^j(r, \theta, z, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n V_2^{jn} k_n J_1(k_n r) \cos(\theta - \theta_0) \quad (68)$$

$$\hat{\sigma}_{rz}^j(r, \theta, z, \omega) = -\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left( V_3^{jn} \frac{d}{dr} J_1(k_n r) + H_2^{jn} \frac{1}{r} J_1(k_n r) \right) \cos(\theta - \theta_0) \quad (69)$$

$$\hat{\sigma}_{\theta z}^j(r, \theta, z, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left( V_3^{jn} \frac{1}{r} J_1(k_n r) + H_2^{jn} \frac{d}{dr} J_1(k_n r) \right) \sin(\theta - \theta_0) \quad (70)$$

$$\hat{\sigma}_{zz}^j(r, \theta, z, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n V_4^{jn} k_n J_1(k_n r) \cos(\theta - \theta_0) \quad (71)$$

ここに $V_1^{jn}$ ,  $V_2^{jn}$ ,  $V_3^{jn}$ ,  $V_4^{jn}$ ,  $H_1^{jn}$ ,  $H_2^{jn}$ は motion-stress vector と呼ばれ, それぞれ $z$ ,  $\omega$ の関数である. ここでは motion-stress vector の各成分うち $V_1^{jn}$ ,  $V_2^{jn}$ ,  $V_3^{jn}$ ,  $V_4^{jn}$ は式(31)の形に書けるものとし,  $H_1^{jn}$ ,  $H_2^{jn}$ については次の形に書けるものとする.

$$\begin{pmatrix} H_1^{jn} \\ H_2^{jn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\mu_j\gamma_{jn} & -i\mu_j\gamma_{jn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\gamma_{jn}(z^{(j)}-z)} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma_{jn}(z-z^{(j-1)})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} SH_u^{jn} \\ SH_d^{jn} \end{pmatrix} \quad (72)$$

ここに $SH_u^{jn}$ ,  $SH_d^{jn}$ はそれぞれ上昇する SH 波と下降する SH 波の振幅である。上昇波の振幅は第 $j$ 層の下端において、下降波の振幅は第 $j$ 層の上端において、それぞれ評価されている。Motion-stress vector の各成分が式(31)(72)で与えられるとき、式(66)-(71)の変位と応力が円筒座標系における Navier の式および応力～変位関係式を満足することは、式(66)-(71)をこれらの関係式に代入することにより確認できる。

式(66)-(71)はすでに Navier の式および応力～変位関係式を満足しているのであるから、後は境界条件と放射条件を満足するように $P_u^{jn}$ ,  $P_d^{jn}$ ,  $SV_u^{jn}$ ,  $SV_d^{jn}$ ,  $SH_u^{jn}$ ,  $SH_d^{jn}$ を決定すれば、水平方向の単位インパルス力 $\delta(t)\delta(\xi)$ に対する波動場が求まることになる。

P-SV 波の振幅すなわち $P_u^{jn}$ ,  $P_d^{jn}$ ,  $SV_u^{jn}$ ,  $SV_d^{jn}$ は 5.2 と同様の方法で求めることができる。5.2 との相違点は、震源が水平方向の単位インパルス力であることを反映して震源項が次式となる点である。

$$S_u = S_d = \begin{pmatrix} \frac{ik_n}{4L\rho_s\omega\alpha_s\nu_{sn}} \\ i \\ \frac{i}{4L\rho_s\omega\beta_s} \end{pmatrix} \quad (73)$$

式(73)は式(24)(25)(26)と式(66)(67)(68)とを比較することにより得られる。

SH 波の振幅すなわち $SH_u^{jn}$ ,  $SH_d^{jn}$ については、式を見やすくするため

$$\begin{pmatrix} D^j \\ S^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1^{jn} \\ H_2^{jn} \end{pmatrix} \quad (74)$$

$$\begin{pmatrix} E_{11}^j & E_{12}^j \\ E_{21}^j & E_{22}^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\mu_j\gamma_{jn} & -i\mu_j\gamma_{jn} \end{pmatrix} \quad (75)$$

$$\begin{pmatrix} \Lambda_j(z^{(j)}-z) & 0 \\ 0 & \Lambda_j(z-z^{(j-1)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\gamma_{jn}(z^{(j)}-z)} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma_{jn}(z-z^{(j-1)})} \end{pmatrix} \quad (76)$$

$$\begin{pmatrix} C_u^j \\ C_d^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} SH_u^{jn} \\ SH_d^{jn} \end{pmatrix} \quad (77)$$

