

## 1. 表現定理

図-1のように外部の境界 $S$ と内部の境界 $\Sigma^+ + \Sigma^-$ で囲まれた媒質を考える。媒質は非一様であっても良い。内部の境界 $\Sigma^+ + \Sigma^-$ は断層面を表現するためのもので、 $\Sigma^+$ 側と $\Sigma^-$ 側で異なる変位が生じると考える。  $\mathbf{n}$ は外向き単位法線ベクトルであり、 $\Sigma^+$ 上と $\Sigma^-$ 上では逆向きである。

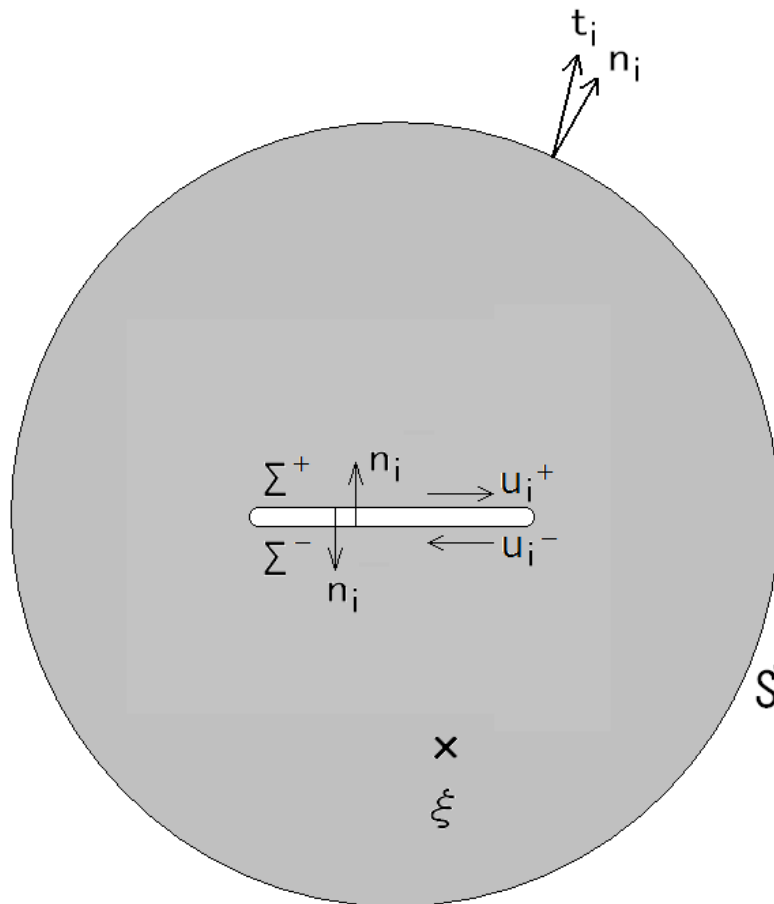


図-1 外部の境界 $S$ と内部の境界 $\Sigma^+ + \Sigma^-$ で囲まれた媒質。媒質は非一様であっても良い。

[相反性](#)について考えたときと同じように、[弾性波動論の支配方程式](#)を満足する二つの変位場 ( $u_i^I$ と $u_i^{II}$ ) を考える。これらは、同じ支配方程式を満足するが、外力や境界条件が異なるため、異なる変位場となっているものとする。

$$\rho \ddot{u}_i^I = (c_{ijkl} u_{k,l}^I)_j + f_i^I \quad (1)$$

$$\rho \ddot{u}_i^{II} = (c_{ijkl} u_{k,l}^{II})_j + f_i^{II} \quad (2)$$

このとき、[相反性](#)の式(7)より、次式が成立する。

$$\begin{aligned}
& \int_V f_i^I * u_i^{II} dV - \int_V f_i^{II} * u_i^I dV \\
&= - \int_S t_i^I * u_i^{II} dS + \int_S t_i^{II} * u_i^I dS \\
& \quad - \int_{\Sigma^+ + \Sigma^-} t_i^I * u_i^{II} dS + \int_{\Sigma^+ + \Sigma^-} t_i^{II} * u_i^I dS
\end{aligned} \tag{3}$$

