

## 表面波（その2）Rayleigh波

## 1. はじめに

[その1](#)では弾性波動論に基づいてLove波の伝播速度や深さ方向の振幅分布を計算する方法について述べた。ここではRayleigh波について述べる。Love波の場合には $2 \times 2$ のマトリクスが登場したが、Rayleigh波の場合は $4 \times 4$ のマトリクスが登場し、話はより複雑になる。なお、以下の内容は斜め入射P波・斜め入射SV波に対する水平成層地盤の応答を計算するのにも用いることができる。

## 2. P-SV波動場の支配方程式

弾性波動論における支配方程式（Navierの式）は、物体力（自重など）を無視すると[次式](#)で与えられる。

$$\rho \ddot{u}_i = \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ij} \quad (1)$$

これをフーリエ変換すると次式が得られる。

$$\omega^2 \rho \hat{u}_i + \mu \hat{u}_{i,jj} + (\lambda + \mu) \hat{u}_{j,ij} = 0 \quad (2)$$

以下、P-SV波動場（面内問題）を考えることにする。すなわち、波の進行方向に $x$ 軸、深さ方向 $z$ 軸をとり、変位は $x$ 軸方向または $z$ 軸方向にのみ生じるとする。またあらゆる物理量は $y$ 方向に一樣とする（金太郎あめのような状態を仮定する）。すなわち弾性定数や変位などあらゆる物理量に対し $\partial/\partial y = 0$ とする。

この時の支配方程式は次のようになる。

$$\omega^2 \rho \hat{u}_x + \mu (\hat{u}_{x,xx} + \hat{u}_{x,zz}) + (\lambda + \mu) (\hat{u}_{x,xx} + \hat{u}_{z,xz}) = 0 \quad (3)$$

$$\omega^2 \rho \hat{u}_z + \mu (\hat{u}_{z,xx} + \hat{u}_{z,zz}) + (\lambda + \mu) (\hat{u}_{x,xz} + \hat{u}_{z,zz}) = 0 \quad (4)$$

3. 一般解 (=Rayleigh 波の構成要素)

式(3)(4)の一般解として次のものがある.

◎上昇する P 波 (Upcoming P wave) :

$$\hat{u}_x = kP_u e^{ivz} e^{-ikx} \quad (5)$$

$$\hat{u}_z = -vP_u e^{ivz} e^{-ikx} \quad (6)$$

◎下降する P 波 (Downgoing P wave) :

$$\hat{u}_x = kP_d e^{-ivz} e^{-ikx} \quad (7)$$

$$\hat{u}_z = vP_d e^{-ivz} e^{-ikx} \quad (8)$$

ただし

$$k^2 + v^2 = \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2 \quad (9)$$

である. これらの進行方向と振動方向を図-1 に示す.

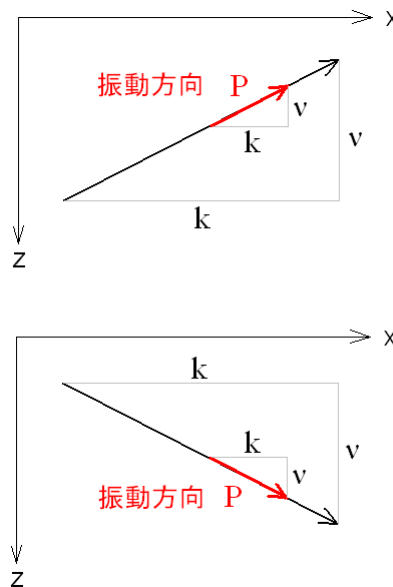


図-1 P 波の進行方向 (→) と振動方向 (→)  
 (上) 上昇波 (下) 下降波

◎上昇する SV 波 (Upcoming SV wave) :

$$\hat{u}_x = \gamma SV_u e^{i\gamma z} e^{-ikx} \quad (10)$$

$$\hat{u}_z = k SV_u e^{i\gamma z} e^{-ikx} \quad (11)$$

◎下降する SV 波 (Downgoing SV wave) :

$$\hat{u}_x = \gamma SV_d e^{-i\gamma z} e^{-ikx} \quad (12)$$

$$\hat{u}_z = -k SV_d e^{-i\gamma z} e^{-ikx} \quad (13)$$

ただし

$$k^2 + \gamma^2 = \left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 \quad (14)$$

