第 1 版 2017/10/8
第 2 版 2019/7/13
第 3 版 2020/3/29

変位場のポテンシャル

野津

1. はじめに

Navier の式を満たす変位場については，物体力がない場合，スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルを変位場そのものから求めることができ[1]，これらを用いることにより，変位場を P 波速度のみに関係する項（P 波成分）と S 波速度のみに関係する項（S 波成分）の和で表すことができる．また，このうちの S 波成分は SV 波成分と SH 波成分の和で表すことができる．以下ではこれらのことについて説明する．なお，ここで言う P 波成分，S 波成分，SV 波成分，SH 波成分は実体波だけでなく inhomogeneous wave も含むため，厳密には「広義の」を付けて呼ぶべきかも知れない．

ポテンシャルについて論じるとき，一般のベクトル場に関する議論に陥ると見通しが悪くなる．弾性波動論において対象とすべきなのは Navier の式を満たす変位場であるから，波動方程式を満たすポテンシャルに特化して議論を展開することが得策であり，そうすることにより大幅に見通しが良くなる．

2. 変位場を P 波成分と S 波成分に分ける

以下においては，物体力が無い場合の Navier の式

$$\rho \ddot{u}_i = \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} \tag{1}$$

の解であるような変位場を議論の対象とする．ただし，変位場は広義積分によるフーリエ変換が可能なものとする．静弾性問題の解は広義積分によるフーリエ変換ができないから以下の議論の対象外である．式(1)のフーリエ変換は

$$\rho \omega^2 \hat{u}_i + \mu \hat{u}_{i,jj} + (\lambda + \mu) \hat{u}_{j,ji} = 0 \tag{2}$$

で与えられるが，ここではこれと等価な式として

$$\rho \omega^2 \hat{\boldsymbol{u}} + (\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{u}}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \hat{\boldsymbol{u}}) = \boldsymbol{0} \tag{3}$$

を考える．式(2)と式(3)が等価であることはベクトル場に関する公式

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} \tag{4}$$

からわかる（ここに$\boldsymbol{A}$は任意のベクトル場である）．ポテンシャルに関する議論をするときは式(2)より式(3)の方が見通しが良いので以降は式(3)に基づいて議論を進める．

さて，式(3)を満足するような変位場（のフーリエ変換，以後フーリエ変換という言葉は省略する）$\hat{\boldsymbol{u}}$が与えられたとき，

$$\hat{\phi} = -(\alpha/\omega)^2 \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{u}} \tag{5}$$
$$\hat{\boldsymbol{\psi}} = (\beta/\omega)^2 \nabla \times \hat{\boldsymbol{u}} \tag{6}$$

によりスカラー場$\hat{\phi}$とベクトル場$\hat{\boldsymbol{\psi}}$を決めれば，

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \nabla\hat{\phi} + \nabla\times\hat{\boldsymbol{\psi}} \tag{7}$$

である．すなわち$\hat{\boldsymbol{u}}$のスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル（の一つ）は式(5)(6)で与えられる．ここにαは P 波速度，βは S 波速度である．また，$\hat{\phi}$と$\hat{\boldsymbol{\psi}}$は次式を満たす（式(9)(10)は波動方程式）．

$$\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\psi}} = 0 \tag{8}$$

$$\nabla^2\hat{\phi} + (\omega/\alpha)^2\hat{\phi} = 0 \tag{9}$$

$$\nabla^2\hat{\boldsymbol{\psi}} + (\omega/\beta)^2\hat{\boldsymbol{\psi}} = \boldsymbol{0} \tag{10}$$

以下，これらの式を証明する．
まず式(7)を証明する．式(7)の右辺を定義に従って計算すると

$$\begin{aligned}\nabla\hat{\phi} + \nabla\times\hat{\boldsymbol{\psi}} &= -(\alpha/\omega)^2\nabla(\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{u}}) + (\beta/\omega)^2\nabla\times(\nabla\times\hat{\boldsymbol{u}}) \\ &= -\frac{1}{\rho\omega^2}\{(\lambda+2\mu)\nabla(\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{u}}) - \mu\nabla\times(\nabla\times\hat{\boldsymbol{u}})\}\end{aligned}$$

