

## 全無限弾性体におけるせん断食い違い型点震源による地震動

野津

[等質等方な全無限弾性体のグリーン関数](#)と[表現定理](#)を組み合わせれば、等質等方な全無限弾性体におけるせん断食い違い型点震源による地震動を求めることができる。

等質等方な全無限弾性体の点 $\xi$ にせん断食い違い型点震源を置いたときの観測点 $\mathbf{x}$ における地震動を考える。断層面に沿って $x_1$ 軸と $x_2$ 軸、断層面に垂直に $x_3$ 軸をとり、すべりの向きを $x_1$ 軸に一致させる。このとき、表現定理によれば、観測点 $\mathbf{x}$ における変位はグリーン関数 $G_{ni}(\mathbf{x}, t; \xi)$ を用いて次式で与えられる ([表現定理・地震モーメント・ダブルカップル](#)の式(21))。

$$u_n(\mathbf{x}, t) = M(t) * \left( \frac{\partial}{\partial \xi_3} G_{n1}(\mathbf{x}, t; \xi) + \frac{\partial}{\partial \xi_1} G_{n3}(\mathbf{x}, t; \xi) \right) \quad (1)$$

ここに $M(t)$ はモーメント関数とよばれ、次式で定義される。

$$M(t) = \mu \bar{u}(t) A \quad (2)$$

$\mu$ はラメ定数 ([弾性波動論の基礎](#)参照)、 $\bar{u}(t)$ はすべり量の断層面上での平均値、 $A$ は断層面積である。 $M(t)$ はすべりの進展とともに増加する関数であり、その最終的な値は

$$M_0 = \mu \bar{u} A \quad (3)$$

すなわち地震モーメントである。ここに $\bar{u}$ は最終すべり量の断層面上での平均値である。

一方、等質等方な全無限弾性体のグリーン関数は次式で与えられる ([全無限弾性体のグリーン関数](#)参照)。

$$\begin{aligned} G_{ni}(\mathbf{x}, t; \xi) = & \frac{1}{4\pi\rho} (3r_n r_{,i} - \delta_{ni}) \frac{1}{r^3} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau \delta(t - \tau) d\tau \\ & + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} r_n r_{,i} \frac{1}{r} \delta\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) \\ & - \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (r_n r_{,i} - \delta_{ni}) \frac{1}{r} \delta\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \end{aligned} \quad (4)$$

ここに $\rho$ は密度、 $\alpha$ はP波速度、 $\beta$ はS波速度、 $r = |\mathbf{x} - \xi|$ 、 $r_{,i} = \partial r / \partial x_i$ である。

式(4)を式(1)に代入して整理すると次式が得られる。

$$u_n(\mathbf{x}, t) = M(t) * \left[ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left\{ \frac{1}{4\pi\rho} (3r_n r_{,1} - \delta_{n1}) \frac{1}{r^3} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau \delta(t - \tau) d\tau \right. \\ & \left. + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} r_n r_{,1} \frac{1}{r} \delta\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) - \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (r_n r_{,1} - \delta_{n1}) \frac{1}{r} \delta\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left\{ \frac{1}{4\pi\rho} (3r_n r_{,3} - \delta_{n3}) \frac{1}{r^3} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau \delta(t - \tau) d\tau \right. \\ & \left. + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} r_n r_{,3} \frac{1}{r} \delta\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) - \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (r_n r_{,3} - \delta_{n3}) \frac{1}{r} \delta\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \right\} \end{aligned} \right] \quad (5)$$

ここで、空間座標に関する微分については、 $x_i$ に関する微分と $\xi_i$ に関する微分が混在しているので、以下においては $x_i$ に関する微分に統一する。式(5)右辺の{ }内は $\mathbf{x} - \xi$ だけで決まる量であるため $(r_{,i} = (x_i - \xi_i)/r)$ も $\mathbf{x} -$