ここに $t_i^I$ と $t_i^{II}$ はそれぞれ $u_i^I$ と $u_i^{II}$ から計算されるトラクションであり次式で与えられる。

$$t_i^I = c_{ijkl} u_{k,l}^I n_j \tag{4}$$

$$t_i^{II} = c_{ijkl} u_{k,l}^{II} n_j \tag{5}$$

ここで $u_i^I$ としては断層面上で生じたすべりに起因する変位場を考える（これを以後 $u_i$ とする）。これに対応する外力は $f_i^I = 0$ である。また $\Sigma^+$ 上では $u_i = u_i^+$ 、 $\Sigma^-$ 上では $u_i = u_i^-$ とする。一方 $u_i^{II}$ としては点 $\xi$  (図-1)を載荷点とするグリーン関数を考える。すなわち、

$$f_i^{II} = \delta_{in} \delta(\mathbf{x} - \xi) \delta(t) \tag{6}$$

$$u_i^{II} = G_{in}(\mathbf{x}, t; \xi) \tag{7}$$

とする。

ここで式(3)右辺第一項の $S$ 上での積分が消えてくれなければ以降の議論を進める上で都合が悪いのであるが、これが消えてくれるための条件については[グリーン関数の相反性](#)の導出過程で既に考察した。すなわち

- 1)  $S$ が自由表面（例えば地球の表面）でありトラクション=0を満足する
- 2) ゾンマーフェルトの放射条件が成立する
- 3)  $S$ が十分遠方にあり、任意の有限な時刻に対して被積分関数がゼロとなる<sup>2)</sup>

のいずれかが成立すれば、 $S$ 上での積分は消えるのであった。ここではこれらの条件のいずれかが成立するものとする。このとき次式が成立する。

$$u_n(\xi, t) = \int_{\Sigma^+} t_i^I * G_{in} dS - \int_{\Sigma^+} t_i^{II} * u_i^+ dS + \int_{\Sigma^-} t_i^I * G_{in} dS - \int_{\Sigma^-} t_i^{II} * u_i^- dS \tag{8}$$

ここで、 $\Sigma^+$ 上の $t_i^I$ と $\Sigma^-$ 上の $t_i^I$ は作用反作用の法則により大きさが同じで逆向きであるから、式(8)右辺の第1項と第3項は打ち消し合い、

$$u_n(\xi, t) = - \int_{\Sigma^+} t_i^{II} * u_i^+ dS - \int_{\Sigma^-} t_i^{II} * u_i^- dS \tag{9}$$

が得られる。また、 $\Sigma^+$ 上の $t_i^{II}$ と $\Sigma^-$ 上の $t_i^{II}$ も作用反作用の法則により大きさが同じで逆向きであるから、式(9)右辺の第1項と第2項はまとめることができ、

$$u_n(\xi, t) = \int_{\Sigma^-} t_i^{II} * (u_i^+ - u_i^-) dS \quad (10)$$

が得られる．ここで $\Sigma^+$ 側と $\Sigma^-$ 側の変位差（すなわち断層面上でのすべり量）を $[u_i] = u_i^+ - u_i^-$ と書くことにすれば

$$u_n(\xi, t) = \int_{\Sigma^-} t_i^{II} * [u_i] dS \quad (11)$$

が得られる．以降では簡単のため断層面の両側の媒質は等しいとする．式(5)より

$$t_i^{II} = c_{ijkl} \frac{\partial}{\partial x_l} G_{kn}(\mathbf{x}, t; \xi) n_j \quad (12)$$

であるから

$$u_n(\xi, t) = \int_{\Sigma^-} [u_i(\mathbf{x}, t)] c_{ijkl} n_j * \frac{\partial}{\partial x_l} G_{kn}(\mathbf{x}, t; \xi) dS \quad (13)$$

が得られ， $\Sigma^-$ を改めて $\Sigma$ と書き，表記上 $\mathbf{x}$ と $\xi$ を入れ替えると

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \int_{\Sigma} [u_i(\xi, t)] c_{ijkl} n_j * \frac{\partial}{\partial \xi_l} G_{kn}(\xi, t; \mathbf{x}) dS \quad (14)$$