となるがこの右辺は式(3)より$\hat{\boldsymbol{u}}$に等しい．■
次に式(8)を証明する．式(8)の左辺を定義に従って計算すると

$$\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\psi}} = (\beta/\omega)^2\nabla\cdot(\nabla\times\hat{\boldsymbol{u}})$$

となるが，回転の発散はゼロであるから右辺はゼロとなる．■
つづいて式(9)を証明する．式(3)の両辺の発散をとると

$$\rho\omega^2\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{u}} + (\lambda+2\mu)\nabla\cdot\nabla(\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{u}}) - \mu\nabla\cdot\nabla\times(\nabla\times\hat{\boldsymbol{u}}) = 0$$

となるが，回転の発散はゼロであるから左辺第 3 項はゼロとなり

$$\begin{aligned}\rho\omega^2\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{u}} + (\lambda+2\mu)\nabla\cdot\nabla(\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{u}}) &= 0 \\ \therefore\ \rho\omega^2\hat{\phi} + (\lambda+2\mu)\nabla^2\hat{\phi} &= 0 \\ \therefore\ (\omega/\alpha)^2\hat{\phi} + \nabla^2\hat{\phi} &= 0\end{aligned}$$

となる．■
最後に式(10)を証明する．式(3)の両辺の回転をとると

$$\rho\omega^2\nabla\times\hat{\boldsymbol{u}} + (\lambda+2\mu)\nabla\times\big(\nabla(\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{u}})\big) - \mu\nabla\times\big(\nabla\times(\nabla\times\hat{\boldsymbol{u}})\big) = \boldsymbol{0}$$

となるが，勾配の回転はゼロであるから左辺第 2 項はゼロとなり

$$\begin{aligned}\rho\omega^2\nabla\times\hat{\boldsymbol{u}} - \mu\nabla\times\big(\nabla\times(\nabla\times\hat{\boldsymbol{u}})\big) &= \boldsymbol{0} \\ \therefore\ \rho\omega^2\hat{\boldsymbol{\psi}} - \mu\nabla\times\big(\nabla\times\hat{\boldsymbol{\psi}}\big) &= \boldsymbol{0}\end{aligned}$$

式(4)(8)より

$$\rho\omega^2\widehat{\boldsymbol{\psi}} + \mu\nabla^2\widehat{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{0}$$
$$\therefore\ (\omega/\beta)^2\widehat{\boldsymbol{\psi}} + \nabla^2\widehat{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{0}$$

となる．■

式(7)を導く過程では Navier の式そのものを用いている．従って，スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルが式(5)(6)で与えられるのは Navier の式の解としての変位場に特有の性質であると言える．

ここで

$$\widehat{\boldsymbol{u}}^P = \nabla\widehat{\phi} \tag{11}$$
$$\widehat{\boldsymbol{u}}^S = \nabla\times\widehat{\boldsymbol{\psi}} \tag{12}$$

とおくと

$$\widehat{\boldsymbol{u}} = \widehat{\boldsymbol{u}}^P + \widehat{\boldsymbol{u}}^S \tag{13}$$

である．$\widehat{\boldsymbol{u}}^P$の回転はゼロであり（勾配の回転はゼロ），$\widehat{\boldsymbol{u}}^S$の発散はゼロである（回転の発散はゼロ）．

$\widehat{\boldsymbol{u}}^P$と$\widehat{\boldsymbol{u}}^S$はそれぞれ単独でも Navier の式を満足する（つまり単独でも弾性体中を伝播できる）．実際，$\widehat{\boldsymbol{u}}^P$を式(3)の左辺に代入すると

$$\begin{aligned}
&\rho\omega^2\nabla\widehat{\phi} + (\lambda+2\mu)\nabla\left(\nabla\cdot\nabla\widehat{\phi}\right) - \mu\nabla\times\left(\nabla\times\left(\nabla\widehat{\phi}\right)\right)\\
&= (\lambda+2\mu)\nabla\left\{(\omega/\alpha)^2\widehat{\phi} + \nabla^2\widehat{\phi}\right\} \qquad (\because\text{勾配の回転はゼロ})
\end{aligned}$$

