

## 1. はじめに

断層近傍の地震動には近地項・中間項が含まれ、それにより残留変位を含む波形が断層近傍にもたらされる。増田・引間(2002)は円形断層で同時にすべりが生じたときの円の中心軸に沿った観測点での地震動のすべり方向成分に関する解析解を求めている<sup>1)2)</sup>。この解析解は、後述するように、観測点を断層面に近づけていったときすべり時間関数の $1/2$ に収束し(断層面を挟んで両側が変位するので $1/2$ が付く)、観測点が十分に遠方の時は遠地項に一致するというたいへん美しい性質を有している。この解析解はあくまでも円形断層が同時にすべった場合に対応し破壊伝播の効果は入っていないこと、あくまでもすべり方向成分に関する解析解であり断層直交成分については述べていないこと(この点については5.で述べる)、などに注意する必要があるものの、近地項・中間項を含む地震動の解析解としてたいへん貴重な存在であり、近地項・中間項を含む強震動シミュレーション手法のverificationなどに利用可能である。

この解析解の導出過程は若干複雑であるが、文献1)2)には導出過程が示されていないため、以下に著者が理解した流れに沿って導出過程を示す。

## 2. 前提条件

図-1に示すように半径 $a$ の円形断層において同時にすべりが生じるとする。図-1に示すように断層面内に $x_1$ 軸と $x_2$ 軸を、断層面に垂直に $x_3$ 軸をとる。すべりの向きは $x_1$ 方向とし、すべり時間関数は $D(t)$ で与えられるとする。この条件の下で、円の中心軸に沿った観測点 $(0, 0, r_0)$ での $x_1$ 方向の変位 $u(r_0, t)$ を求める。以下、文献1)2)に倣い、 $D(t)$ のフーリエ変換を $\Delta(\omega)$ 、 $u(r_0, t)$ のフーリエ変換を $\Omega(r_0, \omega)$ と書く。

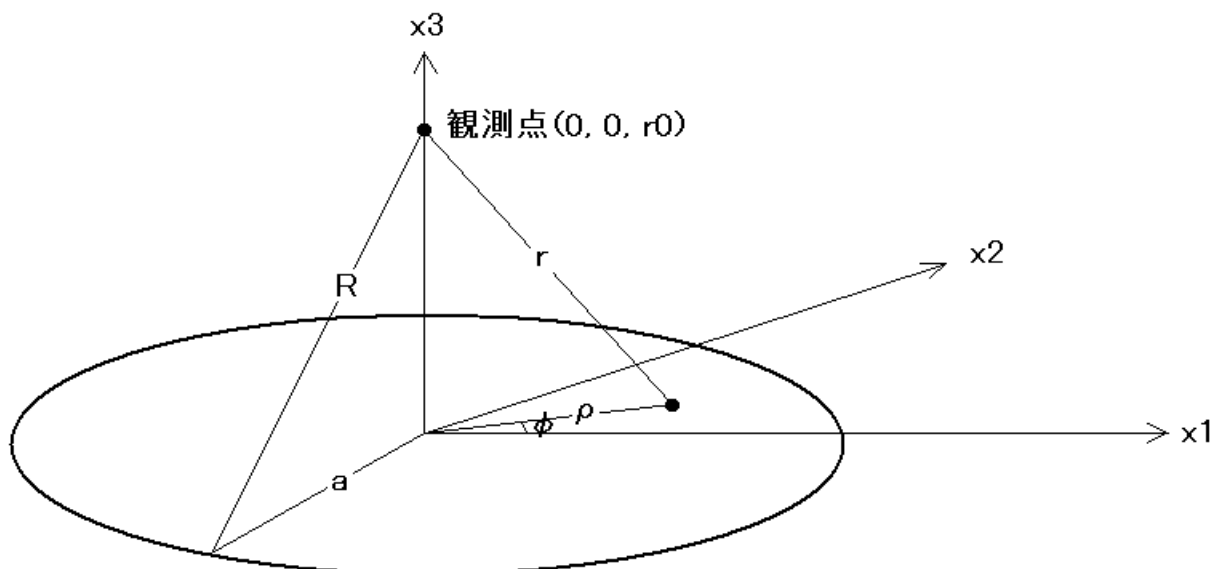


図-1 対象とする円形断層と観測点

### 3. 解析解の導出

断層面上の任意の点（原点からの距離 $\rho$ ）から観測点までの距離を $r$ とすると、[全無限弾性体におけるせん断食い違い型点震源による地震動](#)の式(12)（または文献<sup>3)</sup>の式(4.32)）より、 $u(r_0, t)$ は次のように表すことができる（文献<sup>2)</sup>の式(2)）。