が得られる．最後に[グリーン関数の相反性](#)を用いると，

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \int_{\Sigma} [u_i(\xi, t)] c_{ijkl} n_j * \frac{\partial}{\partial \xi_l} G_{nk}(\mathbf{x}, t; \xi) dS \quad (15)$$

が得られる．これを表現定理という．

以降においては，断層面に沿って $\xi_1$ 軸と $\xi_2$ 軸，断層面に垂直に $\xi_3$ 軸をとり（このとき $(n_1, n_2, n_3) = (0, 0, 1)$ である），すべりの向きを $\xi_1$ 軸に一致させる．また，

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (16)$$

とする（[弾性波動論の基礎](#)参照）．このとき次式が得られる．

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \int_{\Sigma} \mu [u_1(\xi, t)] * \left( \frac{\partial G_{n1}}{\partial \xi_3} + \frac{\partial G_{n3}}{\partial \xi_1} \right) dS \quad (17)$$

さらに，断層面が十分に小さい場合，積分記号が外れて

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \mu \bar{u}(t) A * \left( \frac{\partial G_{n1}}{\partial \xi_3} + \frac{\partial G_{n3}}{\partial \xi_1} \right) \quad (18)$$

となる．ここに $A$ は断層面積である．また

$$\bar{u}(t) = \frac{\int_S [u_1(\xi, t)] dS}{A} \quad (19)$$

はすべり量の断層面上での平均値である．ここで

$$M(t) = \mu \bar{u}(t) A \quad (20)$$

とおけば

$$u_n(\mathbf{x}, t) = M(t) * \left( \frac{\partial G_{n1}}{\partial \xi_3} + \frac{\partial G_{n3}}{\partial \xi_1} \right) \quad (21)$$

となる． $M(t)$ はモーメント関数とよばれ，すべりの進展とともに増加する関数であり，その最終的な値は

$$M_0 = \mu \bar{u} A \quad (22)$$

である．ここに $\bar{u}$ は最終すべり量の断層面上での平均値である． $M_0$ は地震モーメントとよばれる．なお，ここまでの議論は媒質が非一様な場合も成立する．

## 2. 断層面上でのすべりとダブルカップルの等価性

ここでは断層面上でのすべりに起因する波動場とダブルカップル（表-1）による波動場が等価であることを説明する．

表-1は弾性体への载荷条件とそれによる弾性体の応答を整理したものである．なお表-1の項目のうち「荷重の大きさ」は荷重が作用している範囲で体積積分した後の大きさを示している．すなわち $\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})\delta(t)$ のような荷重については体積積分し大きさは $\delta(t)$ としている．

まず表-1のステップ①はグリーン関数の定義そのものであり，点 $\boldsymbol{\xi}$ に $\xi_1$ 方向に大きさ $\delta(t)$ の载荷をした場合の弾性体の応答は $G_{n1}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi})$ で表されることを示している．

ステップ②では，ステップ①をもとに， $\Delta$ が十分小さいとの前提で， $\xi_3$ 方向に $\Delta$ だけ離れた二点（ $\boldsymbol{\xi}_A$ と $\boldsymbol{\xi}_B$ ）に集中荷重を作用させている．集中荷重の大きさは $\delta(t)/\Delta$ であり，向きは逆向きである．このときの弾性体の応答は，

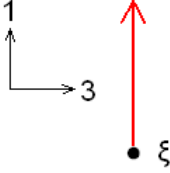
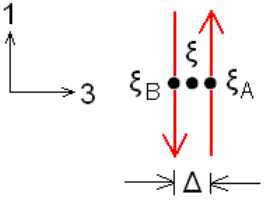
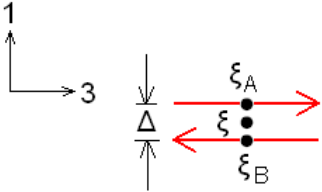
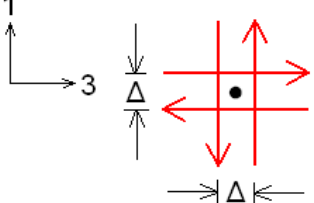
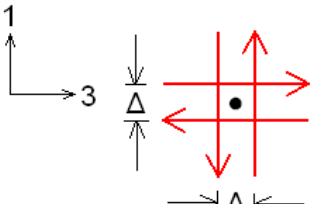
$$\frac{G_{n1}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}_A) - G_{n1}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}_B)}{\Delta}$$