となるが，式(9)よりこれはゼロであり，$\widehat{\boldsymbol{u}}^S$を式(3)の左辺に代入すると

$$\begin{aligned}
&\rho\omega^2\nabla\times\widehat{\boldsymbol{\psi}} + (\lambda+2\mu)\nabla\left(\nabla\cdot\left(\nabla\times\widehat{\boldsymbol{\psi}}\right)\right) - \mu\nabla\times\left(\nabla\times\left(\nabla\times\widehat{\boldsymbol{\psi}}\right)\right)\\
&= \nabla\times\left\{\rho\omega^2\widehat{\boldsymbol{\psi}} - \mu\nabla\times\left(\nabla\times\widehat{\boldsymbol{\psi}}\right)\right\} \qquad (\because\text{回転の発散はゼロ})\\
&= \mu\nabla\times\left\{(\omega/\beta)^2\widehat{\boldsymbol{\psi}} + \nabla^2\widehat{\boldsymbol{\psi}}\right\} \qquad (\because\text{式(4)(8)})
\end{aligned}$$

となるが，式(10)よりこれはゼロである．

ここまでの議論から，式(3)の解である変位場は，フーリエ変換可能である限り，P 波速度のみに関係する項（P 波成分）と S 波速度のみに関係する項（S 波成分）に分離できることがわかった．

$$\widehat{\boldsymbol{u}} = \underbrace{\nabla\widehat{\phi}}_{P\text{波成分}\widehat{\boldsymbol{u}}^P} + \underbrace{\nabla\times\widehat{\boldsymbol{\psi}}}_{S\text{波成分}\widehat{\boldsymbol{u}}^S} \tag{14}$$

このことは，様々な場面で解析の見通しを良くしてくれる．なお，式(3)においては物体力が無いものとしているが，このことにより上記の議論の汎用性が大きく損なわれるわけではない．なぜなら，物体力として例えばグリーン関数を求める際の集中荷重を考える場合であっても，集中荷重がまさに作用している点を除けば式(3)は成立するので，やはり変位場を P 波成分と S 波成分に分けることができるからである．

3.　波数空間におけるポテンシャル

ここまでは式(3)の解である変位場を P 波成分と S 波成分に分けることについて説明してきたが，S 波成分をさらに SV 波成分と SH 波成分に分ける[2)]ことが次の課題となる．この分離は波数空間で行わなければいかにも見通しが悪い．そこで，ここから先は対象とする変位場に制約を加えて，空間座標に関する 3 重フーリエ変換が広義積分

$$\tilde{\boldsymbol{u}}(k_1,k_2,k_3)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\boldsymbol{u}}(x_1,x_2,x_3)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}dx_1dx_2dx_3 \tag{15}$$

によって定義できるような変位場を対象とすることにする．ここに$\hat{\boldsymbol{u}}$は変換前の変位場,$\tilde{\boldsymbol{u}}$は変換後の変位場,

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}=k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3 \tag{16}$$

である．これまで変位やポテンシャルの時間に関するフーリエ変換には$\hat{}$を付けていたが，これらに空間座標に関する 3 重フーリエ変換を適用したものには$\tilde{}$を付けることにする．フーリエ変換が式(15)で与えられるとき，逆変換は

$$\hat{\boldsymbol{u}}(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\boldsymbol{u}}(k_1,k_2,k_3)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}dk_1dk_2dk_3 \tag{17}$$

で与えられる．なお，空間座標に関する 3 重フーリエ変換が広義積分によって定義できるような変位場を考えるということは，遠方において十分に早く減衰するような変位場を考えるということである．これに伴い，式(5)(6)で決まるポテンシャルと式(11)(12)で決まる P 波成分，S 波成分も遠方において十分に早く減衰することになる．

式(17)の被積分関数に含まれる$e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$に着目すると，これにフーリエ逆変換を適用して時間の関数に戻す際には$e^{i\omega t}$を乗じることになるので，

$$e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}e^{i\omega t}=e^{i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})} \tag{18}$$