$$u(r_0, t) = \frac{\beta^2}{4\pi} \left[ \begin{aligned} & \int dS \frac{1}{r^4} 6(5\gamma_1^2 - 1)\gamma_3 \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau D(t - \tau) d\tau \\ & + \int dS \frac{1}{r^2} 2(6\gamma_1^2 - 1)\gamma_3 \frac{1}{\alpha^2} D(t - r/\alpha) \\ & - \int dS \frac{1}{r^2} 3(4\gamma_1^2 - 1)\gamma_3 \frac{1}{\beta^2} D(t - r/\beta) \\ & + \int dS \frac{1}{r} 2\gamma_1^2 \gamma_3 \frac{1}{\alpha^3} \dot{D}(t - r/\alpha) \\ & - \int dS \frac{1}{r} (2\gamma_1^2 - 1)\gamma_3 \frac{1}{\beta^3} \dot{D}(t - r/\beta) \end{aligned} \right] \quad (1)$$

ここに $\int dS$ は断層面上での積分、 $\gamma_i (i = 1, 3)$ は断層面上の点から観測点に向かうベクトルの方向余弦である。また $r^2 = r_0^2 + \rho^2$ である。

ここで、式(1)の両辺をフーリエ変換する。このとき、式(1)右辺括弧内の積分 $\int \tau D(t - \tau) d\tau$ のフーリエ変換については次のように考えることができる。まず、次式で示されるような時間の関数 $g(t)$ を導入する。 $g(t)$ を図に示すと図-2のようになる。

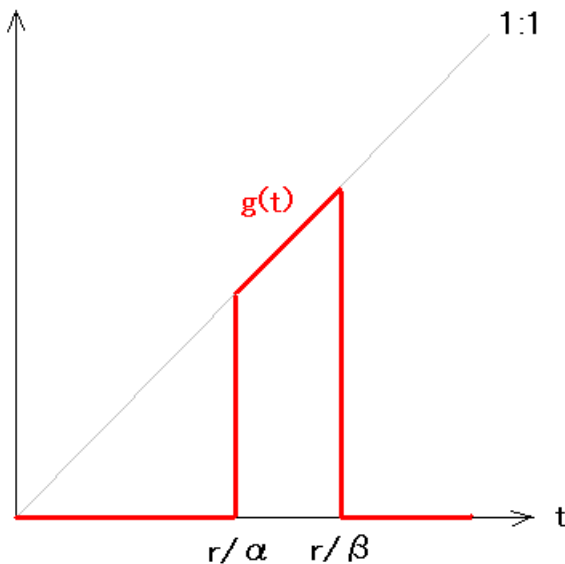


図-2 関数 $g(t)$ の定義

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \dots \dots \dots t \leq r/\alpha \\ t & \dots \dots r/\alpha < t < r/\beta \\ 0 & \dots \dots \dots r/\beta \leq t \end{cases} \quad (2)$$

これを用いると  $\int \tau D(t - \tau) d\tau$  は

$$\int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau D(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) D(t - \tau) d\tau = g(t) * D(t) \quad (3)$$

のように二つの時間関数の合積で表すことができるため、そのフーリエ変換は

$$F\left(\int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau D(t - \tau) d\tau\right) = F(g(t))F(D(t)) = \Delta(\omega) \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{(i\omega)^2} + \frac{1}{i\omega} \frac{r}{\alpha}\right) e^{-i\omega r/\alpha} \\ -\left(\frac{1}{(i\omega)^2} + \frac{1}{i\omega} \frac{r}{\beta}\right) e^{-i\omega r/\beta} \end{bmatrix} \quad (4)$$

