第 1 版　2018/5/6
第 2 版　2019/7/8
第 3 版　2020/4/3

円筒座標系における Navier の式

野津

1.　はじめに

弾性波動論の支配方程式である Navier の式は直交座標系では次式で与えられる．

$$\rho \ddot{u}_i = \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho b_i \tag{1}$$

ここにρは密度，λとμはラメ定数，u_iは変位，b_iは物体力である．ここでは，水平成層地盤のグリーン関数や円筒構造物の地震応答を論じるための準備として，円筒座標系（**図-1**）における Navier の式を求めることを考える．

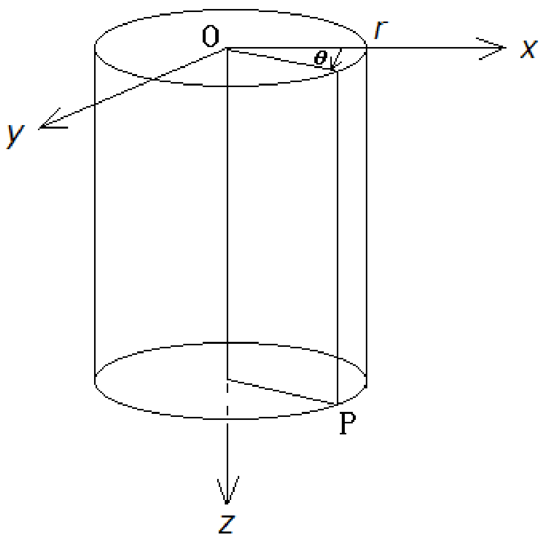

図-1　円筒座標系（任意の点 P の座標を(r, θ, z)の組み合わせで表示）

2.　円筒座標系における発散とラプラシアン

円筒座標系では，**図-1** に示すように，任意の点 P の座標を(r, θ, z)の組み合わせで表示する．
直交座標系と円筒座標系における座標の関係は次式で与えられる．

$$x = r\cos\theta \tag{2}$$
$$y = r\sin\theta \tag{3}$$
$$z = z \tag{4}$$

また，直交座標系と円筒座標系におけるベクトル場$\boldsymbol{u}$の成分の関係は次式で与えられる．

$$u_r = u_x \cos\theta + u_y \sin\theta \tag{5}$$

$$u_\theta = -u_x \sin\theta + u_y \cos\theta \tag{6}$$

$$u_z = u_z \tag{7}$$

ここで，円筒座標系における Navier の式を求めるための準備として，ベクトル場の発散とスカラー場のラプラシアンについて考える．

直交座標系ではベクトル場$\boldsymbol{u}$の発散は次式で与えられる．

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{8}$$

これを円筒座標系に変換するとき，r方向，θ方向，z方向の空間微分を計算して和をとればよいのであるが，単純に(u_r, u_θ)の空間微分を計算してしまうと誤りとなる．実際には，ある点 P(r_0, θ_0, z_0)において発散を計算しようとするとき，**図-2** に示すように角度の固定されたξ座標とη座標をとり，(u_ξ, u_η)の空間微分を計算する必要がある．(u_ξ, u_η)と(u_r, u_θ)は点 P では一致するが点 P の近傍では一致しないため空間微分の計算結果は異なってくる．

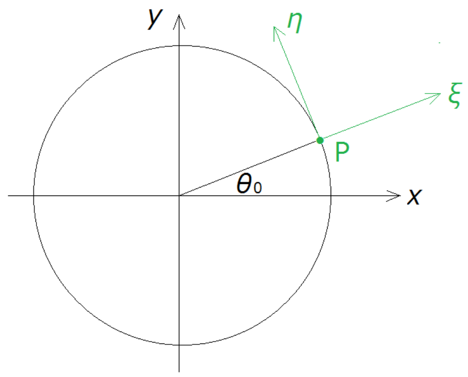

図-2　ξ座標とη座標

(u_ξ, u_η)と(u_r, u_θ)との関係は次式で与えられる．

$$u_\xi = u_r \cos(\theta - \theta_0) - u_\theta \sin(\theta - \theta_0) \tag{9}$$

$$u_\eta = u_r \sin(\theta - \theta_0) + u_\theta \cos(\theta - \theta_0) \tag{10}$$