のような形が表れる．これは進行方向が$\boldsymbol{k}$で表される平面波を表す．したがって，式(17)は$\hat{\boldsymbol{u}}$が様々な方向に進む平面波の重ね合わせで表されることを示している．$\tilde{\boldsymbol{u}}$は各方向に進む平面波の振幅を表す．$\tilde{\boldsymbol{u}}$が

$$\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k})\propto\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}^*) \tag{19}$$

のように波数空間の一点$\boldsymbol{k}^*$のみで値をもつとき，元の変位場は一方向に進む平面波（進行方向ベクトル$\boldsymbol{k}^*$）である（**図-1**）．ただし，このとき，元の変位場は無限遠方まで値を持つことになるから，式(15)によるフーリエ変換は不可能である．ここでは式(15)によるフーリエ変換が可能であるとしているので，$\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k})$はデルタ関数を含まないことになる．

ここで式(11)を成分で表示すると

$$\hat{u}_i^P=\frac{\partial}{\partial x_i}\hat{\phi} \tag{20}$$

となり，両辺に空間座標に関する 3 重フーリエ変換を適用すると

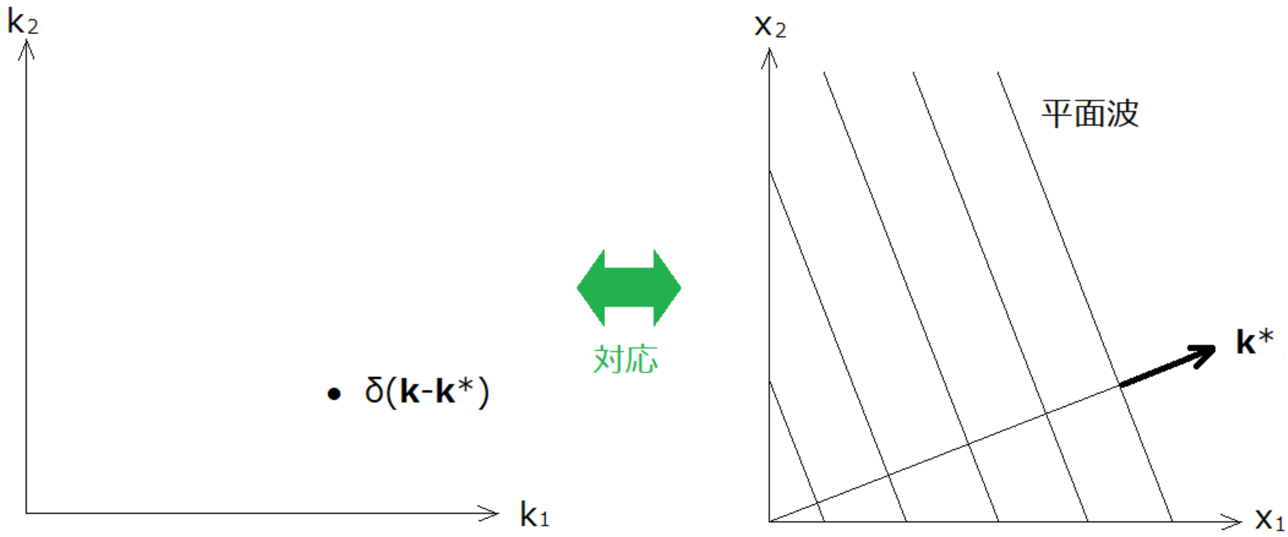

図-1　$\tilde{\boldsymbol{u}}$が波数空間の一点$\boldsymbol{k}^*$のみで値をもつ場合，元の変位場は一方向に進む平面波である

$$\tilde{u}_i^P = -ik_i\tilde{\phi} \tag{21}$$

となる．これをベクトル表示に戻すと

$$\tilde{\boldsymbol{u}}^P = -i\tilde{\phi}\boldsymbol{k} \tag{22}$$

となる．これより，波数空間においては P 波成分は$\boldsymbol{k}$に平行であることがわかる．次に，式(12)を成分で表示すると

$$\hat{u}_i^S = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\hat{\psi}_k \tag{23}$$