となる。ここに  $F(\ )$  はフーリエ変換を表す。これらを考慮して式(1)の両辺をフーリエ変換すると

$$\Omega(r_0, \omega) = \frac{\beta^2 \Delta(\omega)}{4\pi} \begin{bmatrix} \int dS \frac{1}{r^4} 6(5\gamma_1^2 - 1)\gamma_3 \frac{1}{(i\omega)^2} (e^{-i\omega r/\alpha} - e^{-i\omega r/\beta}) \\ + \int dS \frac{1}{r^3} 6(5\gamma_1^2 - 1)\gamma_3 \frac{1}{i\omega} \left(\frac{1}{\alpha} e^{-i\omega r/\alpha} - \frac{1}{\beta} e^{-i\omega r/\beta}\right) \\ + \int dS \frac{1}{r^2} 2(6\gamma_1^2 - 1)\gamma_3 \frac{1}{\alpha^2} e^{-i\omega r/\alpha} \\ - \int dS \frac{1}{r^2} 3(4\gamma_1^2 - 1)\gamma_3 \frac{1}{\beta^2} e^{-i\omega r/\beta} \\ + \int dS \frac{1}{r} 2\gamma_1^2 \gamma_3 \frac{1}{\alpha^3} (i\omega) e^{-i\omega r/\alpha} \\ - \int dS \frac{1}{r} (2\gamma_1^2 - 1)\gamma_3 \frac{1}{\beta^3} (i\omega) e^{-i\omega r/\beta} \end{bmatrix} \quad (5)$$

となる。ここで

$$\int dS = \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi$$

であることを利用し  $\phi$  に関する積分を先に行う。  $\rho = \text{const}$  のとき被積分関数で変化するのは  $\gamma_1$  だけであり、また  $\gamma_1 = -(\rho/r) \cos \phi$  であるから

$$\int_0^{2\pi} \gamma_1^2 d\phi = \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi = \frac{\pi \rho^2}{r^2}$$

である。これを利用すると

$$\Omega(r_0, \omega) = \frac{\beta^2 \Delta(\omega)}{4} \left[ \begin{aligned} & \frac{30}{(i\omega)^2} \int_0^a \rho d\rho \frac{\rho^2}{r^6} \gamma_3 (e^{-i\omega r/\alpha} - e^{-i\omega r/\beta}) \\ & - \frac{12}{(i\omega)^2} \int_0^a \rho d\rho \frac{1}{r^4} \gamma_3 (e^{-i\omega r/\alpha} - e^{-i\omega r/\beta}) \\ & + \frac{30}{i\omega} \int_0^a \rho d\rho \frac{\rho^2}{r^5} \gamma_3 \left( \frac{1}{\alpha} e^{-i\omega r/\alpha} - \frac{1}{\beta} e^{-i\omega r/\beta} \right) \\ & - \frac{12}{i\omega} \int_0^a \rho d\rho \frac{1}{r^3} \gamma_3 \left( \frac{1}{\alpha} e^{-i\omega r/\alpha} - \frac{1}{\beta} e^{-i\omega r/\beta} \right) \\ & + 12 \int_0^a \rho d\rho \frac{\rho^2}{r^4} \gamma_3 \left( \frac{1}{\alpha^2} e^{-i\omega r/\alpha} - \frac{1}{\beta^2} e^{-i\omega r/\beta} \right) \\ & - 4 \int_0^a \rho d\rho \frac{1}{r^2} \gamma_3 \frac{1}{\alpha^2} e^{-i\omega r/\alpha} \\ & + 6 \int_0^a \rho d\rho \frac{1}{r^2} \gamma_3 \frac{1}{\beta^2} e^{-i\omega r/\beta} \\ & + 2i\omega \int_0^a \rho d\rho \frac{\rho^2}{r^3} \gamma_3 \left( \frac{1}{\alpha^3} e^{-i\omega r/\alpha} - \frac{1}{\beta^3} e^{-i\omega r/\beta} \right) \\ & + 2i\omega \int_0^a \rho d\rho \frac{1}{r} \gamma_3 \frac{1}{\beta^3} e^{-i\omega r/\beta} \end{aligned} \right] \quad (6)$$