$\xi$ だけで決まる),  $x_i$ を単位の大きさだけ増やす場合の{ }内の変化は,  $\xi_i$ を単位の大きさだけ減らす場合の{ }内の変化に等しい. したがって $\xi_i$ に関する微分は $x_i$ に関する微分に負号を付けたものとなるため,

$$u_n(\mathbf{x}, t) = M(t) * \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_3} \left\{ -\frac{1}{4\pi\rho} (3r_n r_{,1} - \delta_{n1}) \frac{1}{r^3} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau \delta(t-\tau) d\tau \right. \\ \left. -\frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} r_n r_{,1} \frac{1}{r} \delta\left(t-\frac{r}{\alpha}\right) + \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (r_n r_{,1} - \delta_{n1}) \frac{1}{r} \delta\left(t-\frac{r}{\beta}\right) \right\} \\ + \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ -\frac{1}{4\pi\rho} (3r_n r_{,3} - \delta_{n3}) \frac{1}{r^3} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau \delta(t-\tau) d\tau \right. \\ \left. -\frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} r_n r_{,3} \frac{1}{r} \delta\left(t-\frac{r}{\alpha}\right) + \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (r_n r_{,3} - \delta_{n3}) \frac{1}{r} \delta\left(t-\frac{r}{\beta}\right) \right\} \end{array} \right] \quad (6)$$

が得られる. 次に合積の計算を行うと

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial x_3} \left\{ -\frac{1}{4\pi\rho} (3r_n r_{,1} - \delta_{n1}) \frac{1}{r^3} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau M(t-\tau) d\tau \right. \\ \left. -\frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} r_n r_{,1} \frac{1}{r} M\left(t-\frac{r}{\alpha}\right) + \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (r_n r_{,1} - \delta_{n1}) \frac{1}{r} M\left(t-\frac{r}{\beta}\right) \right\} \\ + \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ -\frac{1}{4\pi\rho} (3r_n r_{,3} - \delta_{n3}) \frac{1}{r^3} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau M(t-\tau) d\tau \right. \\ \left. -\frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} r_n r_{,3} \frac{1}{r} M\left(t-\frac{r}{\alpha}\right) + \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (r_n r_{,3} - \delta_{n3}) \frac{1}{r} M\left(t-\frac{r}{\beta}\right) \right\} \quad (7)$$

が得られ, さらに $x_i$ に関する微分を実行し整理すると

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\rho} (30r_n r_{,1} r_{,3} - 6\delta_{n1} r_{,3} - 6\delta_{n3} r_{,1}) \frac{1}{r^4} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau M(t-\tau) d\tau \\ + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} (12r_n r_{,1} r_{,3} - 2\delta_{n1} r_{,3} - 2\delta_{n3} r_{,1}) \frac{1}{r^2} M\left(t-\frac{r}{\alpha}\right) \\ - \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (12r_n r_{,1} r_{,3} - 3\delta_{n1} r_{,3} - 3\delta_{n3} r_{,1}) \frac{1}{r^2} M\left(t-\frac{r}{\beta}\right) \\ + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^3} 2r_n r_{,1} r_{,3} \frac{1}{r} \dot{M}\left(t-\frac{r}{\alpha}\right) \\ - \frac{1}{4\pi\rho\beta^3} (2r_n r_{,1} r_{,3} - \delta_{n1} r_{,3} - \delta_{n3} r_{,1}) \frac{1}{r} \dot{M}\left(t-\frac{r}{\beta}\right) \quad (8)$$

が得られる. ここで

$$A_n = 2r_n r_{,1} r_{,3} \quad (9)$$

$$B_n = -2r_n r_{,1} r_{,3} + \delta_{n1} r_{,3} + \delta_{n3} r_{,1} \quad (10)$$

とおけば

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\rho} (9A_n - 6B_n) \frac{1}{r^4} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau M(t-\tau) d\tau \\ + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} (4A_n - 2B_n) \frac{1}{r^2} M\left(t-\frac{r}{\alpha}\right) + \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (-3A_n + 3B_n) \frac{1}{r^2} M\left(t-\frac{r}{\beta}\right) \\ + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^3} A_n \frac{1}{r} \dot{M}\left(t-\frac{r}{\alpha}\right) + \frac{1}{4\pi\rho\beta^3} B_n \frac{1}{r} \dot{M}\left(t-\frac{r}{\beta}\right) \quad (11)$$