である。これらの進行方向と振動方向を図-2 に示す。

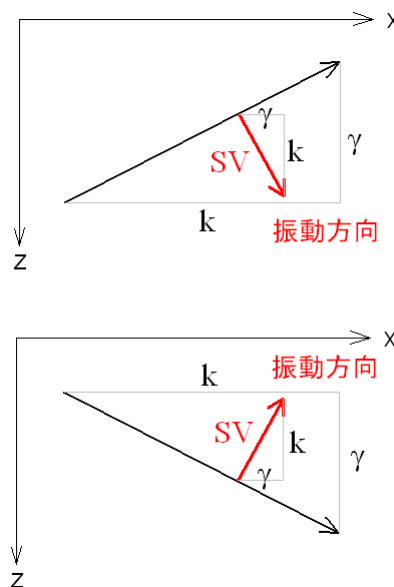


図-2 SV 波の進行方向 (→) と振動方向 (→)  
(上) 上昇波 (下) 下降波

$k$ は「波数の水平成分」または単に「波数」と呼ばれる。 $v$ と $\gamma$ は波数の鉛直成分と呼ばれる。 $P_u, P_d, SV_u, SV_d$ は未定係数である。 $k$ は実数であるが、 $v$ と $\gamma$ は実数の場合と虚数の場合がある。いずれにしても、式(5)–(8)と式(10)–(13)が式(3)(4)の解であることは代入すれば確認できる。

いま、しばらくは $v$ と $\gamma$ が実数である場合を考え、[面外問題の場合](#)と同様に考えると、式(7)(8)の意味するものはベクトル $\vec{k} = (k, v)$ または $(k, -\gamma)$ の方向に速度 $\alpha$ で進む平面波である。また、式(12)(13)の意味するものはベクトル $\vec{k} = (k, \gamma)$ または $(k, -\gamma)$ の方向に速度 $\beta$ で進む平面波である。 $k = 0$ は鉛直方向への伝播を意味する。

$k$ を大きくしていくと、波の進む向きが水平に近くなる。変位の水平成分と鉛直成分の振幅比が式(5)–(8)および式(10)–(13)のようになることは図-1、図-2から理解される。

$k$ を大きくしていくと、式(9)の $\nu$ と式(14)の $\gamma$ は虚数となる（ここで、色々と事情があり、 $\nu$ や $\gamma$ が虚数となる場合には、虚部が負となるようにとる）。式(5)–(14)は $\nu$ や $\gamma$ が虚数の場合にも式(3)(4)の一般解として依然として有効である。面外問題の場合と同様、式(5)–(8)と式(10)–(13)は、 $\nu$ と $\gamma$ が実数のとき homogeneous wave、 $\nu$ と $\gamma$ が虚数のとき inhomogeneous wave と呼ばれる。Inhomogeneous wave は+z方向または-z方向に振幅が指数関数的に増える波である。Inhomogeneous wave は全無限弾性体では存在できない。なぜなら遠方で振幅が無限大となってしまうからである。

#### 4. 水平成層地盤における Rayleigh 波

図-3に示すような水平成層地盤を考える。上昇するP波、下降するP波、上昇するSV波、下降するSV波のそれぞれについて応力を計算すると次式となる。

◎上昇するP波による応力を計算すると

$$\hat{\sigma}_{xz} = 2i\mu k\nu P_u e^{i\nu z} e^{-ikx} \quad (15)$$

$$\hat{\sigma}_{zz} = -i\mu(\gamma^2 - k^2)P_u e^{i\nu z} e^{-ikx} \quad (16)$$

◎下降するP波による応力を計算すると

$$\hat{\sigma}_{xz} = -2i\mu k\nu P_d e^{-i\nu z} e^{-ikx} \quad (17)$$

$$\hat{\sigma}_{zz} = -i\mu(\gamma^2 - k^2)P_d e^{-i\nu z} e^{-ikx} \quad (18)$$

◎上昇するSV波による応力を計算すると

$$\hat{\sigma}_{xz} = i\mu(\gamma^2 - k^2)SV_u e^{i\gamma z} e^{-ikx} \quad (19)$$

$$\hat{\sigma}_{zz} = 2i\mu k\gamma SV_u e^{i\gamma z} e^{-ikx} \quad (20)$$

◎下降するSV波による応力を計算すると

$$\hat{\sigma}_{xz} = -i\mu(\gamma^2 - k^2)SV_d e^{-i\gamma z} e^{-ikx} \quad (21)$$