とおくことにすると、P-SV 波の場合の式(38)がそのまま成立するので、P-SV 波の場合と同じように一般化反射/透過マトリクスを導入することにより SH 波の振幅すなわち $C_u^j$ ,  $C_d^j$ を求めることができる。震源項については式(24)(25)(26)と式(66)(67)(68)とを比較することにより次式を得る。

$$S_u = S_d = \frac{i}{4L\rho_s\beta_s^2\gamma_{sn}} \quad (78)$$

## 6. 離散化波数法の無限級数はなぜ収束するか

ここまで多くの無限級数が登場してきたが、これらは実際の計算ではどこかで打ち切らなければならない。それでは、どこで打ち切るかをどのように決定すべきであろうか。この点については、第 $n$ 項までの和と第 $n+1$ 項までの和を比較して級数が十分に収束していることを確認するというシンプルな方法もあるが<sup>12)</sup>、ここではもう少し理詰めで考えてみる。それには、そもそも無限級数がなぜ収束するかを理解しておくことが重要である。

離散化波数法に登場する無限級数は、例えば式(10)に示すように、各項は必ずベッセル関数と指数関数の積となっており、前者は $k_n$ を含み、後者は $\nu_n$  (または $\gamma_n$ ) を含む。

$$\hat{\phi} = -\frac{i\pi}{L} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{k_n}{v_n} J_0(k_n r) e^{-iv_n |z|} \quad (10) \text{再掲}$$

ここで、 $k_n$ を大きくした場合の $v_n$ の変化について考えてみる。 $v_n$ の定義は

$$v_n = \sqrt{(\omega/\alpha)^2 - k_n^2}, \quad \text{Im}(v_n) < 0 \quad (12) \text{再掲}$$

であるが、 $\omega/\alpha$ はすでに議論したように複素平面上の第4象限にあり、かつ、その虚部の絶対値は小さいので、複素平面上では実軸の正の部分の少し下にある(図-8左上)。よって、 $(\omega/\alpha)^2$ も複素平面上では実軸の正の部分の少し下にある(図-8右上)。ここで $k_n$ は実数であることを考慮すると、 $(\omega/\alpha)^2 - k_n^2$ は複素平面上では第3象限または第4象限の実軸の少し下にある、 $k_n$ が大きくなるにつれ $(\omega/\alpha)^2 - k_n^2$ は左に移動する(図-8左下)。よって、その平方根であり虚部が負である $v_n$ は複素平面上の第4象限で実軸の少し下もしくは虚軸の少し右に位置し、 $k_n$ が大きくなるにつれ、その虚部の絶対値は大きくなっていく。いま $v_n$ を

