2017/11/20

フーリエ変換の諸定理

野津

1.　言葉の定義

時刻歴波形$f(t)$に対し，フーリエ変換を式(1)で，フーリエ逆変換を式(2)で定義する．

$$\text{フーリエ変換}\quad F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt \tag{1}$$

$$\text{フーリエ逆変換}\quad f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega \tag{2}$$

フーリエ変換と逆変換の定義は本によって異なる場合がある．例えばフーリエ変換に$e^{i\omega t}$を，逆変換に$e^{-i\omega t}$を用いている本もある．また，係数が異なる場合もある．しかし，本稿では一貫してフーリエ変換と逆変換を上述のように定義する．なお，以下においては特にことわらない限り$f(t)$には実関数という制約を設けない．

$F(\omega)$は一般には複素数であり，その絶対値$|F(\omega)|$を<u>フーリエスペクトル</u>とよぶ．またフーリエスペクトルの自乗$|F(\omega)|^2$を<u>パワースペクトル</u>とよぶ．

$F(\omega)$を複素平面上にプロットしたときの実軸とのなす角を$\theta(\omega)$と書くことにすると，式(3)が得られる．

$$F(\omega)=|F(\omega)|e^{-i\theta(\omega)} \tag{3}$$

ここで$\theta(\omega)$は時計回りを正としている．$\theta(\omega)$をフーリエ位相と呼ぶ．$\theta(\omega)$をωで微分したものを群遅延時間と定義し，$t_{gr}(\omega)$で表す．すなわち，

$$t_{gr}(\omega)=\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} \tag{4}$$

である．

2.　フーリエ変換の諸定理

フーリエ変換の諸定理の中でも特に繰り返し登場するものとして以下のものがある．なお以下において矢印（→）はフーリエ変換を表す．また上付き文字の「$*$」は共役複素数を表す．

(1) $f(t-\tau)\rightarrow F(\omega)e^{-i\omega\tau}$
(2) 合積のフーリエ変換 $f(t)*g(t)\rightarrow F(\omega)G(\omega)$
(3) 微分のフーリエ変換 $f'(t)\rightarrow i\omega F(\omega)$
(4) $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega$
(5) $f(t)$が実関数のとき$F(\omega)$と$F(-\omega)$は互いに共役
(6) 相互相関関数のフーリエ変換　$\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)g(\tau-t)d\tau\rightarrow F(\omega)G^*(\omega)$　（$g(t)$が実関数のとき）
(7) 自己相関関数のフーリエ変換　$\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)f(\tau-t)d\tau\rightarrow |F(\omega)|^2$　（$f(t)$が実関数のとき）
(8) $t_{gr}(\omega)$は到来時刻を表す

これらの証明を以下に示す．なお，以下の証明ではできるだけ超関数のフーリエ変換を用いないように工夫してみた．また，$t_{gr}(\omega)$が到来時刻を表すことについては別な稿で述べる．

3.　フーリエ変換の諸定理の証明

(1) $f(t-\tau) \rightarrow F(\omega)e^{-i\omega\tau}$

　$f(t-\tau)$のフーリエ変換を定義にしたがって書き下すと

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)e^{-i\omega t}\,dt$$

となる．ここで$t' = t-\tau$と置いて積分変数をtからt'に変換すると，$dt/dt' = 1$なので，

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(t')e^{-i\omega(t'+\tau)}\,dt' = e^{-i\omega\tau}\int_{-\infty}^{\infty} f(t')e^{-i\omega t'}\,dt'$$

となる．右辺の積分は$F(\omega)$そのものなので，

$$I_1 = F(\omega)e^{-i\omega\tau}$$

が得られる．■

(2) 合積のフーリエ変換　$f(t)*g(t) \rightarrow F(\omega)G(\omega)$

　2 つの関数$f(t)$と$g(t)$の合積は

$$f(t)*g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \tag{5}$$

で定義される．合積に関しては$f(t)*g(t) = g(t)*f(t)$が成り立つ．合積のフーリエ変換を定義にしたがって書き下すと

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau\right)e^{-i\omega t}\,dt$$

積分の順序を変更してtに関する積分を先に行うことにすると

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)e^{-i\omega t}\,dt\right)g(\tau)\,d\tau$$

右辺の括弧内に対して(1)の結果を用いると

$$I_2 = F(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau = F(\omega)G(\omega)$$