ここで積分変数を $\rho$ から $r$ へ変換する。  $d\rho/dr = r/\rho$ ,  $\gamma_3 = r_0/r$ を用いると

$$\int_0^a \rho \gamma_3 d\rho = \int_{r_0}^R \rho \frac{r_0}{r} \frac{d\rho}{dr} dr = r_0 \int_{r_0}^R dr$$

である。ここに $R^2 = r_0^2 + a^2$ である。これを用いて変数変換を行うと

$$\Omega(r_0, \omega) = \frac{\beta^2 \Delta(\omega)}{4} \left[ \begin{aligned} & \frac{30}{(i\omega)^2} r_0 \int_{r_0}^R dr \frac{\rho^2}{r^6} (e^{-i\omega r/\alpha} - e^{-i\omega r/\beta}) \\ & - \frac{12}{(i\omega)^2} r_0 \int_{r_0}^R dr \frac{1}{r^4} (e^{-i\omega r/\alpha} - e^{-i\omega r/\beta}) \\ & + \frac{30}{i\omega} r_0 \int_{r_0}^R dr \frac{\rho^2}{r^5} \left( \frac{1}{\alpha} e^{-i\omega r/\alpha} - \frac{1}{\beta} e^{-i\omega r/\beta} \right) \\ & - \frac{12}{i\omega} r_0 \int_{r_0}^R dr \frac{1}{r^3} \left( \frac{1}{\alpha} e^{-i\omega r/\alpha} - \frac{1}{\beta} e^{-i\omega r/\beta} \right) \\ & + 12r_0 \int_{r_0}^R dr \frac{\rho^2}{r^4} \left( \frac{1}{\alpha^2} e^{-i\omega r/\alpha} - \frac{1}{\beta^2} e^{-i\omega r/\beta} \right) \\ & - 4r_0 \int_{r_0}^R dr \frac{1}{r^2} \frac{1}{\alpha^2} e^{-i\omega r/\alpha} \\ & + 6r_0 \int_{r_0}^R dr \frac{1}{r^2} \frac{1}{\beta^2} e^{-i\omega r/\beta} \\ & + 2i\omega r_0 \int_{r_0}^R dr \frac{\rho^2}{r^3} \left( \frac{1}{\alpha^3} e^{-i\omega r/\alpha} - \frac{1}{\beta^3} e^{-i\omega r/\beta} \right) \\ & + 2i\omega r_0 \int_{r_0}^R dr \frac{1}{r} \frac{1}{\beta^3} e^{-i\omega r/\beta} \end{aligned} \right] \quad (7)$$

が得られる。この式には

$$P_n = \int_{r_0}^R dr \frac{1}{r^n} e^{-i\omega r/\alpha}$$

$$S_n = \int_{r_0}^R dr \frac{1}{r^n} e^{-i\omega r/\beta}$$

のような形の積分が多く含まれている。そこで、ここでは $P_n$ と $S_n$ に関する漸化式を用い、被積分関数における $r$ の次数を下げることを試みる。いま

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r^{n-1}} e^{-i\omega r/\alpha} \right) = -(n-1) \frac{1}{r^n} e^{-i\omega r/\alpha} - i\omega \frac{1}{\alpha} \frac{1}{r^{n-1}} e^{-i\omega r/\alpha}$$

である。この両辺を $r_0$ から $R$ まで積分すると、 $P_n$ と $S_n$ に関する次の漸化式が得られる。

$$\begin{aligned} P_n &= -\frac{1}{n-1} \left( \frac{i\omega}{\alpha} P_{n-1} + \frac{1}{R^{n-1}} e^{-i\omega R/\alpha} - \frac{1}{r_0^{n-1}} e^{-i\omega r_0/\alpha} \right) \\ S_n &= -\frac{1}{n-1} \left( \frac{i\omega}{\beta} S_{n-1} + \frac{1}{R^{n-1}} e^{-i\omega R/\beta} - \frac{1}{r_0^{n-1}} e^{-i\omega r_0/\beta} \right) \end{aligned}$$

これを用いて式(7)の被積分関数における $r$ の次数を下げていくと、以下の周波数領域での解析解が得られる (文献<sup>2)</sup>の式(4)) .