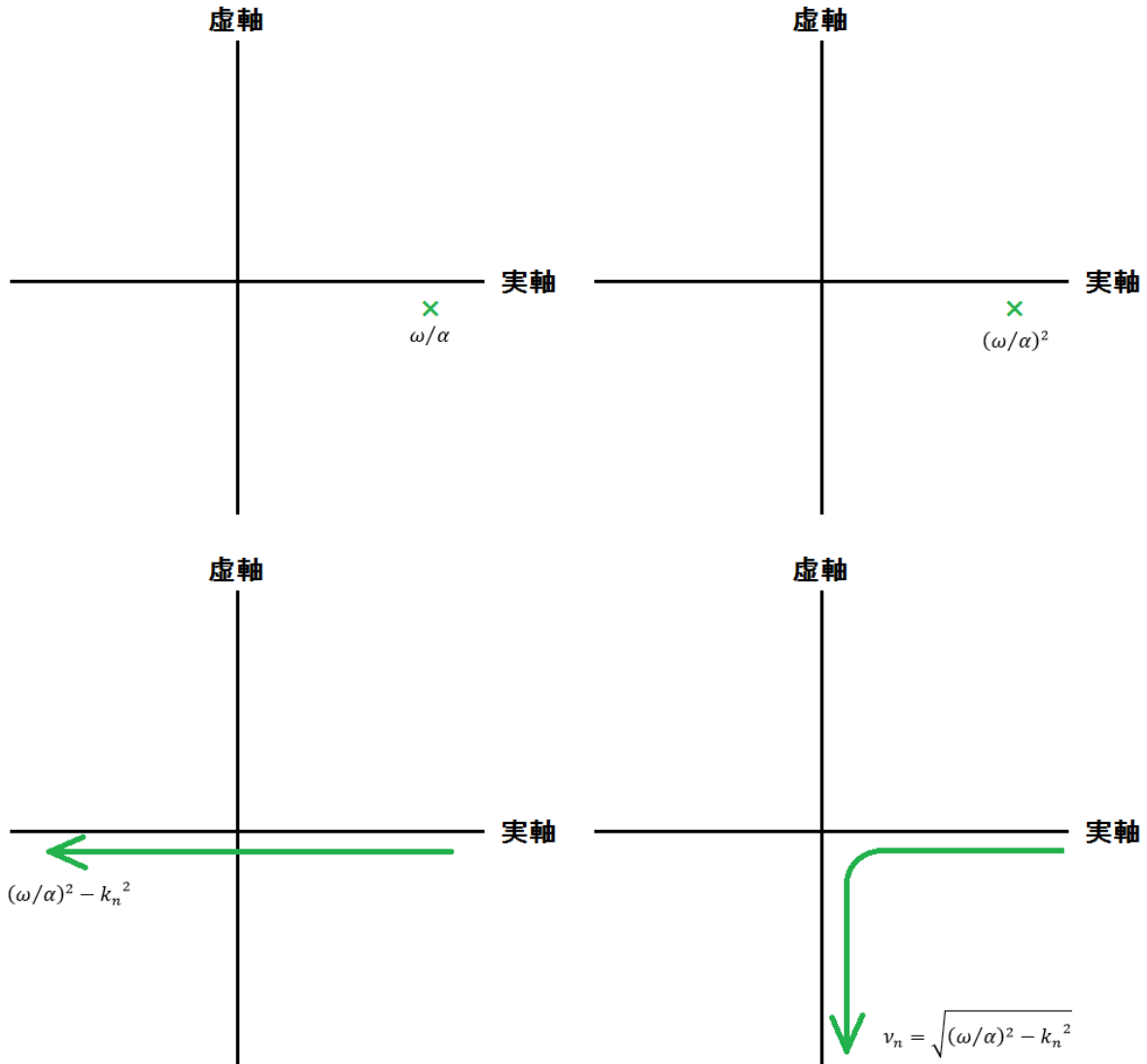


図-8 複素平面上における $\omega/\alpha$ ,  $(\omega/\alpha)^2$ ,  $(\omega/\alpha)^2 - k_n^2$ および $v_n$ の位置.



$$\nu_n = A - Bi, \quad A > 0, B > 0 \quad (79)$$

のように書くことにすれば,

$$e^{-i\nu_n|z|} = e^{-iA|z|}e^{-B|z|}$$

となり,  $k_n$ が大きくなるにつれ $B$ が大きくなるので $e^{-i\nu_n|z|}$ はゼロに収束する. これが離散化波数法の無限級数が収束する理由である.  $k_n$ を大きくしたときベッセル関数も小さくなるが, 一般にベッセル関数がゼロに収束する速度よりも指数関数がゼロに収束する速度の方が速いので,  $e^{-i\nu_n|z|}$ がゼロに収束することが無限級数の収束の原動力である. とすれば,  $e^{-i\nu_n|z|}$ が十分に小さくなるような $k_n$ を離散化波数法において考慮する波数の最大値 $k_{max}$ とすればよいことになる.

