

Phinney の方法

野津

1. はじめに

任意の時刻歴波形 $f(t)$ に対し、一般的には、フーリエ変換は式(1)で、フーリエ逆変換は式(2)で定義される。

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (2)$$

しかし、地震工学の分野では、断層近傍で観測される永久変位を含む地動変位波形、あるいは非減衰 1 自由度系の応答変位波形のように、 $t = \infty$ で $f(t) = 0$ とならない波形も登場する。こうした波形については、式(1)の広義積分でフーリエ変換を定義することには無理がある。このような問題に対して、数学的困難さを伴わずに対処できる方法として、角周波数 $\omega$ に虚部を導入する方法が Phinney<sup>1)</sup>により提案されている。本稿ではこの方法を Phinney の方法と呼ぶ。Phinney の方法はこれまで[水平成層構造のグリーン関数の計算](#)などに適用されてきているが、より広範な問題に適用可能である。以下、Phinney の方法の説明と利用例の紹介を行う。

2. Phinney の方法

角周波数 $\omega$ への虚部の導入は次のように行う。任意の時刻歴波形 $f(t)$ に、時間とともに減少する項 $e^{-\lambda t}$ をかけた関数 $f(t)e^{-\lambda t}$ のフーリエ変換を $\hat{f}_\lambda(\omega)$ とすると、式(1)(2)より次式が成立する。

$$\hat{f}_\lambda(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (f(t)e^{-\lambda t})e^{-i\omega t} dt \quad (3)$$

$$f(t)e^{-\lambda t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_\lambda(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (4)$$

ここに $\lambda$ は正の定数とする。ここでは、 $f(t)$ に $e^{-\lambda t}$ をかけることにより、無理なくフーリエ変換できる関数となっている点がポイントである。ここで

$$\omega_c = \omega - \lambda i \quad (5)$$

とおくと、式(3)より次式が成立する。

$$\hat{f}_\lambda(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega_c t} dt \quad (6)$$

この右辺は、フーリエ変換の定義式(1)において $\omega$ を $\omega_c$ に置き換えたものに他ならない。すなわち

$$\hat{f}_\lambda(\omega) = \hat{f}(\omega_c) \quad (7)$$

である。式(7)を式(4)に代入すると次式を得る。

$$f(t) = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega_c) e^{i\omega_c t} d\omega \right) e^{\lambda t} \quad (8)$$

以上をまとめると

$$\hat{f}(\omega_c) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega_c t} dt \quad (9)$$

$$f(t) = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega_c) e^{i\omega_c t} d\omega \right) e^{\lambda t} \quad (10)$$

となる。これが周波数に虚部を含む場合の新しいフーリエ変換対である (図-1)。すなわち  $\hat{f}(\omega)$  に式(2)を適用して  $f(t)$  を求める代わりに  $\hat{f}(\omega_c)$  に式(10)を適用して  $f(t)$  を求めることができる。フーリエ変換を式(1)で定義している関係上、周波数に導入する虚部は負でなければならない。

$$\begin{array}{ccc}
 e^{-\lambda t} \text{を乗じる} & & \text{フーリエ変換} \\
 f(t) & \xrightarrow{\quad} & f(t)e^{-\lambda t} & \xrightarrow{\quad} & \hat{f}(\omega_c) \\
 & \xleftarrow{\quad} & & \xleftarrow{\quad} & \\
 e^{\lambda t} \text{を乗じる} & & \text{フーリエ逆変換}
 \end{array}$$

図-1 Phinney の方法における諸関数の関係

なお、Phinney の方法の利用にあたり、FORTRAN の倍精度計算を前提とすると、 $\lambda = 2\pi/T$ 程度とするのが良い。ここに  $T$  は [離散フーリエ変換](#) に用いるデータ長である。また、最終段階で  $e^{\lambda t}$  を乗じる関係上、波形の後半にはノイズが乗るので、あらかじめ必要なデータ長の 2 倍のデータ長で計算しておき、後半を棄却するのがよい。

### 3. Phinney の方法の利用例 (その 1) 永久変位を含む変位波形の計算

Phinney の方法の利用例の一つとして速度波形  $v(t)$  をもとに永久変位を含む変位波形  $u(t)$  を求める問題をとりあげる。このとき、 $v(t)$  のフーリエ変換  $\hat{v}(\omega_c)$  と  $u(t)$  のフーリエ変換  $\hat{u}(\omega_c)$  との間には、[周波数が実数である場合](#)と同様、

$$\hat{u}(\omega_c) = \hat{v}(\omega_c) / (i\omega_c) \quad (11)$$

なる関係が成立する。しかも、 $\omega = 0$  のときでも  $\omega_c = 0$  とはならないので、式(11)において周波数がゼロの場合を別扱いする必要がない。この点も Phinney の方法のスマートな点である。