となり，両辺に空間座標に関する 3 重フーリエ変換を適用すると

$$\tilde{u}_i^S = -i\varepsilon_{ijk}k_j\tilde{\psi}_k \tag{24}$$

となる．これをベクトル表示に戻すと

$$\tilde{\boldsymbol{u}}^S = -i\boldsymbol{k}\times\tilde{\boldsymbol{\psi}} \tag{25}$$

となる．これより，波数空間においては S 波成分は$\boldsymbol{k}$に垂直であることがわかる．このように，少なくとも平面波である限り，P 波成分は進行方向ベクトルに平行な成分のみを有し，S 波成分は進行方向ベクトルに垂直な成分のみを有する．しかし，円筒波や球面波を対象とする場合は，このような直感的にもわかりやすい原則から外れる例も出てくる．

　一方，$\hat{\phi}$が波動方程式を満たすという条件すなわち式(9)を成分で表示すると

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\hat{\phi} + (\omega/\alpha)^2\hat{\phi} = 0 \tag{26}$$

となり，両辺に空間座標に関する 3 重フーリエ変換を適用すると

$$[|\boldsymbol{k}|^2-(\omega/\alpha)^2]\tilde{\phi}=0 \tag{27}$$

となる．したがって，$\hat{\phi}$が波動方程式を満たすという条件は波数空間では$\tilde{\phi}$が半径ω/αの球面上でのみ値をもつという条件に置き換わる．同じように，$\hat{\boldsymbol{\psi}}$が波動方程式を満たすという条件は波数空間では$\tilde{\boldsymbol{\psi}}$が半径$\omega/\beta$の球面上でのみ値をもつという条件に置き換わる．さらに，$\hat{\boldsymbol{\psi}}$の発散がゼロであるという条件すなわち式(8)を成分で表示すると

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\hat{\psi}_i=0 \tag{28}$$

となり，両辺に空間座標に関する 3 重フーリエ変換を適用すると

$$-ik_i\tilde{\psi}_i=0 \tag{29}$$

となる．したがって，$\hat{\boldsymbol{\psi}}$の発散がゼロであるという条件は波数空間では$\tilde{\boldsymbol{\psi}}$と$\boldsymbol{k}$が直交するという条件に置き換わる．この条件はこの後用いる．

4.　S 波成分を SV 波成分と SH 波成分に分ける

ここからは，Aki and Richards[2)]などで行われているように，S 波成分を SV 波成分$\hat{\boldsymbol{u}}^{SV}$と SH 波成分$\hat{\boldsymbol{u}}^{SH}$に分けることを考える．

$$\hat{\boldsymbol{u}}=\underbrace{\nabla\hat{\phi}}_{P\text{波成分}}+\underbrace{\nabla\times\left(\nabla\times\begin{pmatrix}0\\0\\\hat{p}\end{pmatrix}\right)}_{SV\text{波成分}\hat{\boldsymbol{u}}^{SV}}+\underbrace{\nabla\times\begin{pmatrix}0\\0\\\hat{q}\end{pmatrix}}_{SH\text{波成分}\hat{\boldsymbol{u}}^{SH}} \tag{30}$$

$$\nabla^2\hat{p}+(\omega/\beta)^2\hat{p}=0 \tag{31}$$

$$\nabla^2\hat{q}+(\omega/\beta)^2\hat{q}=0 \tag{32}$$

SV 波と SH 波への分離は鉛直成分が決まっていなければ意味をなさないので，ここではx_3軸の正方向を鉛直下方とする．ノーテーションについては，Aki and Richards の Box6.5 では$\hat{p}$の代わりにψ，$\hat{q}$の代わりにχを用いているが，本稿では既に$\hat{\boldsymbol{\psi}}$を用いており，混乱を避けるため$\hat{p}$と$\hat{q}$を用いる．

ここから先，しばらくの間，波数空間の一点に着目する．ただし，この一点はk_3軸上にはないものとする．このことは，鉛直方向に伝播する平面波を考察の対象から除外することを意味する．