が得られる。

式(11)は直交座標系における変位の各成分を示したものであるが、以降においては、震源位置を原点とし、図-1に示すような球座標系 $(r, \theta, \phi)$ を導入し、変位の各成分を求める。なお $r$ 方向、 $\theta$ 方向、 $\phi$ 方向のそれぞれの単位ベクトルを $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ とする。

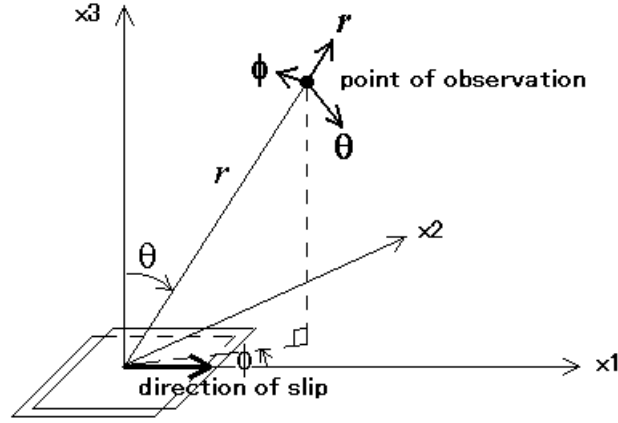


図-1 球座標系

まず、式(9)で定義した $A_n$ に含まれる $r_n$ は $x_n/r$ に等しく、これは震源から観測点の方向を向いた単位ベクトルすなわち $\hat{r}$ に他ならない。よって $A_n$ は $\hat{r}$ 成分だけをもち、その値は $2r_{,1}r_{,3} = \sin 2\theta \cos \phi$ である。次に、式(10)で定義した $B_n$ は、 $r_n$ との内積をとると0となることから、 $\hat{r}$ に直交し、 $\hat{\theta}$ 成分と $\hat{\phi}$ 成分だけをもつ。そこで、これらの成分を求めるために、 $B_n$ と各方向の単位ベクトルとの内積を計算する。その際、

$$\hat{\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \hat{\phi} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

であることを利用する。ただし、式(10)における $B_n$ の第1項は $\hat{r}$ に平行であるため $\hat{\theta}$ 成分と $\hat{\phi}$ 成分を求める際には考慮する必要がない。また $B_n$ の第2項は成分で書くと

$$\begin{pmatrix} r_{,3} \\ 0 \\ r_{,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \cos \phi \end{pmatrix}$$

である。これらを考慮すると、 $B_n$ の $\hat{\theta}$ 成分は $\cos 2\theta \cos \phi$ 、 $\hat{\phi}$ 成分は $-\cos \theta \sin \phi$ となる。

したがって、せん断食い違い型点震源による観測点 $\mathbf{x}$ における変位は最終的に次のようなベクトル表記で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = & \frac{1}{4\pi\rho} \mathbf{R}_{\theta\phi}^N \frac{1}{r^4} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau M(t-\tau) d\tau \\ & + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} \mathbf{R}_{\theta\phi}^{IP} \frac{1}{r^2} M\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} \mathbf{R}_{\theta\phi}^{IS} \frac{1}{r^2} M\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \\ & + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^3} \mathbf{R}_{\theta\phi}^{FP} \frac{1}{r} \dot{M}\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + \frac{1}{4\pi\rho\beta^3} \mathbf{R}_{\theta\phi}^{FS} \frac{1}{r} \dot{M}\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \end{aligned} \quad (12)$$

ここに右辺第1項～第5項はそれぞれ近地項, 中間P波項, 中間S波項, 遠地P波項, 遠地S波項である.  $R_{\theta\phi}^N \sim R_{\theta\phi}^{FS}$ は各項のラディエーション係数であり, 次式で与えられる.