で表され， $\Delta \rightarrow 0$ の極限をとれば， $\partial G_{n1}/\partial \xi_3$ となる．また，このとき点 $\boldsymbol{\xi}$ に作用しているモーメントは，腕の長さが $\Delta/2$ で大きさ $\delta(t)/\Delta$ の集中荷重が二つあることから， $\delta(t)$ である．この場合のように一組の偶力からなる荷重をシングルカップルという．

ステップ③は，ステップ②とおなじで， $\xi_1$ と $\xi_3$ を入れ替えたものである．

ステップ④は，ステップ②とステップ③を重ね合わせたものである．荷重に関しても応答に関してもステップ②とステップ③の重ね合わせになっている．この場合のように二組の偶力からなる荷重をダブルカップルという．

表-1 断層面上でのすべりとダブルカップルの等価性

| ステップ | 荷重の作用点と向き  | 荷重の大きさ(注1)                                    | 弾性体の応答   |
|------|--|---|--|
| ①    |   | 大きさ: $\delta(t)$                              | $G_{n1}(\mathbf{x}, t; \xi)$   |
| ②    | <p>①の空間微分</p>  <p>シングルカップル</p>                    | 大きさ: $\delta(t)/\Delta$<br>モーメント: $\delta(t)$ | $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{G_{n1}(\mathbf{x}, t; \xi_A) - G_{n1}(\mathbf{x}, t; \xi_B)}{\Delta}$ $= \frac{\partial G_{n1}}{\partial \xi_3}$  |
| ③    | <p>②と同様に</p>  <p>シングルカップル</p>                    | 大きさ: $\delta(t)/\Delta$<br>モーメント: $\delta(t)$ | $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{G_{n3}(\mathbf{x}, t; \xi_A) - G_{n3}(\mathbf{x}, t; \xi_B)}{\Delta}$ $= \frac{\partial G_{n3}}{\partial \xi_1}$  |
| ④    | <p>②+③</p>  <p>ダブルカップル</p>                      | 大きさ: $\delta(t)/\Delta$<br>モーメント: $\delta(t)$ | $\frac{\partial G_{n1}}{\partial \xi_3} + \frac{\partial G_{n3}}{\partial \xi_1}$  |
| ⑤    | <p>④と <math>M(t)</math> の合積</p>  <p>ダブルカップル</p> | 大きさ: $M(t)/\Delta$<br>モーメント: $M(t)$           | $M(t) * \left( \frac{\partial G_{n1}}{\partial \xi_3} + \frac{\partial G_{n3}}{\partial \xi_1} \right)$ <p><u>これは断層面上でのすべりに起因する弾性体の応答に他ならない。</u></p> |

(注1) ここでは荷重の大きさは体積積分後の大きさで表示することになっている。すなわち、 $\delta(\mathbf{x} - \xi)\delta(t)$  のような荷重については、荷重が作用している範囲で体積積分し、大きさは  $\delta(t)$  としている。

ステップ⑤では、ステップ④における荷重と $M(t)$ の合積をとったものを荷重としている。その結果、弾性体の応答も、ステップ④における応答と $M(t)$ の合積をとったものとなり、

$$M(t) * \left( \frac{\partial G_{n1}}{\partial \xi_3} + \frac{\partial G_{n3}}{\partial \xi_1} \right)$$

となる。これは断層面上でのすべりに起因する弾性体の応答（式(21)）に他ならない。つまり、断層面上でのすべりに起因する弾性体の応答はダブルカップルによる弾性体の応答に等しい。ただしそのときのダブルカップルは、すべりの進展に応じて、 $0$  から $M_0$ （地震モーメント）まで次第に大きくしていく必要がある。