図-2 はk_3軸とベクトル$\boldsymbol{k}$を含む平面を示したものである．式(25)よりベクトル$\tilde{\boldsymbol{u}}^S$はベクトル$\boldsymbol{k}$に垂直である．いま，ベクトル$\tilde{\boldsymbol{u}}^S$を面内成分$\tilde{\boldsymbol{u}}^{SV}$と面外成分$\tilde{\boldsymbol{u}}^{SH}$に分ける（図-2）．

$$\tilde{\boldsymbol{u}}^S=\tilde{\boldsymbol{u}}^{SV}+\tilde{\boldsymbol{u}}^{SH} \tag{33}$$

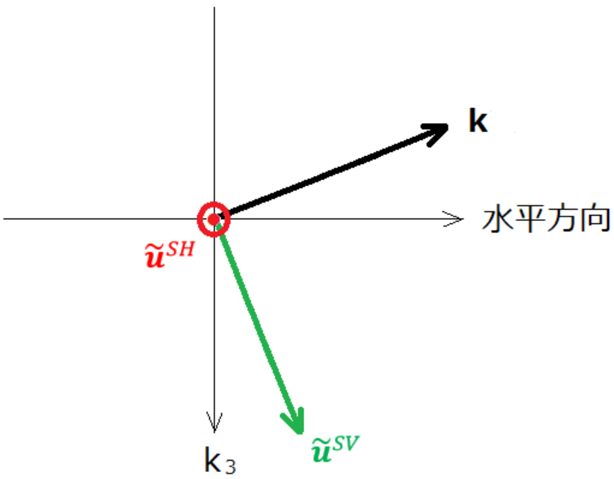

図-2　ベクトル$\tilde{\boldsymbol{u}}^{S}$を面内成分$\tilde{\boldsymbol{u}}^{SV}$と面外成分$\tilde{\boldsymbol{u}}^{SH}$に分ける

このうち$\tilde{\boldsymbol{u}}^{SV}$は，その方向を考えると，ベクトルの外積の演算を二回繰り返すことで

$$\tilde{\boldsymbol{u}}^{SV} = -i\boldsymbol{k} \times \left(-i\boldsymbol{k} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{p} \end{pmatrix} \right) \tag{34}$$

と表すことができる．また$\tilde{\boldsymbol{u}}^{SH}$はベクトルの外積の演算を一回行うことで

$$\tilde{\boldsymbol{u}}^{SH} = -i\boldsymbol{k} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{q} \end{pmatrix} \tag{35}$$

と表すことができる．これらより

$$\tilde{\boldsymbol{u}}^{S} = -i\boldsymbol{k} \times \left(-i\boldsymbol{k} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{p} \end{pmatrix} \right) - i\boldsymbol{k} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{q} \end{pmatrix} \tag{36}$$

である．$\tilde{p}$と$\tilde{q}$の値はベクトル$\tilde{\boldsymbol{u}}^{S}$が適切に再現されるように設定する必要があり，結果的には，$\tilde{\boldsymbol{\psi}}$の成分を

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}} = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_2 \\ \tilde{\psi}_3 \end{pmatrix} \tag{37}$$

としたとき

$$\tilde{p} = -i\frac{k_1\tilde{\psi}_2 - k_2\tilde{\psi}_1}{{k_1}^2 + {k_2}^2} \tag{38}$$

$$\tilde{q} = \frac{{k_1}^2 + {k_2}^2 + {k_3}^2}{{k_1}^2 + {k_2}^2}\tilde{\psi}_3 \tag{39}$$

とすれば良いことがわかる．このとき，式(36)から計算される$\tilde{\boldsymbol{u}}^S$と式(25)から計算される$\tilde{\boldsymbol{u}}^S$が一致することが成分の比較から確認できる（このとき式(29)を用いる）．

以上により，波数空間のk_3軸上以外の点では$\tilde{p}$と$\tilde{q}$が求まったが，ここで一つ，k_3軸上では$\tilde{p}$と$\tilde{q}$が一つに定まらないという問題点が残されている．もともと**図-2** のように$\tilde{\boldsymbol{u}}^{SV}$と$\tilde{\boldsymbol{u}}^{SH}$を定めている関係上，波数空間における点を$k_3$軸に近づけていったとき，$\tilde{\boldsymbol{u}}^{SV}$と$\tilde{\boldsymbol{u}}^{SH}$は一つのベクトルには収束しない．このことは，鉛直方向に伝播する平面波に対応するポテンシャルが求まらない問題として知られている[3)]．ただし，ここでは$\hat{\boldsymbol{u}}^S$として広義積分による 3 重フーリエ変換が可能なものを考えているため, 上記の問題点は次のように回避できる．