$$\hat{\sigma}_{zz} = 2i\mu k\gamma SV_d e^{-i\gamma z} e^{-ikx} \quad (22)$$

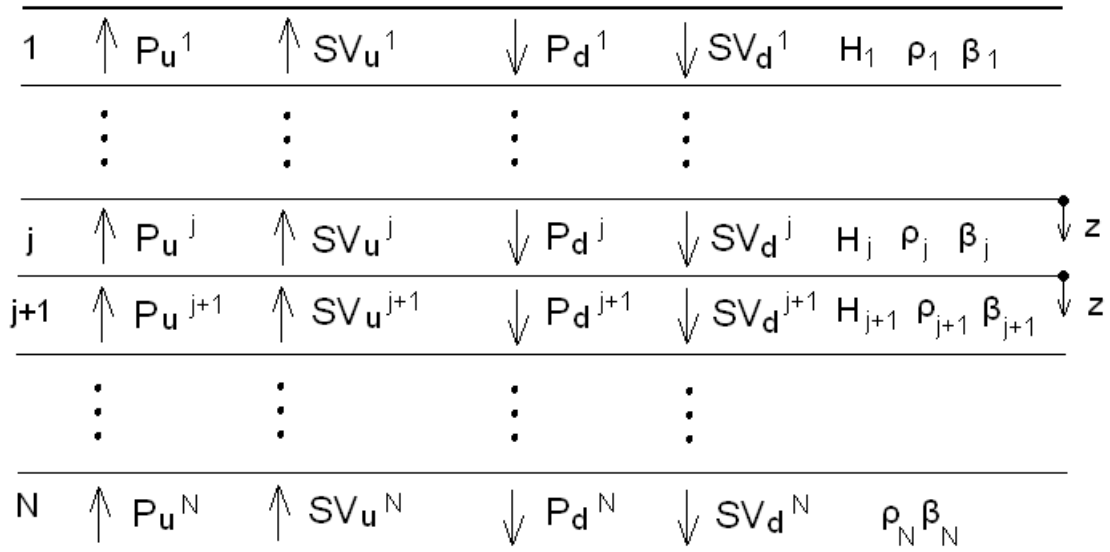


図-3 水平成層地盤

従って、未定係数と変位・応力の関係をマトリクス形式に書くと

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_z \\ \hat{\sigma}_{xz} \\ \hat{\sigma}_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & \gamma & & k & \gamma \\ -\nu & k & & \nu & -k \\ 2i\mu k\nu & i\mu(\gamma^2 - k^2) & -2i\mu k\nu & -i\mu(\gamma^2 - k^2) \\ -i\mu(\gamma^2 - k^2) & 2i\mu k\gamma & -i\mu(\gamma^2 - k^2) & 2i\mu k\gamma \end{pmatrix} \\
 \times \begin{pmatrix} e^{i\nu z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\gamma z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\nu z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\gamma z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_u \\ SV_u \\ P_d \\ SV_d \end{pmatrix} e^{-ikx} \quad (23)$$

ここで、第j層と第j+1層の間では変位と応力が連続でなければならないことを考慮し、さらに簡単のために

$$E = \begin{pmatrix} k & \gamma & & k & \gamma \\ -\nu & k & & \nu & -k \\ 2i\mu k\nu & i\mu(\gamma^2 - k^2) & -2i\mu k\nu & -i\mu(\gamma^2 - k^2) \\ -i\mu(\gamma^2 - k^2) & 2i\mu k\gamma & -i\mu(\gamma^2 - k^2) & 2i\mu k\gamma \end{pmatrix} \\
 \Lambda = \begin{pmatrix} e^{i\nu H} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\gamma H} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\nu H} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\gamma H} \end{pmatrix}$$

と書くことにすると、

$$E_{j+1} \begin{pmatrix} P_u^{j+1} \\ SV_u^{j+1} \\ P_d^{j+1} \\ SV_d^{j+1} \end{pmatrix} e^{-ikx} = E_j \Lambda_j \begin{pmatrix} P_u^j \\ SV_u^j \\ P_d^j \\ SV_d^j \end{pmatrix} e^{-ikx} \quad (24)$$

よって

$$\begin{pmatrix} P_u^{j+1} \\ SV_u^{j+1} \\ P_d^{j+1} \\ SV_d^{j+1} \end{pmatrix} = E_{j+1}^{-1} E_j \Lambda_j \begin{pmatrix} P_u^j \\ SV_u^j \\ P_d^j \\ SV_d^j \end{pmatrix} \quad (25)$$