これを用いると，円筒座標系における発散は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} &= \frac{\partial u_\xi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\eta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial r}\left(u_r \cos(\theta - \theta_0) - u_\theta \sin(\theta - \theta_0)\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(u_r\sin(\theta-\theta_0)+u_\theta\cos(\theta-\theta_0)\right)+\frac{\partial u_z}{\partial z}\\
&=\frac{\partial u_r}{\partial r}\cos(\theta-\theta_0)-\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\sin(\theta-\theta_0)\\
&\quad+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\sin(\theta-\theta_0)+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\cos(\theta-\theta_0)\\
&\quad+\frac{1}{r}u_r\cos(\theta-\theta_0)-\frac{1}{r}u_\theta\sin(\theta-\theta_0)\\
&\quad+\frac{\partial u_z}{\partial z}
\end{aligned}
$$

となり，$\theta\to\theta_0$とすると

$$
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}=\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{11}
$$

となる．

一方，円筒座標系では，任意のスカラー場ϕのラプラシアン$\nabla^2\phi$は次式で与えられる．

$$
\nabla^2\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \tag{12}
$$

これは式(11)において$\boldsymbol{u}=\nabla\phi$であるような特別な場合を考えることにより示すことができる．

なお，円筒座標系におけるベクトル場の回転については，以下の Navier の式の検討では用いないが，利用頻度が高いため**付録**に示す（円筒座標系におけるベクトル場の回転を用いて円筒座標系における Navier の式を求めることもできる）．

3.　円筒座標系における Navier の式

まずr方向の式について考える．式(1)は任意の方向について成立しているので，r方向について考えると，左辺が$\rho\ddot{u}_r$，右辺第 3 項がρb_rとなることは自明であり，また，右辺第 2 項は$(\lambda+\mu)\,\partial(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u})/\partial r$となる．しかしながら，右辺第 1 項を$u_r$のラプラシアン（に$\mu$を乗じたもの）としてしまうのは誤りであり，$u_\xi$のラプラシアンを計算する必要がある．

式(9)(10)を用いると式(1)の右辺第 1 項は

$$
\begin{aligned}
\mu\nabla^2u_\xi&=\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u_\xi\\
&=\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(u_r\cos(\theta-\theta_0)-u_\theta\sin(\theta-\theta_0)\right)
\end{aligned}
$$

$$
= \mu \begin{Bmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) u_r \cos(\theta - \theta_0) \\ -2\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\sin(\theta - \theta_0) - \frac{1}{r^2} u_r \cos(\theta - \theta_0) \\ -\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) u_\theta \sin(\theta - \theta_0) \\ -2\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\cos(\theta - \theta_0) + \frac{1}{r^2} u_\theta \sin(\theta - \theta_0) \end{Bmatrix}
$$

となり，$\theta \to \theta_0$とすると

$$
\mu \nabla^2 u_\xi = \mu \left[\nabla^2 u_r - \frac{1}{r}\left(2\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}\right)\right]
$$

よって，r方向の式は

$$
\rho \ddot{u}_r = \mu \left[\nabla^2 u_r - \frac{1}{r}\left(2\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}\right)\right] + (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} + \rho b_r
$$

となる.

θ方向については，式(1)の右辺第 1 項は

$$
\begin{aligned}
\mu \nabla^2 u_\eta &= \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) u_\xi \\
&= \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \left(u_r \sin(\theta - \theta_0) + u_\theta \cos(\theta - \theta_0)\right) \\
&= \mu \begin{Bmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) u_r \sin(\theta - \theta_0) \\ +2\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\cos(\theta - \theta_0) - \frac{1}{r^2} u_r \sin(\theta - \theta_0) \\ +\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) u_\theta \cos(\theta - \theta_0) \\ -2\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\sin(\theta - \theta_0) - \frac{1}{r^2} u_\theta \cos(\theta - \theta_0) \end{Bmatrix}
\end{aligned}
$$

となり，$\theta \to \theta_0$とすると

$$
\mu \nabla^2 u_\eta = \mu \left[\nabla^2 u_\theta - \frac{1}{r}\left(\frac{u_\theta}{r} - 2\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)\right]
$$

よって，θ方向の式は

$$
\rho \ddot{u}_\theta = \mu \left[\nabla^2 u_\theta - \frac{1}{r}\left(\frac{u_\theta}{r} - 2\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)\right] + (\lambda + \mu)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} + \rho b_\theta
$$

となる.