例えば, フリングステップの計算において重要となる $\text{Re}(\omega) \cong 0$ の場合を考えると,  $B \cong k_n$ すなわち

$$e^{-i\nu_n|z|} \cong e^{-iA|z|}e^{-k_n|z|}$$

となり,  $k_n|z|$ が十分に大きくなるような $k_n$ を波数の最大値 $k_{max}$ とすればよいことになる. 経験上は $k_{max} = 10\pi/|z|$ とすれば無限級数は十分に収束する. ここで $|z|$ としては震源と計算地点の $z$ 座標の差の絶対値をとればよい.

透過・反射の影響を受ける以前の波動場においては級数の各項の $z$ 依存性が $e^{-i\nu_n|z|}$ または $e^{-i\nu_n|z|}$ となっていることはわかりやすい (式(18)(19)(24)(25)(26)). 透過・反射の影響がある場合の波動場においては級数の各項の $z$ 依存性は少しわかりにくい (式(27) ~ (30)および式(66) ~ (71)) ので, 漸化式 (式(47)(48)(49)(50)) をもとにたどっていくことにする.

震源より上方の各層については, 式(63)より, 震源層上端での上昇波の振幅の $z$ 依存性は

$$A_s C_u^s \propto A_{s1}$$

である. これと式(47)より, 第 $j$ 層下端における上昇波の振幅の $z$ 依存性は

$$C_u^j \propto A_{s1} A_{s-1} A_{s-2} \cdots A_{j-1}$$

であり, 式(48)より, 第 $j$ 層上端における下降波の振幅の $z$ 依存性は

$$C_d^j \propto A_{s1} A_{s-1} A_{s-2} \cdots A_{j-1} A_j$$

である. 第 $j$ 層の任意の深度における振幅の $z$ 依存性は,  $C_u^j$ の $z$ 依存性にさらに $A_j(z^{(j)} - z)$ を乗じたものとなる. 震源より下方の各層についても同様に考えることができる.

以上を総合すると, 計算地点における振幅の $z$ 依存性は

$$\exp\left(-i \sum \nu_n |z|_j\right)$$

となる. ここに $|z|_j$ は震源と計算地点の間にある各層の厚さであり

$$|z| = \sum |z|_j$$

である。各層を弾性波が P 波として伝播するか S 波として伝播するかに応じて  $v_{jn}$  は  $\gamma_{jn}$  に変わる場合がある。いずれにしても、透過・反射の影響がある場合も含め、波数の最大値  $k_{max}$  を決める際の  $|z|$  としては震源と計算地点の  $z$  座標の差の絶対値をとればよい。

#### 参考文献

- 1) Bouchon, M.: A simple method to calculate Green's functions for elastic layered media, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol.71, pp.959-971, 1981.
- 2) Phinney, R.A.: Theoretical Calculation of the Spectrum of First Arrivals in Layered Elastic Mediums, Journal of Geophysical Research, Vol.70, pp.5107-5123, 1965.
- 3) Lamb, H.: On the propagation of tremors at the surface of an elastic solid, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, Vol.203, pp.1-42, 1904.
- 4) Harkrider, D.G.: Surface waves in multilayered elastic media I. Rayleigh and Love waves from buried sources in a multilayered elastic half-space, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol.54, pp.627-679, 1964.
- 5) 瀧澤一 起：不整形地盤における地震動，土木学会論文集，No.437, I-17, pp.1-18, 1991 年。
- 6) Luco, J.E. and Apsel, R.J.: On the Green's functions for layered half-space, Part I, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol.73, pp.909-923, 1983.
- 7) Thomson, W.T.: Transmission of elastic waves through a stratified solid, J. Appl. Phys., Vol.21, pp.89-93, 1950.
- 8) Haskell, N.A.: The dispersion of surface waves in multilayered media, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol.43, pp.17-34, 1953.
- 9) Hisada, Y.: An efficient method for computing Green's functions for a layered half-space with sources and receivers at close depth, Bulletin of the seismological Society of America, Vol.84, pp.1456-1472, 1993.
- 10) Hisada, Y.: An efficient method for computing Green's functions for a layered half-space with sources and receivers at close depth (Part 2), Bulletin of the seismological Society of America, Vol.85, pp.1080-1093, 1995.
- 11) Hisada, Y.: Reply to comments on "An efficient method for computing Green's functions for a layered half-space with sources and receivers at close depth" by Roy J. Greenfield, Bulletin of the seismological Society of America, Vol.85, pp.1525-1526, 1995.
- 12) Bouchon, M.: A review of the discrete wavenumber method, Pure and Applied Geophysics, Vol.160, pp. 446-465, 2003.