である．ここでは各層の物性を区別するために添え字を用いた．SH 波動場の問題では，第 $j$ 層の SH 波の振幅と第 $j+1$ 層の SH 波の振幅が  $2 \times 2$  のマトリクスで結ばれたが，P-SV 波動場の問題では，第 $j$ 層の P 波と SV 波の振幅と第 $j+1$ 層の P 波と SV 波の振幅が  $4 \times 4$  のマトリクスで結ばれる．式(25)で $k=0$ とすれば SHAKE 等で用いられている [鉛直入射の重複反射を表すマトリクス](#)が得られる．

式(25)を繰り返し用いると，

$$\begin{pmatrix} P_u^N \\ SV_u^N \\ P_d^N \\ SV_d^N \end{pmatrix} = (E_N^{-1} E_{N-1} \Lambda_{N-1}) (E_{N-1}^{-1} E_{N-2} \Lambda_{N-2}) \dots (E_2^{-1} E_1 \Lambda_1) \begin{pmatrix} P_u^1 \\ SV_u^1 \\ P_d^1 \\ SV_d^1 \end{pmatrix} \quad (26)$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} P_u^N \\ SV_u^N \\ P_d^N \\ SV_d^N \end{pmatrix} = (E_N^{-1} E_{N-1} \Lambda_{N-1}) (E_{N-1}^{-1} E_{N-2} \Lambda_{N-2}) \dots (E_2^{-1} E_1 \Lambda_1) E_1^{-1} \begin{pmatrix} \hat{u}_x(0) \\ \hat{u}_z(0) \\ \hat{\sigma}_{xz}(0) \\ \hat{\sigma}_{zz}(0) \end{pmatrix} e^{ikx} \quad (27)$$

である．ここで第 $N$ 層は基盤である．また， $\hat{u}_x(0)$ と $\hat{u}_z(0)$ は地表面における変位（のフーリエ変換）， $\hat{\sigma}_{xz}(0)$ と $\hat{\sigma}_{zz}(0)$ は地表面における応力（のフーリエ変換）である．ここで

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix} = (E_N^{-1} E_{N-1} \Lambda_{N-1}) (E_{N-1}^{-1} E_{N-2} \Lambda_{N-2}) \dots (E_2^{-1} E_1 \Lambda_1) E_1^{-1}$$

と書くことにすると

$$\begin{pmatrix} P_u^N \\ SV_u^N \\ P_d^N \\ SV_d^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_x(0) \\ \hat{u}_z(0) \\ \hat{\sigma}_{xz}(0) \\ \hat{\sigma}_{zz}(0) \end{pmatrix} e^{ikx} \quad (28)$$

である。ここで、いま、

$$\begin{pmatrix} P_u^N \\ SV_u^N \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (29)$$

という条件を課すことにする。これは、基盤で上昇波が存在しないという条件、または、深さ方向に指数関数的に振幅が増える波は存在しないという条件に対応する。また、地表面での境界条件として

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{xz}(0) \\ \hat{\sigma}_{zz}(0) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (30)$$

であることが必要である。これらを考慮すると、

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_x(0) \\ \hat{u}_z(0) \end{pmatrix} \quad (31)$$

であり、非自明解が存在するためには、行列式の値が

$$\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (32)$$

でなければならない。行列式の値は $(\omega, k)$ の設定により変化する。通常、与えられた $\omega$ に対し、式(32)を満足するような $k$ を一つまたは複数見つけることができる。これらの $(\omega, k)$ の組み合わせに対しては、基盤からのエネルギーの供給が無くても、波は $x$ 方向への伝播を続けることができる。これが **Rayleigh 波**である。

与えられた $\omega$ に対し、式(32)を満足する $k$ が複数存在するとき、 $k$ の大きいもの ( $c$ の小さいもの) から順に、基本モード、1次の高次モード、2次の高次モード....という。

## 5. 半無限地盤における Rayleigh 波

半無限地盤の場合について Rayleigh 波の性質を少し調べてみる。この場合、非自明解が存在するための条件から次式が導かれる。

$$R(1/c) \equiv \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{2}{c^2}\right)^2 - \frac{4}{c^2} \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\alpha^2}} \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\beta^2}} = 0 \quad (33)$$

この左辺は Rayleigh function と呼ばれる (Aki and Richards<sup>1)</sup>の式 (5.56)。式(33)は  $0 < c < \beta$  の範囲に一つの解を持つ (付録参照)。ポアソン固体 ( $\alpha = \sqrt{3}\beta$ ) の場合は  $c = 0.9194\beta$  である。

