2018/2/13 第 1 版
2019/3/21 第 2 版
2019/5/8 第 3 版

離散フーリエ変換

野津

1. はじめに

これまで連続関数のフーリエ変換について学んできたが，ここからは離散フーリエ変換について学ぶことにする．一般に時刻歴波形は離散的なデータとして与えられる場合が多く，これを扱うために離散フーリエ変換を用いる．その際，離散フーリエ変換は連続関数のフーリエ変換の近似であることを念頭に置いておくと見通しが良くなる．

2. 前提条件

離散フーリエ変換を導入するにあたり以下の前提条件をおく．

※連続関数$x(t)$のフーリエ変換を$X(\omega)$とする．$x(t)$は複素数でも構わない．

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t}\, dt \tag{1}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega \tag{2}$$

※$x(t)$については$t = t_m = m\Delta t$での値，$x(t_m) = x_m$を考える．

※$X(\omega)$については$\omega = \omega_k = k\Delta\omega$での値，$X(\omega_k)$を考える．

※整数Nを十分大きくとり，$x(t)$は区間$[0, N\Delta t] \equiv [0, T]$の外では十分小さな値をとるものとする．
かつ，Nを十分大きくとり，$X(\omega)$は区間$[-(N/2)\Delta\omega, +(N/2)\Delta\omega]$の外では十分小さな値をとるものとする．

※後々のため$\Delta\omega = 2\pi/T$とする．

3. フーリエ変換の離散表示

以上の前提条件の下で$X(\omega)$は次のように近似できる．

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t}\, dt \cong \sum_{m=0}^{N-1} x_m\, e^{-i\omega m\Delta t} \Delta t \tag{3}$$

これは$x(t)$が大きい値をとる範囲において積分を台形公式で評価する操作に対応する．ここで, ωについても, とびとびの値$\omega_k = k\Delta\omega$を考えると，$X(\omega_k)$は次のように近似できる．

$$X(\omega_k) \cong \sum_{m=0}^{N-1} x_m\, e^{-i\frac{2\pi km}{N}} \Delta t \tag{4}$$

ここで，離散フーリエ係数C_kを次のように定義する（大崎先生の本[1]ではこれを有限複素フーリエ係数と呼んでいる）.

$$C_k \equiv \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x_m\, e^{-i\frac{2\pi km}{N}} \tag{5}$$

これを用いると，フーリエ変換は次のように近似できる.

$$X(\omega_k) \cong TC_k \tag{6}$$

また，フーリエスペクトルは次のように近似できる.

$$|X(\omega_k)| \cong T|C_k| \tag{7}$$

式(5)からわかるように，任意のkに対して$C_{k+N} = C_k$である．すなわち，C_kは周期的に同じ値をとる．すなわち，区間$[-(N/2)\Delta\omega, +(N/2)\Delta\omega]$の外でも$C_k$は定義できるが，区間$[-(N/2)\Delta\omega, +(N/2)\Delta\omega]$の外では$TC_k$はフーリエ変換の近似としての意味を有していない．$TC_k$がフーリエ変換の近似としての意味を失う限界の周波数をナイキスト周波数と呼ぶ．ナイキスト周波数f_{NQ}は$f_{NQ} = 1/(2\Delta t)$で与えられる．すなわち離散フーリエ変換では元の波形のサンプリング間隔が小さいほどより高周波側まで解析対象とすることができる.

4. フーリエ逆変換の離散表示

3. と同様に，$x(t)$は次のように近似できる.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega \cong \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X(\omega_k)\, e^{ik\Delta\omega t}\Delta\omega \tag{8}$$

ここで，tについてとびとびの値$t_m = m\Delta t$を考えると，$x(t_m)$=x_mは次のように近似できる.

$$x_m \cong \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X(\omega_k)\, e^{i\frac{2\pi km}{N}}\Delta\omega \tag{9}$$

ここで式(6)を用いると

$$x_m \cong \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} C_k e^{i\frac{2\pi km}{N}}$$

(10)

さらにC_kの周期性を用いると

$$x_m \cong \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{i\frac{2\pi km}{N}}$$

(11)

式(11)ではx_mを計算するためにN個のC_kを必要としているが，x_mが実数であることが保証されている場合は，[$X(\omega)$と$X(-\omega)$が互いに共役]であることから

$$C_k = C_{N-k}^{*} \qquad (N/2+1 \le k \le N-1) \tag{12}$$

であるため（上付き文字の$*$は共役複素数を表す），実際には$N/2+1$個のC_kからx_mを計算できる．

5.　離散フーリエ変換＋逆変換が厳密に元に戻ることについて

式(11)は近似式として導いたものであるが，実は式(11)は$m = 0,1,2,\cdots,N-1$に対して厳密に成立している．以下，このことについて示す．式(5)でmをlに変更して式(11)に代入すると

$$\text{式(11)の右辺} = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} x_l \left[\sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi k(m-l)}{N}}\right]$$

(13)

となるが，右辺の括弧内は後に示すように

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi k(m-l)}{N}} = N\delta_{ml}$$

(14)

となる．ここに

$$\delta_{ml} = \begin{cases} 1 \dots . m = l \\ 0 \dots . m \neq l \end{cases}$$

(15)

である．これを式(13)に代入すると，式(11)の左辺に一致する．このようにもともと近似式として導いた式(11)が厳密に成立していることは興味深く感じられる．

ここで式(14)を示すことが課題となった．これは次のように場合分けすることによって証明できる．

1) $m = l$のとき

式(14)の左辺はNである．

2) $m \neq l$のとき

$$Z = e^{i\frac{2\pi(m-l)}{N}}$$

とおけば

$$式(14)の左辺 = \sum_{k=0}^{N-1} z^k = 1 + z^1 + z^2 + \cdots + z^{k-1} = \frac{1-z^N}{1-z}$$

である．ここで右辺の分母がゼロになる心配がないか考えておく必要があるが，Zは複素平面上では単位円上にあり，$-\mathrm{N} < m - l < N$であるからZの位相角は-2πより大きく，2πより小さく，かつゼロではない．よって$Z \neq 1$であるから，右辺の分母はゼロとなる心配はない．一方，$z^N = 1$であるから，右辺の分子はゼロである．よって式(14)の左辺はゼロである．

以上から，式(14)が成立する．

6.　地震工学と離散フーリエ変換

地震の揺れには始まりと終わりがあるので, 地震工学に登場する多くの時間関数は, Tを十分大きくとれば,「区間$[0, T]$の外では十分小さな値をとる」という最初に掲げた条件を満足する．このとき，離散フーリエ変換は台形公式を介して本来のフーリエ変換の良い近似となる．したがって，一般に地震工学と離散フーリエ変換の相性は良いと言える．

しかし, 断層近傍で観測される永久変位成分を含む地動変位波形や, 非減衰 1 自由度系の応答変位波形は, $t \to \infty$まで値を持つので，Tをどれほど大きくとったとしても，「区間$[0, T]$の外では十分小さな値をとる」という条件を満たさず，またそもそも式(1)の広義積分でフーリエ変換を定義することができないから，離散フーリエ変換は本来のフーリエ変換の近似とはならない．これらの時間関数も超関数と考えればフーリエ変換可能であるものの，その場合，離散フーリエ変換と本来のフーリエ変換との間の上述のリンクはすでに失われているので，これらの時間関数に離散フーリエ変換を適用する際には特別の配慮が必要である．この点についてはいくつかの提案があるが，その中で，最も汎用的でおすすめできるのは Phinney の方法である．

参考文献

1) 大崎順彦：新・地震動のスペクトル解析入門，鹿島出版会，1994 年.