このような断層面上でのすべりとダブルカップルの等価性は、差分法のような数値解析手法における震源の導入に利用されている<sup>例えば3)</sup>。

### 3. モーメントテンソル

以下においては慣例に従い $x_1$ 軸を北向きに、 $x_2$ 軸を東向きに、 $x_3$ 軸を鉛直下向きにとる。式(15)において断層面は十分に小さいものと考えると、積分記号が外れて

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \bar{u}_i(t) n_j c_{ijkl} A * \frac{\partial}{\partial \xi_l} G_{nk}(\mathbf{x}, t; \xi) \quad (23)$$

となる。ここに

$$\bar{u}_i(t) = \frac{\int_S [u_i(\xi, t)] dS}{A} \quad (24)$$

である。ここで

$$M_{kl}(t) = \bar{u}_i(t) n_j c_{ijkl} A \quad (25)$$

とおけば

$$u_n(\mathbf{x}, t) = M_{kl}(t) * \frac{\partial}{\partial \xi_l} G_{nk}(\mathbf{x}, t; \xi) \quad (26)$$

である。 $M_{kl}(t)$ はモーメントテンソルと呼ばれる。ここで $c_{ijkl}$ が式(16)で与えられるものとする、ベクトル $\bar{u}_k(t)$ と $n_k$ の内積はゼロであるため $\lambda$ の項は消え、モーメントテンソルは次式で与えられる。

$$M_{kl}(t) = \mu A (\bar{u}_k(t) n_l + \bar{u}_l(t) n_k) \quad (27)$$

断層の走向・傾斜・すべり角が $(\phi, \delta, \lambda)$ で与えられる場合は、ベクトル $\bar{u}_k(t)$ の各成分は

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_1(t) \\ \bar{u}_2(t) \\ \bar{u}_3(t) \end{pmatrix} = \bar{u}(t) \begin{pmatrix} \cos \lambda \cos \phi + \sin \lambda \cos \delta \sin \phi \\ \cos \lambda \sin \phi - \sin \lambda \cos \delta \cos \phi \\ -\sin \lambda \sin \delta \end{pmatrix} \quad (28)$$

で、ベクトル $n_k$ の各成分は

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \delta \sin \phi \\ \sin \delta \cos \phi \\ -\cos \delta \end{pmatrix} \quad (29)$$

で与えられ ( $\bar{u}(t)$ はベクトル $\bar{u}_k(t)$ の大きさ), これらを考慮するとモーメントテンソルの各成分は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} M_{11}(t) &= -M(t)(\sin \delta \cos \lambda \sin 2\phi + \sin 2\delta \sin \lambda \sin^2 \phi) \\ M_{12}(t) &= M(t) \left( \sin \delta \cos \lambda \cos 2\phi + \frac{1}{2} \sin 2\delta \sin \lambda \sin 2\phi \right) \\ M_{13}(t) &= -M(t)(\cos \delta \cos \lambda \cos \phi + \cos 2\delta \sin \lambda \sin \phi) \\ M_{21}(t) &= M_{12}(t) \\ M_{22}(t) &= M(t)(\sin \delta \cos \lambda \sin 2\phi - \sin 2\delta \sin \lambda \cos^2 \phi) \\ M_{23}(t) &= -M(t)(\cos \delta \cos \lambda \sin \phi - \cos 2\delta \sin \lambda \cos \phi) \\ M_{31}(t) &= M_{13}(t) \\ M_{32}(t) &= M_{23}(t) \\ M_{33}(t) &= M(t) \sin 2\delta \sin \lambda \end{aligned} \quad (30)$$

#### 参考文献

- 1) Aki, K. and P.G. Richards: Quantitative Seismology, Second Edition, University Science Books, Sausalito, California, 2002.
- 2) 日下部哲也・亀伸樹：表現定理とグリーン関数－全無限グリーン関数による有限領域の弾性変形場の表現－, 地震 2, 第 68 巻, pp.83-89, 2015 年.
- 3) Graves, R.W.: Simulating seismic wave propagation in 3D elastic media using staggered-grid finite differences, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol.86, pp.1091-1106, 1996.