Love 波は半無限地盤を伝播することができないが、Rayleigh は Love 波と異なり半無限地盤を伝播することができる。これは、二つの inhomogeneous wave (P 波に関するものと SV 波に関するもの) の組み合わせにより地表で応力=0 の条件を満足することができるからである。

Rayleigh 波の粒子軌跡が prograde となるか retrograde となるかは地盤条件に依存するが、半無限地盤の場合、 $u_z$  は  $u_x$  に対し位相が  $90^\circ$  進んでおり、prograde でなく retrograde である。また、半無限地盤の場合、Rayleigh 波の伝播速度は  $\omega$  に依存しない (すなわち分散性を有していない)。

半無限地盤の場合の Rayleigh 波は特殊であり、Rayleigh の典型例として示すにはあまり適していないようである。例えば、半無限地盤の場合の Rayleigh 波は分散性を有していないが、表層が存在する場合の Rayleigh 波は分散性を有している。

## 6. 海の波と Rayleigh 波・Love 波の比較

地表付近を水平に進む Rayleigh 波・Love 波と海の波は似ているように見えるが表-1 に示すような違いがある。海の波は浅いところに集まりやすいが Rayleigh 波・Love 波は深いところに集まりやすい。

表-1 海の波と Rayleigh 波, Love 波の比較

	海の波	Rayleigh波, Love波
主要な復元力	重力 (重力がなければ伝播しない)	弾性体内部の応力 (無重力状態でも伝播する)
表面での境界条件	$P = \rho g w$	$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$
体積ひずみ	無し	Rayleigh波はあり Love波はなし
分散性	有り	有り (半無限のRayleigh波はなし)
伝播速度	浅いほど遅い。 従って波は浅いところに集まる。	深いほど遅い。 従って波は深いところに集まる。深いところは長時間揺れる。

### 参考文献

- 1) Aki, K. and P.G. Richards: Quantitative Seismology, Second Edition, University Science Books, Sausalito, California, 2002.



付録 本文の式(33)が $0 < c < \beta$ の範囲に一つの解を持つことについて

これは次のように確認できる.

$$A \equiv \frac{1}{\alpha^2} \quad (\text{A1})$$

$$B \equiv \frac{1}{\beta^2} \quad (\text{A2})$$

$$C \equiv \frac{1}{c^2} \quad (\text{A3})$$

とおけば式(33)は

$$f(C) \equiv 16(B - A)C^3 - 8B(3B - 2A)C^2 + 8B^3C - B^4 = 0 \quad (\text{A4})$$

のような $C$ に関する3次方程式となる. 式(33)の解である $c$ は $c < \beta$ を満たさなければならないので, ここでは $B < C$ の範囲で $f(C) = 0$ の解を求めることになる.  $C^3$ の項の係数は正であるから $f(C)$ は $C \rightarrow \infty$ で $\infty$ となるような3次関数である. また $f(C)$ の微分は

$$f'(C) \equiv 48(B - A)C^2 - 16B(3B - 2A)C + 8B^3 \quad (\text{A5})$$

であり,  $f'(C) = 0$ の判別式は

$$D \equiv 768B^2 \left( (B - A)^2 + \frac{1}{3}A^2 \right) > 0 \quad (\text{A6})$$

であるから,  $f(C)$ は極大・極小値をもつ3次関数である. また変曲点の $C$ 座標は

$$C_i \equiv \frac{B(3B-2A)}{6(B-A)} \quad (\text{A7})$$

である. ここで $C_i$ と $B$ の大小関係を比較する. 不等式を同値変形していくと

$$\begin{aligned} C_i &< B \\ \Leftrightarrow \frac{3B-2A}{6(B-A)} &< 1 \\ \Leftrightarrow 4A &< 3B \\ \Leftrightarrow \frac{4}{\alpha^2} &< \frac{3}{\beta^2} \\ \Leftrightarrow 0 &< 3\lambda + 2\mu \end{aligned}$$

であり, この最後の式は必ず成立するので $B$ は変曲点より右側にあることになる. また $C = B$ における $f(C)$ の値を計算すると $-B^4$ となり負である. 以上の情報を組み合わせると, 式(A4)は $B < C$ の範囲に一つの解を持つことがわかる. また, それに対応して, 式(33)は $0 < c < \beta$ の範囲に一つの解を持つことがわかる.