関連する数値例を 2 例示す。一つ目は、基本的なケースとして、デルタ関数  $\delta(t - t_0)$  を積分して単位ステップ関数を得る事例である。ここに  $t_0 = 1s$  とする。デルタ関数をサンプリング間隔  $\Delta t = 0.01s$ 、データ長  $T = 10.24s$  の離散的なデータで表現し、 $1s$  に相当する 101 個目のデータの値を  $1/\Delta t$  とした。 $\lambda$  は  $2\pi/T$  とした。図-2 に結果を示す。灰色の線が正解である。Phinney の方法による結果は波形の終端部にノイズがある。これは先に述べたように最終段階で  $e^{\lambda t}$  を乗じるためである。そこで、上述の通り計算結果の後半を棄却し前半を成果とする。なお、Phinney の方法による結果は立ち上がり部にもわずかにノイズが見られる。これはナイキスト周波数である 50Hz 以上の成分を考慮できていないためである。

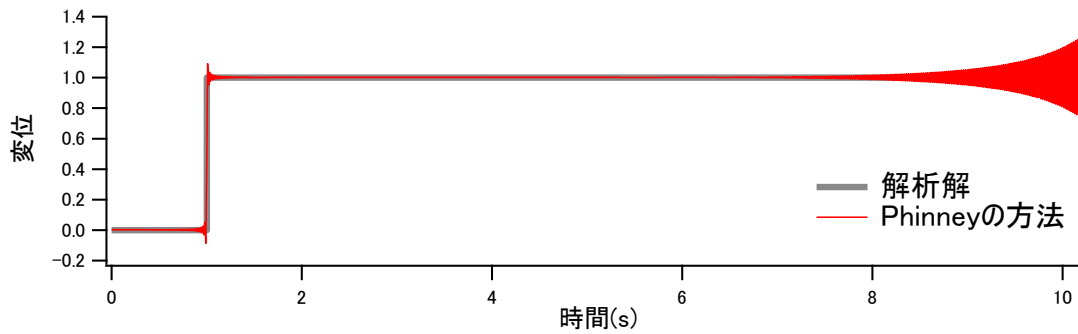


図-2 デルタ関数を積分して単位ステップ関数を求めた結果

二つ目は、2016年熊本地震の本震の際に西原村小森で得られた強震記録への適用事例である。対象とするのはEW成分である。この記録をそのまま積分するのではなく、まず加速度波形を時間領域で一回積分して60s分の速度波形を求め、これより1次関数を差し引いたものを出発点とした。差し引いた1次関数は

$$v(t) = 40.52 - 1.458 t \quad (t > 27.79s) \quad (12)$$

である。1次関数を差し引いた後の60s分の速度波形を図-3に示す。この波形をもとにPhinneyの方法で変位波形を計算し、時間領域における積分結果と比較した。サンプリング間隔は $\Delta t = 0.01s$ である。最終的に60sの変位波形を得ることを目標とし、離散フーリエ変換に用いるデータ長は余裕をみて $T = 163.84s$ とした(図-3の波形に後続のゼロを追加し163.84sとした)。 $\lambda$ は $2\pi/T$ とした。図-4に結果を示す。灰色の線が時間領域における積分結果である。Phinneyの方法による結果は時間領域における積分結果とほぼ一致している。したがって、速度波形を積分して永久変位を含む変位波形を求める際にPhinneyの方法は有効であると言える。

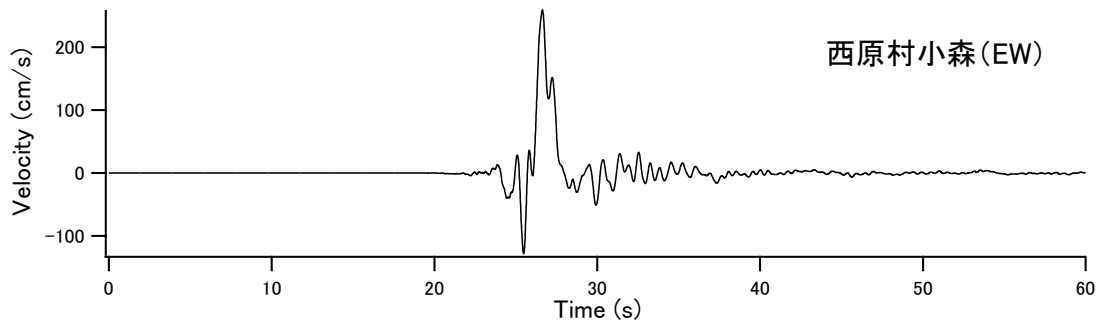


図-3 1次関数を差し引いた後の速度波形 (これをもとに積分を行った)