$$\begin{aligned}
 R_{\theta\phi}^N &= 9 \sin 2\theta \cos \phi \hat{r} - 6(\cos 2\theta \cos \phi \hat{\theta} - \cos \theta \sin \phi \hat{\phi}) \\
 R_{\theta\phi}^{IP} &= 4 \sin 2\theta \cos \phi \hat{r} - 2(\cos 2\theta \cos \phi \hat{\theta} - \cos \theta \sin \phi \hat{\phi}) \\
 R_{\theta\phi}^{IS} &= -3 \sin 2\theta \cos \phi \hat{r} + 3(\cos 2\theta \cos \phi \hat{\theta} - \cos \theta \sin \phi \hat{\phi}) \\
 R_{\theta\phi}^{FP} &= \sin 2\theta \cos \phi \hat{r} \\
 R_{\theta\phi}^{FS} &= \cos 2\theta \cos \phi \hat{\theta} - \cos \theta \sin \phi \hat{\phi}
 \end{aligned} \tag{13}$$

式(12)において遠地S波項を赤色のフォントで示している. これは, 各項の中で工学上の重要性が最も高いためであるが, これについては後述する.

以下, 式(12)の各項の特徴を見ていく (表-1).

表-1 式(12)の各項の特徴

	揺れの向き	時間依存性	残留変位	伝播速度	距離減衰特性
近地項	各方向	$M(t) * g(t)$ に比例	$\frac{M_0}{8\pi\rho} \left( \frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right) R_{\theta\phi}^N \frac{1}{r^2}$	$\alpha$ と $\beta$ の中間	残留変位は $1/r^2$ , 振幅は $1/r^3$
中間P波項	各方向	$M(t)$ に比例	$\frac{M_0}{4\pi\rho\alpha^2} R_{\theta\phi}^{IP} \frac{1}{r^2}$	$\alpha$	$1/r^2$
中間S波項	各方向	$M(t)$ に比例	$\frac{M_0}{4\pi\rho\beta^2} R_{\theta\phi}^{IS} \frac{1}{r^2}$	$\beta$	$1/r^2$
遠地P波項	地震波の進行方向に平行	$\dot{M}(t)$ に比例	0	$\alpha$	$1/r$
遠地S波項	地震波の進行方向に垂直	$\dot{M}(t)$ に比例	0	$\beta$	$1/r$

まず揺れの向きについてみると, 遠地P波項は $\hat{r}$ 成分だけが存在するので, 地震波の進行方向に平行に揺れることになる. 一方, 遠地S波項は $\hat{\theta}$ 成分と $\hat{\phi}$ 成分だけが存在するので, 地震波の進行方向に垂直に揺れることになる. 中間P波項, 中間S波項, 近地項は各方向に揺れる.

次に時間依存性 (波の形) を見ると, 遠地項はモーメント関数 $M(t)$ の時間微分すなわちモーメントレート関数 $\dot{M}(t)$ に比例した形となっている. すなわち残留変位が残らない関数形となっている. また遠地P波項または遠地S波項の取り囲む面積は地震モーメントに比例する. 中間項はモーメント関数 $M(t)$ に比例した形となっている. すなわち残留変位が残るような関数形である. 近地項の時間依存性はやや複雑で,

$$\int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau M(t - \tau) d\tau = M(t) * g(t)$$

のような関数形となっている. ここに

$$g(t) = \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau \delta(t - \tau) d\tau$$

である. この $g(t)$ は図-2のような形をしており,  $M(t) * g(t)$ は残留変位の残る関数形である. 各項による残留変位は,  $t = -\infty$ と $t = \infty$ での値の差から表-1の通りに求まる.

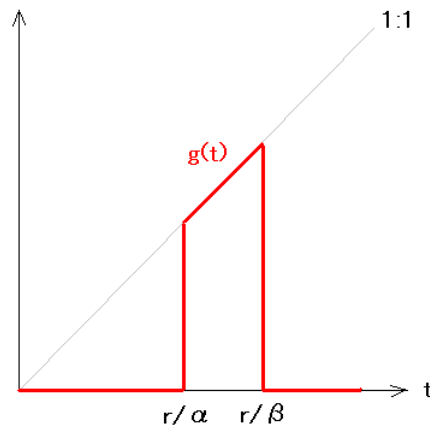


図-2 関数 $g(t)$ の形

これらの「波形」が距離とともに時間軸上で右に移動していく。遠地 P 波項と中間 P 波項は P 波速度で、遠地 S 波項と中間 S 波項は S 波速度で伝播する。近地項は P 波速度と S 波速度の中間的な速度で伝播する。

