

重複反射理論・2E波・粘性境界

1. はじめに

図-1のような水平成層地盤に対して地震波が鉛直下方から入射する場合を考える。入射する地震波としてはS波を考え、かつ、平面波（波の進行方向に垂直な平面内で変位が一様であるような波）を考える。このとき地震波は地層境界で透過・反射を繰り返し、その結果として地盤の応答が決まる。この場合の地盤の応答は、以下に述べる重複反射理論と呼ばれる方法で計算できる。SHAKE¹⁾、FDEL²⁾、DYNEQ³⁾など多くの地震応答計算プログラムが重複反射理論に基づいている。

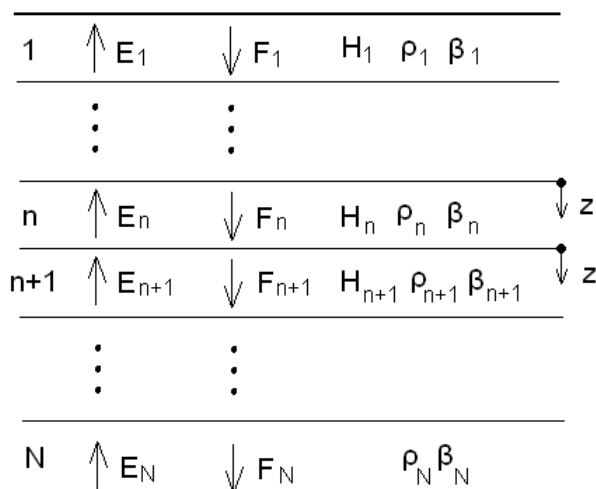


図-1 水平成層地盤を鉛直方向に伝播する地震波

一般に震源を越えた地震波は[スネルの法則](#)に従って屈折を繰り返し、地表に近づくほど波線は鉛直に近づく。仮に地震基盤（S波速度3000m/s）で入射角が90度でも、工学的基盤（S波速度300m/s）まで地震波が上昇してくる間にはほとんど伝播方向は鉛直になっている。従って、工学的基盤より上方の表層地盤のみをモデル化して地震応答解析を行う場合は、鉛直下方からの入射を仮定することは妥当であると考えられる。すなわち、以下に述べる計算方法は、工学的基盤より上方の表層地盤に対してより適用性が高いと考えられる。ただし、本稿は手法の説明を目的としていることから、以下においては工学的基盤と地震基盤を区別せず、図-1の第N層を単に「基盤」という。

ここでは、最も簡単な場合として、応力～ひずみ関係が線形で、かつ、非減衰の場合を考える。減衰がある場合の取り扱いについては別な所で説明する。

2. 支配方程式

水平成層地盤の第n層の層厚を H_n 、密度を ρ_n 、せん断剛性を G_n 、S波速度を β_n とする。また鉛直下向きにz軸をとり、各層の上端で $z=0$ とする。

水平成層地盤の応答を計算するために考慮すべき式としては、運動方程式、応力～ひずみ関係式、ひずみ～変位関係式がある。これらは、[弾性波動論の基礎](#)の式(1)(3)(4)(32)(34)より次の通り求まる。

運動方程式：

$$\rho_n \ddot{u} = \frac{\partial \tau}{\partial z} \quad (1)$$

応力～ひずみ関係式：

$$\tau = G_n \gamma \quad (2)$$

ひずみ～変位関係式：

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3)$$

ここに u は変位， τ はせん断応力， γ はせん断ひずみである．これらを連立すると

$$\rho_n \ddot{u} = G_n \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (4)$$

が得られる．これが解くべき支配方程式である．

3. 一般解

[弾性波動論の基礎](#)の式(47)より

$$\beta_n = \sqrt{\frac{G_n}{\rho_n}} \quad (5)$$

であり，これを式(4)に代入すると

$$\ddot{u} = \beta_n^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (6)$$

が得られ，両辺のフーリエ変換をとると

$$-\omega^2 \hat{u} = \beta_n^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z^2} \quad (7)$$

が得られる．ここで

$$k_n = \omega / \beta_n \quad (8)$$

と置くと

$$k_n^2 \hat{u} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z^2} = 0 \quad (9)$$