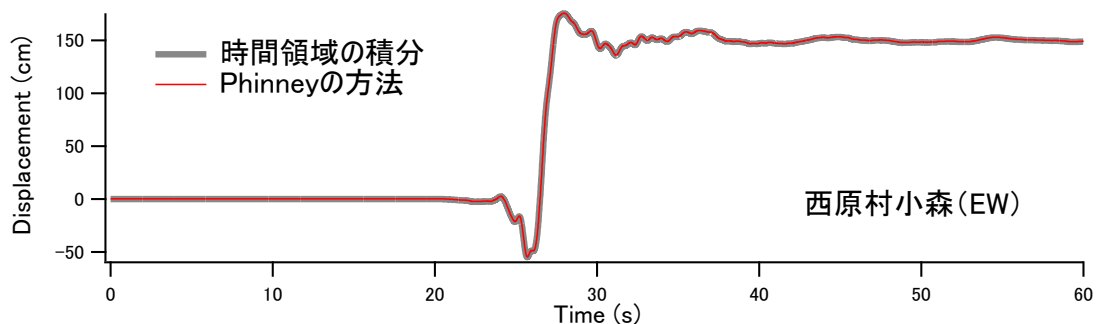


図-4 Phinneyの方法による変位波形の計算結果 (時間領域の積分による結果との比較)

速度波形を周波数領域で積分して永久変位を含む変位波形を求める方法としては、これ以外にも、波形を偶関数と奇関数に分けて評価する方法<sup>2)</sup>などもあるが、筆者は **Phinney** の方法を好んでいる。これは、 $f(t)$  に  $e^{-\lambda t}$  をかけることにより数学的に扱いやすい関数とするという手順に汎用性が感じられることが理由の一つである。

なお、**図-4** の結果は、速度波形の積分を無理に周波数領域で行う必要はなく、時間領域の積分で十分であることを示しているとも言える。

#### 4. Phinney の方法の利用例（その 2）非減衰 1 自由度系の応答計算

**Phinney** の方法の汎用性を示す別の例として非減衰 1 自由度系（**図-5**）の応答計算への適用例を示す。

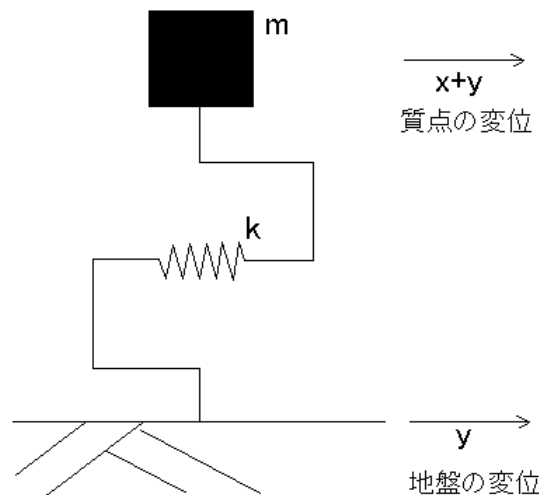
理想的な非減衰 1 自由度系は地震動終了後に自由振動を永久に繰り返すので、その応答のフーリエ変換はやはり式(1)の広義積分では定義できない。したがって、その応答を周波数領域で計算しようとするならば特別の工夫が必要である。そこで、非減衰 1 自由度系の運動方程式

$$m\ddot{x} + kx = -m\ddot{y} \tag{13}$$

（ $m$ は質量、 $k$ はばね定数、 $x$ は 1 自由度系の相対変位、 $y$ は地動加速度）に式(9)のフーリエ変換を適用する。その結果

$$\hat{x}(\omega_c) = -\frac{1}{\omega_s^2 - \omega_c^2} \hat{y}(\omega_c) \tag{14}$$