## 付録 A ゾンマーフェルト積分

一般に式(A1)で表されるような球面波は、本文の図-2に示したように様々なテイクオフ・アングルをもつ波の重ね合わせで表現できる。ここではこのことについて説明する。

$$\hat{\phi} = \frac{1}{R} e^{-i\omega R/\alpha} \quad (\text{A1})$$

まず、式(A1)は式(A2)に示す波動方程式の解である（付録 B 参照）。

$$\omega^2 \hat{\phi} + \alpha^2 \nabla^2 \hat{\phi} = -4\pi\alpha^2 \delta(\mathbf{x}) \quad (\text{A2})$$

そこで、両辺に空間座標に関する 3 重フーリエ変換

$$\tilde{f}(k_1, k_2, k_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x_1, x_2, x_3) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} dx_1 dx_2 dx_3 \quad (\text{A3})$$

を適用する。ここに

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 \quad (\text{A4})$$

である。その結果、次式が得られる。

$$\tilde{\phi} = \frac{4\pi\alpha^2}{\alpha^2 k^2 - \omega^2} \quad (\text{A5})$$

ここに $\tilde{\phi}$ は $\hat{\phi}$ の空間座標に関する 3 重フーリエ変換であり

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \quad (\text{A6})$$

である。式(A5)をフーリエ逆変換すると $\hat{\phi}$ に戻るはずであるから

$$\hat{\phi} = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 - (\omega/\alpha)^2} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} dk_1 dk_2 dk_3 \quad (\text{A7})$$

ここで $k_3$ に関する積分を実行する。複素平面上に積分経路をとり、留数定理を適用する。被積分関数の分母がゼロとなるのは

$$k_3^2 = (\omega/\alpha)^2 - k_1^2 - k_2^2 \quad (\text{A8})$$

のときであるが、本文中に述べたように $(\omega/\alpha)^2$ は複素平面上の第 4 象限にあるので、 $(\omega/\alpha)^2 - k_1^2 - k_2^2$ は複素平面上の第 3 象限または第 4 象限にある。よって特異点は複素平面上の第 2 象限と第 4 象限に一つずつ存在する（第 4 象限の特異点を $\nu$ とする）。 $x_3 > 0$ のときは図-A1 に示すように複素平面の下半分に積分経路をとると円周上の積分が消え、留数としては第 4 象限のものが選択され、積分値は

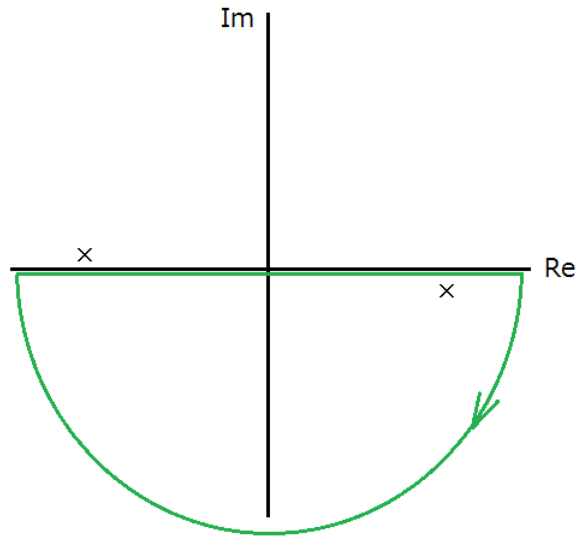


図-A1  $x_3 > 0$ のときの積分経路

$$\hat{\phi} = -i \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{v} \exp(-ik_1 x_1 - ik_2 x_2 - ivx_3) dk_1 dk_2 \quad (\text{A9})$$