となる．この一般解は

$$\hat{u} = E_n e^{ik_n z} + F_n e^{-ik_n z} \quad (10)$$

で与えられる。式(10)の右辺第一項は上昇波を表し、右辺第二項は下降波を表す。式(10)の右辺第一項が上昇波を表すことは、[フーリエ変換の定義](#)と関係している。式(10)の右辺第一項をフーリエ逆変換して変位を求めるとき、

$$e^{ik_n z} e^{i\omega t} = e^{i(\omega t + k_n z)} \quad (11)$$

のような形が表れる。この()内に着目すると、 t が Δt だけ増えたとき、 z が $\beta_n \Delta t$ だけ減れば、()内の数字は変わらない。すなわち、ある時刻 t における深さ z における変位の値が、時刻 $t + \Delta t$ には深さ $z - \beta_n \Delta t$ に表れる。よって、式(10)の右辺第一項は速度 β_n で上昇する波を表す。同様に右辺第二項が速度 β_n で下降する波を表すことも確認できる。 E_n と F_n はそれぞれ周波数領域における上昇波と下降波の振幅である。これらは重複反射の影響を含む振幅である。

式(10)は変位のフーリエ変換であるが、いずれせん断応力のフーリエ変換が必要になるので、それを求めておく。式(2)(3)を連立し、両辺のフーリエ変換をとると、

$$\hat{\tau} = G_n \frac{\partial \hat{u}}{\partial z} \quad (12)$$

が得られ、これに式(10)を代入することにより、せん断応力のフーリエ変換は

$$\hat{\tau} = ik_n G_n (E_n e^{ik_n z} - F_n e^{-ik_n z}) \quad (13)$$

と求まる。

4. 地層境界での変位と応力の連続条件

式(10)の E_n や F_n は未定係数であり、全部で $2N$ 個の未定係数が存在する。これらを決めるためには $2N$ 個の条件が必要である。ここで考慮すべき条件として、

- ・地層境界における変位の連続条件... $N - 1$ 個
- ・地層境界におけるせん断応力の連続条件... $N - 1$ 個
- ・地表においてせん断応力がゼロであるとの条件... 1個

があり、これらを併せると $2N - 1$ 個の条件が存在していることになる。残る1個の条件として通常は基盤における上昇波の振幅を与える。

ここで、第 n 層の下端と第 $n + 1$ 層の上端での変位とせん断応力は表-1のようになっている。

表-1 第 n 層の下端と第 $n + 1$ 層の上端での変位とせん断応力

	変位	せん断応力
第 n 層の下端 $z = H_n$	$E_n e^{ik_n H_n} + F_n e^{-ik_n H_n}$	$ik_n G_n (E_n e^{ik_n H_n} - F_n e^{-ik_n H_n})$
第 $n + 1$ 層の上端 $z = 0$	$E_{n+1} + F_{n+1}$	$ik_{n+1} G_{n+1} (E_{n+1} - F_{n+1})$

よって、地層境界での連続条件は次の式で表される。

$$\begin{pmatrix} E_{n+1} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + R_n)W_n & (1 - R_n)W_n^{-1} \\ (1 - R_n)W_n & (1 + R_n)W_n^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n \\ F_n \end{pmatrix} \quad (14)$$

ここに

$$W_n \equiv e^{ik_n H_n}, \quad R_n \equiv \frac{k_n G_n}{k_{n+1} G_{n+1}} = \frac{\rho_n \beta_n}{\rho_{n+1} \beta_{n+1}} \quad (15)$$

である。また地表におけるせん断応力がゼロであるための条件は次式で与えられる。

$$E_1 = F_1 \quad (16)$$

さらに、通常は、基盤における上昇波の振幅が次式のように与えられる。

$$E_N = \bar{E}_N \quad (17)$$

ここに右辺は既知の値を表す。

式(14)(16)(17)を連立して解けば未定係数はすべて求まる。すなわち、水平成層地盤の応答が求まる。

5. 2E 波とは何か？

もしも基盤の上に何も地盤が載っていない場合、式(16)を基盤に対して適用すると、基盤の表面で観測される地震動は $2E_N$ となる。すなわち入射波の2倍である。このことを「基盤における2E波」もしくは「露頭基盤波」と呼んでいる。地震応答解析では、基盤における入射波（E）を指定する代わりに、2E波を指定することが一般的である。

6. 地中での観測波はE+F波

もしも第 n 層の上面に地震計を置いて観測すれば、そこで観測される地震動は $E_N + F_N$ である。つまり、地中で観測された地震動には上昇波と下降波の影響が含まれている。重複反射理論による水平成層地盤の地震応答解析では、原理的には、2E波の代わりに地中で観測された地震波（E+F波）を入力することもできる。しかし、減衰がよほど大きい場合を除けば、E+F入力による地震応答解析は避けることが望ましい。その理由は後述する。

7. E+F入力と2E入力の違い

重複反射理論を実際に運用する上で、E+F入力と2E入力の違いを理解しておくことはたいへん重要である。そこで、ここでは簡単な2層地盤を考え、入力方法の違いによる影響を調べる。