つづいて距離に対する減衰特性を見ると、遠地項は $1/r$ に比例し、中間項は $1/r^2$ に比例する。近地項の距離減衰特性は注意深く見ていく必要がある。というのは、遠地項と中間項は関数形は決まっています距離とともに減衰するだけであるのに対し、近地項は距離とともに関数形も変化していくためである。近地項のエネルギーは P 波到来時刻と S 波到来時刻の間に分布しており、遠方では S-P 時間<sup>2)</sup>の延伸とともに時間軸上で分散する効果がある。したがって、残留変位に着目するか振幅に着目するかで距離減衰特性は変わってくる。残留変位に着目するならば距離減衰特性は $1/r^2$ であり、振幅に着目するならば距離減衰特性は $1/r^3$ である。いずれにせよ、近地項と中間項は遠地項よりも急激に減衰するので、断層からある程度離れれば遠地項が支配的となる。なお、[全無限弾性体のグリーン関数](#)には「近地項」「遠地項」があったが、せん断食い違い型点震源による地震動には「近地項」「中間項」「遠地項」が表れることになった。本稿では式(7)から式(8)にかけての空間座標に関する微分のところでその変化が起きており、グリーン関数の「近地項」から地震動の「近地項」と「中間項」の一部が、グリーン関数の「遠地項」から地震動の「中間項」の一部と「遠地項」が生じている。また、弾性体に 1 方向に载荷していく場合の残留変位は $1/r$ に比例して減衰するのに対し ([全無限弾性体のグリーン関数](#)における式(7))、せん断食い違い型点震源による残留変位は $1/r^2$ に比例して減衰するので、後者の方が減衰は急激であると言える。このことは文献 3)でも指摘されている。

遠方で卓越する遠地項のうち、遠地 P 波項と遠地 S 波項の振幅を比較すると、遠地 P 波項には係数 $1/(4\pi r \alpha^3)$ が、遠地 S 波項には係数 $1/(4\pi r \beta^3)$ が付いているので、震源から励起される地震波の振幅としては S 波の方がはるかに大きい (いまはラディエーション係数は平均的であると考えている)。したがって、結果的に、遠方では遠地 S 波項が最も卓越し、これが (堆積層による増幅を経て) 構造物被害の原因となる場合が多い。1995 年兵庫県南部地震による神戸市内の地震動も基本的には遠地 S 波項の堆積層による増幅で説明ができる。したがって、一般には、工学上まず着目すべきなのは遠地 S 波項であると考えて良い。しかしながら、2016 年熊本地震のように地表付近の断層が動く場合には近地項・中間項の影響が無視できなくなる。

一般には、近地項・中間項の寄与は、距離が小さいほど大きくなると考えられる。また、近地項・中間項は $M(t) * g(t)$ または $M(t)$ に比例するのに対し、遠地項は $\dot{M}(t)$ に比例することから、低周波側ほど近地項・中間項の寄与は大きくなるはずである。この点について調べるため、式(12)の $\hat{\theta}$ 成分と $\hat{\phi}$ 成分について、遠地 S 波項に対する全項のフーリエ変換の比をとると次式となる<sup>4)</sup>。

$$\begin{aligned}
\frac{(N+IP+IS+FS)}{FS} &= 6i \left(\frac{\beta}{r\omega}\right)^3 \left[1 - e^{-i\omega r \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)}\right] \\
&\quad - 6 \left(\frac{\beta}{r\omega}\right)^2 \left[1 - \frac{\beta}{\alpha} e^{-i\omega r \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)}\right] \\
&\quad + 2i \left(\frac{\beta}{r\omega}\right) \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 e^{-i\omega r \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)} \\
&\quad - 3i \left(\frac{\beta}{r\omega}\right) \\
&\quad + 1
\end{aligned} \tag{14}$$