が得られる（ここに  $k/m = \omega_s^2$ ）。よって、地動加速度  $y$  が与えられた場合、式(9)のフーリエ変換を適用し、式(14)により 1 自由度系の相対変位のフーリエ変換を求め、式(10)のフーリエ逆変換を適用すれば、1 自由度系の相対変位が求まる。このとき、 $\omega_c$  が虚部を含むため、式(14)において分母がゼロとなることがなく、数値的な困難さが生じない。



**図-5** 非減衰 1 自由度系

この方法を実際に固有周期 5s の非減衰 1 自由度系に適用して相対変位を計算し、[Nigam の方法](#)による結果と比較した。入力地震動は 1995 年兵庫県南部地震の際に神戸港工事事務所で観測された加速度波形の

N43W 成分 (図-6) である (この波形の数値データは[港湾地域強震観測のホームページ](#)から入手できる) . 結果は Nigam の方法による結果とほぼ一致している (図-7) . なお, この例ではサンプリング間隔は0.01s, データ長は163.84s,  $\lambda = 2\pi/T$ である.

ここでは 1 自由度系の応答計算への適用事例を示したが, 同様の手法は多自由度系の応答計算にも適用可能である<sup>3)4)</sup>.

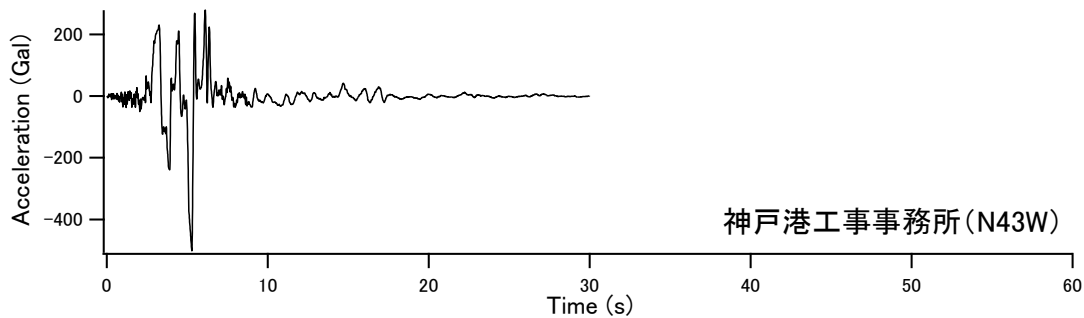


図-6 非減衰 1 自由度系の応答計算に用いた入力地震動

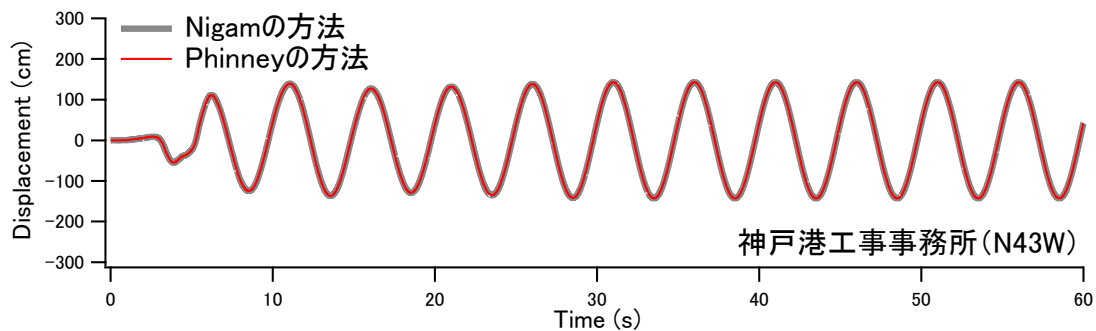


図-7 Phinney の方法による非減衰 1 自由度系の応答計算結果 (Nigam の方法による結果との比較)

謝辞 気象庁・熊本県によるデータを使用しました. 記して謝意を表します.

#### 参考文献

- 1) Phinney, R.A.: Theoretical Calculation of the Spectrum of First Arrivals in Layered Elastic Mediums, *Journal of Geophysical Research*, Vol.70, No.20, pp.5107-5123, 1965.
- 2) 理論地震動研究会編: 地震動—その合成と波形処理, 鹿島出版会, 1994 年.
- 3) Kausel, E. and J.M. Roesset: Frequency domain analysis of undamped systems, *Journal of Engineering mechanics*, ASCE, Vol.118, No.4, pp.721-734, 1992.
- 4) Hall, J.F. and J.L. Beck: Linear system response by DFT: Analysis of a recent modified method, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.22, pp.599-615, 1993.