となる.  $x_3 < 0$ のときは複素平面の上半分に積分経路をとると円周上の積分が消え, 留数としては第2象限のものが選択され, 積分値は

$$\hat{\phi} = -i \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{v} \exp(-ik_1 x_1 - ik_2 x_2 + ivx_3) dk_1 dk_2 \quad (\text{A10})$$

となる. これらをまとめると積分値は

$$\hat{\phi} = -i \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{v} \exp(-ik_1 x_1 - ik_2 x_2 - iv|x_3|) dk_1 dk_2 \quad (\text{A11})$$

となる. ここで

$$k_1 = k_r \cos \theta', \quad k_2 = k_r \sin \theta' \quad (\text{A12})$$

とおき変数変換を行うと

$$\hat{\phi} = -i \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dk_r \int_0^{2\pi} d\theta' \frac{k_r}{v} \exp(-ik_1 x_1 - ik_2 x_2 - iv|x_3|) \quad (\text{A13})$$

となる. ここでさらに

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta \quad (\text{A14})$$

とおくと

$$\hat{\phi} = -i \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk_r \int_0^{2\pi} d\theta' \frac{k_r}{v} \exp[-ik_r r \cos(\theta - \theta') - iv|x_3|] \quad (\text{A15})$$

となる。ここでベッセル関数の公式

$$2\pi J_0(k_r r) = \int_0^{2\pi} \exp(-ik_r r \cos \theta') d\theta' \quad (\text{A16})$$

を用いると（公式の証明は付録 C 参照）

$$\hat{\phi} = -i \int_0^\infty \frac{k_r}{v} J_0(k_r r) e^{-iv|x_3|} dk_r \quad (\text{A17})$$

となる。これで式(A1)の球面波が様々なテイクオフ・アングルをもつ波の重ね合わせで表現できたことになる。

付録B  $\hat{\phi} = (1/R)e^{-i\omega R/\alpha}$ が波動方程式の解であることについて

式(B1)の球面波は式(B2)に示す波動方程式の解である.

$$\hat{\phi} = \frac{1}{R}e^{-i\omega R/\alpha} \quad (\text{B1})$$

$$\omega^2\hat{\phi} + \alpha^2\nabla^2\hat{\phi} = -4\pi\alpha^2\delta(\mathbf{x}) \quad (\text{B2})$$

これは次のように示すことができる.

まず, 式(B2)に空間座標に関する3重フーリエ変換

$$\tilde{f}(k_1, k_2, k_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x_1, x_2, x_3) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} dx_1 dx_2 dx_3$$

を適用する. ここに

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3$$

である. その結果次式が得られる.

$$\omega^2\tilde{\phi} - k^2\alpha^2\tilde{\phi} = -4\pi\alpha^2 \quad (\text{B3})$$

ここに $\tilde{\phi}$ は $\hat{\phi}$ に対して空間座標に関する3重フーリエ変換を適用したものである. また

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$$

である. 式(B3)を変形すると

$$\tilde{\phi} = \frac{4\pi}{k^2 - k_\alpha^2} \quad (\text{B4})$$

が得られる.

式(B4)をフーリエ逆変換すると $\hat{\phi}$ が得られるはずであるが, [全無限弾性体のグリーン関数](#)の式(15)より  $1/(k^2 - k_\alpha^2)$ のフーリエ逆変換は  $(1/4\pi R)e^{-ik_\alpha R}$ であるから (ここに  $R^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ である)

$$\hat{\phi} = \frac{1}{R}e^{-i\omega R/\alpha}$$

が得られる. ■

## 付録 C ベッセル関数の公式

本稿で用いたベッセル関数の公式は以下の通りである.