まず，k_3軸上では$\tilde{p}=0$かつ$\tilde{q}=0$と約束しておく．これにより$\tilde{p}$と$\tilde{q}$のフーリエ逆変換が可能となる．次に$\tilde{\boldsymbol{u}}^S$にフーリエ逆変換を適用して$\hat{\boldsymbol{u}}^S$を求めることを考える．

$$\hat{\boldsymbol{u}}^S(\boldsymbol{x})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_V \tilde{\boldsymbol{u}}^S(\boldsymbol{k})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}dV \tag{40}$$

ここにVは全空間を表す．Vはk_3軸を含む十分に小さな領域V_ϵとその外側の領域$V-V_\epsilon$に分けることができ

$$\hat{\boldsymbol{u}}^S(\boldsymbol{x})=\frac{1}{(2\pi)^3}\lim_{V_\epsilon\to 0}\int_{V-V_\epsilon}\tilde{\boldsymbol{u}}^S(\boldsymbol{k})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}dV+\frac{1}{(2\pi)^3}\lim_{V_\epsilon\to 0}\int_{V_\epsilon}\tilde{\boldsymbol{u}}^S(\boldsymbol{k})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}dV \tag{41}$$

ここで, $\hat{\boldsymbol{u}}^S$としては広義積分による 3 重フーリエ変換が可能なものを考えているため，どの$\boldsymbol{k}$に対しても$\tilde{\boldsymbol{u}}^S$は有限な値となる．したがって，第 2 項はゼロに収束し

$$\hat{\boldsymbol{u}}^S(\boldsymbol{x})=\frac{1}{(2\pi)^3}\lim_{V_\epsilon\to 0}\int_{V-V_\epsilon}\tilde{\boldsymbol{u}}^S(\boldsymbol{k})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}dV \tag{42}$$

となる．V_ϵの外では式(36)が成立しているので

$$\hat{\boldsymbol{u}}^S(\boldsymbol{x})=\frac{1}{(2\pi)^3}\lim_{V_\epsilon\to 0}\int_{V-V_\epsilon}\left\{-i\boldsymbol{k}\times\left(-i\boldsymbol{k}\times\begin{pmatrix}0\\0\\\tilde{p}\end{pmatrix}\right)-i\boldsymbol{k}\times\begin{pmatrix}0\\0\\\tilde{q}\end{pmatrix}\right\}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}dV \tag{43}$$

であり，k_3軸上では$\tilde{p}=0$かつ$\tilde{q}=0$であることと考え合わせると

$$\hat{\boldsymbol{u}}^S(\boldsymbol{x})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_V\left\{-i\boldsymbol{k}\times\left(-i\boldsymbol{k}\times\begin{pmatrix}0\\0\\\tilde{p}\end{pmatrix}\right)-i\boldsymbol{k}\times\begin{pmatrix}0\\0\\\tilde{q}\end{pmatrix}\right\}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}dV \tag{44}$$

となる．右辺は通常のフーリエ逆変換であり，これを計算すると

$$\hat{\boldsymbol{u}}^S(\boldsymbol{x})=\nabla\times\left(\nabla\times\begin{pmatrix}0\\0\\\hat{p}\end{pmatrix}\right)+\nabla\times\begin{pmatrix}0\\0\\\hat{q}\end{pmatrix} \tag{45}$$

が得られ，これとP波成分を合わせると式(30)が得られる．結論として，鉛直方向に伝播する平面波に対応するポテンシャルが求まらないという問題は確かに残るけれども，遠方において十分に早く減衰する変位場を対象とする場合は，このことは特に問題とはならないと言える．