先に述べたように、もしも表層がなく基盤が露頭している状況であれば、境界条件により、地表で観測される地震波の振幅は $2E_2$ となる。すなわち、下方から同じ地震波が入射した場合の表層の影響による増幅率としては2E波の振幅比すなわち $|2E_1/2E_2|$ を見ればよいことになる。これは式(14)より

$$\left| \frac{2E_1}{2E_2} \right| = \left| \frac{1}{\cos kH + iR \sin kH} \right| \quad (18)$$

で与えられる。ここに $k = \omega/\beta_1$, $R = (\rho_1\beta_1)/(\rho_2\beta_2)$ である。式(18)右辺の分母は、複素平面上では、図-2に示すように ω とともに楕円上を動く。したがって、2E波の振幅比は周期的に変化し、最大値は $1/R$ 、最小値は1である。これを ω/ω_0 に対してプロットすると図-3の実線となる。ここに $\omega_0 = \pi\beta_1/(2H)$ である。

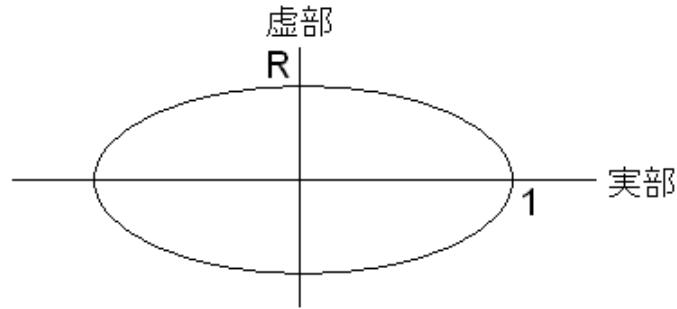


図-2 複素平面上での式(18)右辺分母の軌跡

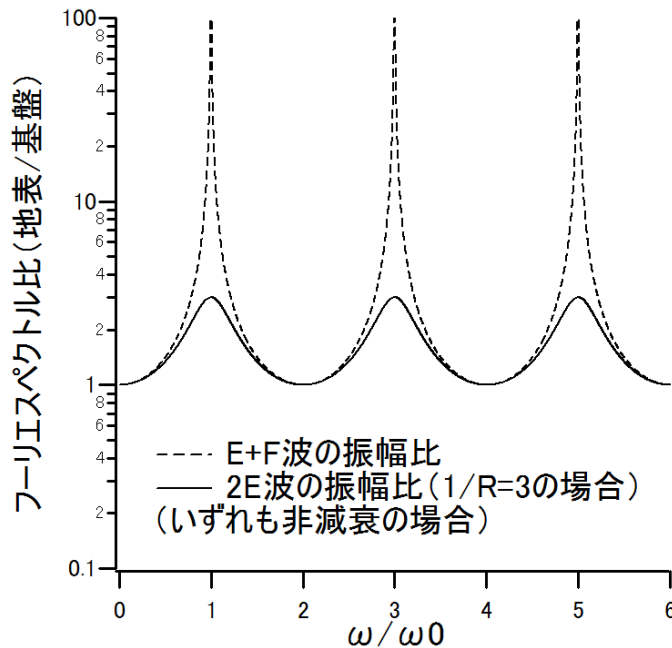


図-3 E+F波と2E波の振幅比 (地表/基盤)

2E波の振幅比の最大値がインピーダンス比 R で決まるといふ点はいま仮に表層のS波速度を 100m/s とすると、S波速度 300m/s の工学的基盤から地表までの増幅は高々3倍程度である。しかしS波速度 3000m/s の地震基盤から地表までは30倍程度の増幅となり得る。2E波の振幅比が最大となる周波数は以下に示す f_0 の奇数倍で与えられる。これは $1/4$ 波長則と言われる。

$$f_0 = \frac{\beta_1}{4H} \quad (19)$$

一方, E+F 波の振幅比は

$$\left| \frac{E_1+F_1}{E_2+F_2} \right| = \left| \frac{1}{\cos kH} \right| \quad (20)$$

と表すことができ, 非減衰の場合, f_0 の奇数倍の周波数 (固有周波数) において無限大となる (図-3 の破線). 実線とは大きな違いがあるが, これを「増幅率」と呼ぶことは憚られる. なぜなら, 単に当該周波数において上昇波と下降波の干渉により分母がゼロとなる影響が表れているだけだからである (※). 極端な場合として第 1 層と第 2 層の物性が全く同じでも同じスペクトル比が得られることを考えれば, E+F 波の振幅比を「増幅率」と呼ぶことが適切でないことがわかるだろう.