同様に、式(12)の $\hat{r}$ 成分について、遠地P波項に対する全項のフーリエ変換の比をとると次式となる<sup>5)</sup>。

$$\begin{aligned}
\frac{(N+IP+IS+FP)}{FP} &= 9i \left(\frac{\alpha}{r\omega}\right)^3 \left[1 - e^{-i\omega r \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)}\right] \\
&\quad - 9 \left(\frac{\alpha}{r\omega}\right)^2 \left[1 - \frac{\alpha}{\beta} e^{-i\omega r \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)}\right] \\
&\quad - 4i \left(\frac{\alpha}{r\omega}\right) \\
&\quad + 3i \left(\frac{\alpha}{r\omega}\right) \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 e^{-i\omega r \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)} \\
&\quad + 1
\end{aligned} \tag{15}$$

式(14)(15)は、媒質のパラメーターである $\alpha$ と $\beta$ を別とすれば $r\omega$ のみの関数である。いま仮に $\alpha/\beta = \sqrt{3}$  (ポアソン固体)とし、式(14)(15)の絶対値を $r\omega/\beta$ の関数として示すと図-3のようになる。式(14)の絶対値は $r\omega/\beta$ が小さいとき1より大きく、 $r\omega/\beta$ が中間的な値のときいったん1より小さくなり、 $r\omega/\beta$ が大きいくときには1に漸近する。式(15)の絶対値も同様に高周波側では1に漸近するが、漸近するスピードは遅い。いずれにしても、同じ距離で比較すると低周波側ほど近地項・中間項の影響は大きいと言える。また、式(15)の絶対値は式(14)の絶対値よりも著しく大きい値を示すが、これは分子が大きいからというよりも分母が小さいからである。

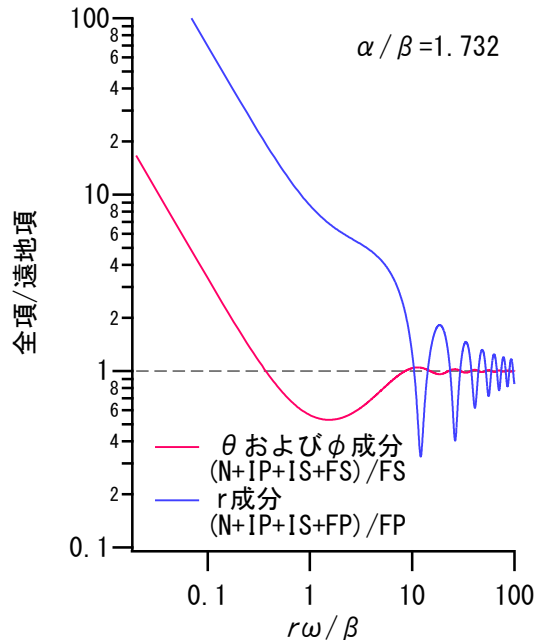


図-3 遠地項に対する全項のフーリエスペクトル比

最後にポアソン固体の場合について式(12)の各項の残留変位への寄与率を計算すると、 $\hat{\theta}$ 成分と $\hat{\phi}$ 成分については近地項：中間 P 波項：中間 S 波項 $=-6 : -2 : 9$ 、 $\hat{\rho}$ 成分については近地項：中間 P 波項：中間 S 波項 $=9 : 4 : -9$ となる。近地項，中間 P 波項，中間 S 波項のいずれも残留変位の計算において必要不可欠であることがわかる。

#### 参考文献

- 1) Aki, K. and P.G. Richards: Quantitative Seismology, Second Edition, University Science Books, Sausalito, California, 2002.
- 2) 宇津徳治：地震学，第3版，共立出版，p.153，2001年。
- 3) Lay, T. and T.C. Wallace: Modern Global Seismology, Academic Press, San Diego, California, p.328, 1995.
- 4) 野津厚：統計的グリーン関数法に近地項と中間項を導入するための簡便な方法，第12回日本地震工学シンポジウム論文集，pp.190-193，2006年。
- 5) 佐藤智美：近地項と中間項を考慮した三成分統計的グリーン関数生成手法の高度化，日本建築学会構造系論文集，No.638，pp.629-638，2009年。