なお，$\hat{p}$と$\hat{q}$が波動方程式を満たすこと（式(31)(32)）については，やはり波数空間で考えるとわかりやすい．もともと$\widehat{\boldsymbol{\psi}}$の各成分は波動方程式を満たすので，$\widetilde{\boldsymbol{\psi}}$の各成分は波数空間において半径$\omega/\beta$の球面上でのみ値をもつ．したがって式(38)(39)より$\tilde{p}$と$\tilde{q}$も半径ω/βの球面上でのみ値をもつ．したがって$\hat{p}$と$\hat{q}$は波動方程式を満たす．

最後に，ここで求めた$\hat{\boldsymbol{u}}^{SV}$と$\hat{\boldsymbol{u}}^{SH}$がそれぞれ単独でもNavierの式を満足する（つまり単独でも弾性体中を伝播できる）ことを確認しておく．$\hat{\boldsymbol{u}}^{SV}$を式(3)の左辺に代入すると

$$\rho\omega^2\nabla\times\left(\nabla\times\begin{pmatrix}0\\0\\\hat{p}\end{pmatrix}\right)+(\lambda+2\mu)\nabla\left(\nabla\cdot\left(\nabla\times\left(\nabla\times\begin{pmatrix}0\\0\\\hat{p}\end{pmatrix}\right)\right)\right)-\mu\nabla\times\left(\nabla\times\left(\nabla\times\left(\nabla\times\begin{pmatrix}0\\0\\\hat{p}\end{pmatrix}\right)\right)\right)$$

$$=\nabla\times\left\{\nabla\times\left\{\rho\omega^2\begin{pmatrix}0\\0\\\hat{p}\end{pmatrix}-\mu\nabla\times\left(\nabla\times\begin{pmatrix}0\\0\\\hat{p}\end{pmatrix}\right)\right\}\right\}\qquad(\because\text{回転の発散はゼロ})$$

$$=\mu\nabla\times\left\{\nabla\times\left\{(\omega/\beta)^2\begin{pmatrix}0\\0\\\hat{p}\end{pmatrix}+\nabla^2\begin{pmatrix}0\\0\\\hat{p}\end{pmatrix}\right\}\right\}\qquad(\because\text{式(4)})$$

となるが，式(31)よりこれはゼロであり，$\hat{\boldsymbol{u}}^{SH}$を式(3)の左辺に代入すると

$$\rho\omega^2\nabla\times\begin{pmatrix}0\\0\\\hat{q}\end{pmatrix}+(\lambda+2\mu)\nabla\left(\nabla\cdot\left(\nabla\times\begin{pmatrix}0\\0\\\hat{q}\end{pmatrix}\right)\right)-\mu\nabla\times\left(\nabla\times\left(\nabla\times\begin{pmatrix}0\\0\\\hat{q}\end{pmatrix}\right)\right)$$

$$=\nabla\times\left\{\rho\omega^2\begin{pmatrix}0\\0\\\hat{q}\end{pmatrix}-\mu\nabla\times\left(\nabla\times\begin{pmatrix}0\\0\\\hat{q}\end{pmatrix}\right)\right\}\qquad(\because\text{回転の発散はゼロ})$$

$$=\mu\nabla\times\left\{\nabla\times\left\{(\omega/\beta)^2\begin{pmatrix}0\\0\\\hat{q}\end{pmatrix}+\nabla^2\begin{pmatrix}0\\0\\\hat{q}\end{pmatrix}\right\}\right\}\qquad(\because\text{式(4)})$$

となるが，式(32)よりこれはゼロである．よって$\hat{\boldsymbol{u}}^{SV}$と$\hat{\boldsymbol{u}}^{SH}$はそれぞれ単独でもNavierの式を満足する．

参考文献

1) Wapenaar, K. and J. Fokkema: Green's function representation for seismic interferometry, Geophysics, Vol.71, No.4, pp.SI33-SI46, 2006.

2) Aki, K. and P.G. Richards: Quantitative Seismology, Second Edition, University Science Books, Sausalito, California, 2002.

3) Honda, R. and K. Yomogida: Contribution of vertically travelling plane S-waves to dynamic and static displacements near a finite fault, Geophys. J. Int., Vol.152, pp.443-454, 2003.