が得られる．■

(3) 微分のフーリエ変換　$f'(t) \to i\omega F(\omega)$

$f(t)$の時間微分$f'(t)$のフーリエ変換を定義にしたがって書き下すと

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-i\omega t}\, dt$$

部分積分を適用すると

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} (f(t)e^{-i\omega t})' dt + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt \\ &= [f(t)e^{-i\omega t}]_{t=-\infty}^{t=\infty} + i\omega F(\omega) \end{aligned} \tag{6}$$

ここで，地震工学では通常は始まりと終わりがある地震波形を扱うため，$t = -\infty$と$t = \infty$で$f(t) = 0$，すなわち右辺第一項はゼロと考えて良いだろう．そうすると

$$I_3 = i\omega F(\omega)$$

が得られる．すなわち，時間領域の微分は周波数領域では$i\omega$を乗じる操作に対応する．■

同様に，時間領域の積分は周波数領域では$i\omega$で割る操作に対応する．$i\omega$で割るときに$\omega = 0$に対してはフーリエ変換が求まらないが，これは一般に関数の積分は初期条件の分だけ不確定であることに対応する．

なお，断層近傍で観測される変位波形のように$t = \infty$で$f(t) = 0$とならない波形については，式(6)の右辺第一項はゼロとはならず，また，そもそも式(1)の広義積分でフーリエ変換を定義することにも無理がある．この場合の対処法については別なところで述べる．

(4) $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega$

この式はパーセバルの定理とよばれる．この式の左辺は

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t)\, dt \tag{7}$$

である．一方，式(2)の両辺の共役複素数をとると

$$f^*(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) e^{-i\omega t}\, d\omega \tag{8}$$

である．式(8)を式(7)に代入すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) e^{-i\omega t}\, d\omega \right) dt$$

である．ここで積分の順序を変更しtに関する積分を先に行うことにすると

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt \right) F^*(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F^*(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega$$

が得られる．■

(5) $f(t)$が実関数のとき$F(\omega)$と$F(-\omega)$は互いに共役

　フーリエ変換の定義により

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}\,dt$$
$$F(-\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\omega t}\,dt$$

であるが，$f(t)$が実関数のとき，これらの右辺は互いに共役である．■

　この性質は極めて頻繁に用いられる．例えば地盤の地震応答計算を周波数領域で行うとき，ある一つの点の応答$f(t)$のフーリエ変換$F(\omega)$を求めるが，その際，$\omega<0$に対して$F(\omega)$を計算する必要はない．$\omega<0$に対する$F(\omega)$は$\omega>0$に対する$F(\omega)$から上記の性質を利用して求められるからである．

(6) 相互相関関数のフーリエ変換　$\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)g(\tau-t)d\tau\rightarrow F(\omega)G^*(\omega)$

　2つの関数$f(t)$と$g(t)$の相互相関関数は

$$R_{fg}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)g(\tau-t)d\tau$$

で定義される．これを式(5)の合積の定義と比較すると，

$$R_{fg}(t)=f(t)*g(-t)$$

である．したがって，相互相関関数のフーリエ変換は$f(t)$のフーリエ変換と$g(-t)$のフーリエ変換の積である．ここで，$g(-t)$のフーリエ変換を定義にしたがって書き下すと

$$I_4=\int_{-\infty}^{\infty}g(-t)e^{-i\omega t}\,dt$$

となる．ここで$t'=-t$と置いて積分変数をtからt'に変換すると，$dt/dt'=-1$なので，

$$I_4=\int_{-\infty}^{\infty}g(t')e^{i\omega t'}\,dt'$$

となるが，この右辺は$g(t)$が実関数のとき$g(t)$のフーリエ変換の共役複素数すなわち$G^*(\omega)$となる．したがって，$g(t)$が実関数のとき，相互相関関数のフーリエ変換は$F(\omega)G^*(\omega)$である．■

(7) 自己相関関数のフーリエ変換　$\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)f(\tau-t)d\tau\rightarrow|F(\omega)|^2$

　(6)で$g(t)=f(t)$であるような特別の場合を考えれば，$f(t)$が実関数のとき，自己相関関数のフーリエ変換は$F(\omega)F^*(\omega)=|F(\omega)|^2$すなわち本稿のはじめの方で定義したパワースペクトルであることがわかる．■

(8) $t_{gr}(\omega)$は到来時刻を表す

　この性質については別な稿で述べる．