地震応答解析において E+F 入力をする場合, 図-3 の破線のようなスペクトル比を乗じているのだということを常に意識する必要がある (減衰がある場合にはスペクトル比は多少緩和されるが...). その時に入力する地震波は固有周波数においてゼロに近い値を持っていないから, 固有周波数の影響が過大に表れた非現実的な応答解析結果が得られやすい. また, 入力地震波が固有周波数においてゼロに近い値を持っていたとしても, 地震応答解析では当該周波数において $0 \times \infty$ のような計算を行うことになるので, 意味のない計算結果が得られやすい. 従って, 減衰がよほど大きい場合を除けば, E+F 入力による地震応答解析は避けることが望ましい.

(※) このことは, 地中に地震計を設置した場合, f_0 の奇数倍に相当する周波数成分は観測できないことを意味する. 地中への地震計の設置は, 地表の地震計と組み合わせた場合にはたいへん有効であるが, 1 箇所だけ設置する場合は, 地中への設置はお勧めできない.

8. 有限要素解析および模型振動実験における地震波の入力

有限要素解析の場合, 2E 入力は下方粘性境界により実現できる⁴⁾. これは, 図-4 に示す状況 A (現実の状況) と状況 B (仮想的な状況) で地盤の下端における境界条件は同じであることを利用するものである.

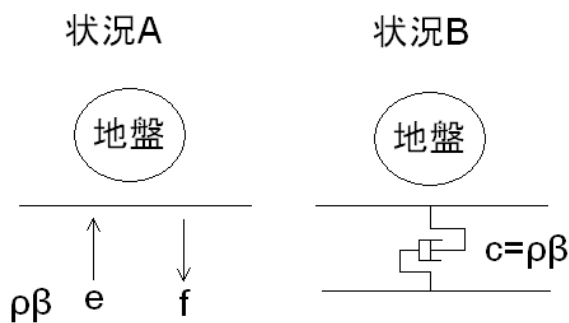


図-4 下方粘性境界

水平成層地盤に鉛直下方から S 波が入射する場合を考え, 反射波も鉛直下方に帰っていくものとする (図-4 の状況 A). このとき, 基盤における変位 $u(t, z)$ は次式のように表すことができる.

$$u(t, z) = e \left(t + \frac{z}{\beta} \right) + f \left(t - \frac{z}{\beta} \right) \quad (21)$$

ここに z は鉛直下向きにとった座標（基盤面で $z = 0$ とする）， $e(t)$ は上昇波， $f(t)$ は下降波， β は基盤の S 波速度である．式(21)の両辺を t で微分し $z = 0$ とおくと

$$\dot{u}(t, 0) = \dot{e}(t) + \dot{f}(t) \quad (22)$$

となる．また，式(21)の両辺を z で微分し，両辺に基盤のせん断剛性 $G = \rho\beta^2$ を乗じ（ ρ は基盤の密度）， $z = 0$ とおくと

$$\tau(t, 0) = \rho\beta\{\dot{e}(t) - \dot{f}(t)\} \quad (23)$$

となる．ここに $\tau(t, z)$ は基盤におけるせん断応力である．式(22)(23)から $\dot{f}(t)$ を消去すると，地盤の下端における速度 $\dot{u}(t, 0)$ とせん断応力 $\tau(t, 0)$ の関係式として

$$\tau(t, 0) = \rho\beta\{2\dot{e}(t) - \dot{u}(t, 0)\} \quad (24)$$

が得られる．

一方，速度 $2\dot{e}(t)$ で運動する仮想的な基盤と地盤とがダッシュポット（定数 $\rho\beta$ ）で結ばれている仮想的な状況（図-4 の状況 B）を考えると，地盤の下端における速度 $\dot{u}(t, 0)$ とせん断応力 $\tau(t, 0)$ の関係式はやはり式(24)で与えられる．

よって，図-4 の状況 A と状況 B は等価であるため，下方粘性境界により 2E 入力可以实现できる．

なお，模型振動実験は基本的には全て E+F 入力であるから，実物よりも地盤の固有周波数の影響が強調された結果となりやすい．このことを，実験結果の解釈において意識しておく必要がある．こうした実物との違いについては解析で補う必要があると考えられる．

参考文献

- 1) Shnabel, P.B., J. Lysmer and H.B. Seed: SHAKE, A computer program for earthquake response analysis of horizontally layered sites, Report No. EERC72-12, University of California at Berkeley, 1972
- 2) 杉戸真太, 合田尚義, 増田民夫: 周波数依存性を考慮した等価ひずみによる地盤の地震応答解析法に関する一考察, 土木学会論文集 493/II-27, pp.49~58, 1994 年.
- 3) 吉田望, 末富岩雄: DYNEQ: 等価線形法に基づく水平成層地盤の地震応答解析プログラム, 佐藤工業(株) 技術研究所報, pp.61~70, 1996 年.
- 4) 土岐憲三: 構造物の耐震解析, 新体系土木工学 11, 技報堂出版, 1981 年.