$$\frac{d}{dz}J_0(z) = -J_1(z) \quad (C1)$$

$$\frac{d}{dz}J_1(z) = J_0(z) - \frac{1}{z}J_1(z) \quad (C2)$$

$$\frac{d^2}{dz^2}J_1(z) + \frac{1}{z}\frac{d}{dz}J_1(z) + \left(1 - \frac{1}{z^2}\right)J_1(z) = 0 \quad (C3)$$

$$2\pi J_0(z) = \int_0^{2\pi} \exp(-iz \cos \theta) d\theta \quad (C4)$$

式(C1)と式(C2)はベッセル関数の定義式

$$J_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{n!n!} \quad (C5)$$

$$J_1(z) = \left(\frac{z}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{n!(n+1)!} \quad (C6)$$

から導くことができる. 実際, 式(C5)の両辺を $z$ で微分すると初項の微分はゼロとなるので

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}J_0(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n-1} \frac{1}{2}}{n!n!} \\ &= -\left(\frac{z}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n-2}}{(n-1)!n!} \\ &= -\left(\frac{z}{2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}}{m!(m+1)!} \\ &= -J_1(z) \end{aligned}$$

となり式(C1)が得られる. また式(C6)の両辺を $z$ で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}J_1(z) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{n!(n+1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{n!(n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{n!(n+1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{n!(n+1)!} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{n!(n+1)!} \end{aligned}$$

となる. ここで右辺第3項は $-J_1(z)/z$ である. 右辺第1項から $n=0$ の項を除き第2項とまとめると

$$\begin{aligned} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{n!(n+1)!} - \frac{1}{z}J_1(z) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{n!n!} - \frac{1}{z}J_1(z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{n!n!} - \frac{1}{z}J_1(z) \end{aligned}$$

$$= J_0(z) - \frac{1}{z} J_1(z)$$

となり式(C2)が得られる。式(C3)は式(C1)と式(C2)から得られる。  
式(C4)については、次に示す Wallis の式<sup>1)</sup>を用いる。

$$I_n \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta \, d\theta = \frac{(2n)!}{2^{2n} n! n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (C7)$$

この式自体は次の通り数学的帰納法により証明することができる。まず  $n = 0$  の場合は両辺とも 1 となるので式(C7)は成立する。次に  $n = k$  の場合に式(C7)が成立すると仮定する。すなわち

$$I_k = \frac{(2k)!}{2^{2k} k! k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (C8)$$

であると仮定する。このとき

$$\begin{aligned} I_{k+1} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^{2k+2} \theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta \cdot \cos^{2k+1} \theta \, d\theta \end{aligned}$$

部分積分を適用すると

$$\begin{aligned} I_{k+1} &= \frac{1}{2\pi} [\sin \theta \cdot \cos^{2k+1} \theta]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi} (2k+1) \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cdot \cos^{2k} \theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} (2k+1) \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 \theta) \cdot \cos^{2k} \theta \, d\theta \\ &= (2k+1) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^{2k} \theta \, d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^{2k+2} \theta \, d\theta \right] \\ &= (2k+1)(I_k - I_{k+1}) \end{aligned}$$

よって

$$I_{k+1} = \frac{2k+1}{2k+2} I_k$$

これに式(C8)を代入すると

$$I_{k+1} = \frac{[2(k+1)]!}{2^{2(k+1)} (k+1)! (k+1)!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

が得られる。すなわち  $n = k + 1$  の場合に式(C7)が成立する。以上により数学的帰納法により式(C7)が証明できた。

次に、指数関数をテイラー展開した式



$$e^{-iz \cos \theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-iz \cos \theta)^n$$

の両辺を $\theta$ で積分すると

$$\int_0^{2\pi} e^{-iz \cos \theta} d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} \int_0^{2\pi} \cos^n \theta d\theta$$

右辺の和は、 $n$ が偶数の場合についてのみ加えればよいので、

$$\int_0^{2\pi} e^{-iz \cos \theta} d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta d\theta$$

ここで式(C7)を利用すると

$$\int_0^{2\pi} e^{-iz \cos \theta} d\theta = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \frac{(2n)!}{2^{2n} n! n!} = 2\pi J_0(z)$$

となるので式(C4)が成立する.

#### 参考文献

- 1) Abramowitz, M. and I.A. Stegun (ed.): Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, Dover, New York, p.258, 1965.