これらにz方向の式を加えると，円筒座標系における Navier の式は結局次式となる.

$$\rho\ddot{u}_r = \mu\left[\nabla^2 u_r - \frac{1}{r}\left(2\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{u_r}{r}\right)\right] + (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} + \rho b_r \tag{13}$$

$$\rho\ddot{u}_\theta = \mu\left[\nabla^2 u_\theta - \frac{1}{r}\left(\frac{u_\theta}{r} - 2\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right)\right] + (\lambda+\mu)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} + \rho b_\theta \tag{14}$$

$$\rho\ddot{u}_z = \mu\nabla^2 u_z + (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} + \rho b_z \tag{15}$$

ここで変位場の発散$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}$は先に見たとおり次式で与えられる．

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{16}$$

4. 円筒座標系における応力～変位関係

円筒座標系における応力～変位関係もよく用いられるのでここで整理しておく．まず，応力～ひずみ関係は，直交座標系における応力～ひずみ関係より次式で与えられる．

$$\sigma_{rr} = (\lambda+2\mu)\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda\varepsilon_{zz} \tag{17}$$
$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda\varepsilon_{rr} + (\lambda+2\mu)\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda\varepsilon_{zz} \tag{18}$$
$$\sigma_{zz} = \lambda\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\theta\theta} + (\lambda+2\mu)\varepsilon_{zz} \tag{19}$$
$$\sigma_{r\theta} = 2\mu\varepsilon_{r\theta} \tag{20}$$
$$\sigma_{\theta z} = 2\mu\varepsilon_{\theta z} \tag{21}$$
$$\sigma_{rz} = 2\mu\varepsilon_{rz} \tag{22}$$

一方，ひずみ～変位関係については，(u_ξ, u_η)と(u_r, u_θ)との違いに注意しながら微分し$\theta \to \theta_0$とすると

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_\xi}{\partial r} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \tag{23}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\eta}{\partial\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{u_r}{r} \tag{24}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{25}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\xi}{\partial\theta} + \frac{\partial u_\eta}{\partial r}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - \frac{u_\theta}{r}\right) \tag{26}$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\eta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}\right) \tag{27}$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\xi}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) \tag{28}$$

となる．式(23)–(28)を式(17)–(22)に代入すると応力～変位関係として次式が得られる．

$$\sigma_{rr} = (\lambda+2\mu)\frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{u_r}{r}\right) + \lambda\frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{29}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} + (\lambda + 2\mu)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}\right) + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{30}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}\right) + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{31}$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}\right) \tag{32}$$

$$\sigma_{\theta z} = \mu\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\right) \tag{33}$$

$$\sigma_{rz} = \mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) \tag{34}$$

付録　円筒座標系におけるベクトル場の回転

直交座標系ではベクトル場$\boldsymbol{u}$の回転は次式で与えられる．

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \tag{A1}$$

この式は(x, y, z)以外の直交座標系にも適用できるはずなので，直交座標系(ξ, η, z)に適用すると，

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u})_r = (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u})_\xi = \frac{\partial u_z}{\partial \eta} - \frac{\partial u_\eta}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \tag{A2}$$

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u})_\theta = (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u})_\eta = \frac{\partial u_\xi}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial \xi} = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \tag{A3}$$

が得られる．z成分の計算では(u_ξ, u_η)と(u_r, u_θ)との違いに注意しながら微分する必要があり，

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u})_z &= \frac{\partial u_\eta}{\partial \xi} - \frac{\partial u_\xi}{\partial \eta} = \frac{\partial u_\eta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_\xi}{\partial \theta} \\
&= \frac{\partial}{\partial r}\left(u_r \sin(\theta - \theta_0) + u_\theta \cos(\theta - \theta_0)\right) \\
&\quad - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(u_r \cos(\theta - \theta_0) - u_\theta \sin(\theta - \theta_0)\right) \\
&= \frac{\partial u_r}{\partial r}\sin(\theta - \theta_0) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\cos(\theta - \theta_0) \\
&\quad - \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\cos(\theta - \theta_0) - \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\sin(\theta - \theta_0)\right) \\
&\quad + \frac{1}{r}\left(u_r \sin(\theta - \theta_0) + u_\theta \cos(\theta - \theta_0)\right)
\end{aligned}$$

ここで$\theta \to \theta_0$とすると

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u})_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \tag{A4}$$

これらをまとめると，円筒座標系におけるベクトル場の回転は以下の通りとなる．

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u})_r = \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}$$

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u})_\theta = -\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}$$

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u})_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}$$