$$\Omega(r_0, \omega) = \beta^2 \Delta(\omega) \left[ \begin{array}{l} -\frac{3 a^2 r_0}{2 R^5} \left\{ \left( \frac{1}{(i\omega)^2} + \frac{R}{i\omega\alpha} \right) e^{-i\omega R/\alpha} \right. \\ \left. - \left( \frac{1}{(i\omega)^2} + \frac{R}{i\omega\beta} \right) e^{-i\omega R/\beta} \right\} \\ -\frac{1 a^2 r_0}{2 R^3} \left( \frac{1}{\alpha^2} e^{-i\omega R/\alpha} - \frac{1}{\beta^2} e^{-i\omega R/\beta} \right) \\ +\frac{1 r_0}{2 \beta^2} \left( \frac{1}{r_0} e^{-i\omega r_0/\beta} - \frac{1}{R} e^{-i\omega R/\beta} \right) \end{array} \right] \quad (8)$$

これをフーリエ逆変換すると時間領域での解析解が得られる (文献<sup>2)</sup>の式(6)) .

$$u(r_0, t) = \beta^2 \left[ \begin{array}{l} -\frac{3 a^2 r_0}{2 R^5} \int_{R/\alpha}^{R/\beta} \tau D(t - \tau) d\tau \\ -\frac{1 a^2 r_0}{2 R^3} \frac{1}{\alpha^2} D(t - R/\alpha) \\ +\frac{1 a^2 r_0}{2 R^3} \frac{1}{\beta^2} D(t - R/\beta) \\ +\frac{1}{2} \frac{1}{\beta^2} D(t - r_0/\beta) \\ -\frac{1 r_0}{2 R} \frac{1}{\beta^2} D(t - R/\beta) \end{array} \right] \quad (9)$$

#### 4. 極限

式(9)において $r_0 \rightarrow 0$ とすると右辺括弧内の第4項だけが残る

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} u(r_0, t) = \frac{1}{2} D(t) \quad (10)$$

となる. この式が意味するのは、観測点を断層面に近づけていったとき、変位のすべり方向成分はすべり時間関数の1/2に収束するということである. 断層面を挟んで両側が変位するので1/2が付く.

一方、式(9)において $r_0 \rightarrow \infty$ とすると、 $R \rightarrow \infty$ となるので、第1項~第3項は $r_0^{-2}$ に比例して減衰する. 従って、

$$\lim_{r_0 \rightarrow \infty} u(r_0, t) = -\frac{1}{2} \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \left\{ r_0 \left( \frac{D(t - R/\beta)}{R} - \frac{D(t - r_0/\beta)}{r_0} \right) \right\}$$

ここで

$$f(r_0) = \frac{D(t - r_0/\beta)}{r_0}$$

とすると

$$\lim_{r_0 \rightarrow \infty} u(r_0, t) = -\frac{1}{2} \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \left\{ r_0(R - r_0) \frac{f(R) - f(r_0)}{R - r_0} \right\} \quad (11)$$

ここで  $r_0 \rightarrow \infty$  とすると,  $R - r_0 \rightarrow 0$  となるので,

$$\frac{f(R) - f(r_0)}{R - r_0} \rightarrow f'(r_0)$$

となる. また,

$$r_0(R - r_0) = r_0(\sqrt{r_0^2 + a^2} - r_0) = \frac{a^2 r_0}{\sqrt{r_0^2 + a^2} + r_0} \rightarrow \frac{a^2}{2}$$

となる. これらを式(11)に代入すると

$$\lim_{r_0 \rightarrow \infty} u(r_0, t) = \left( \frac{a^2}{4\beta} \right) \frac{1}{r_0} \dot{D}(t - r_0/\beta) \quad (12)$$

が得られる. これは図-1の原点に等価な(ここで仮定している円形断層とモーメントの等しい)点震源を置いたときの遠方での地震動に等しい.

## 5. 永久変位分布

式(9)において  $t \rightarrow \infty$  とすると以下の永久変位分布が得られる.

$$u(r_0, \infty) = \frac{D(\infty)}{2} \left[ 1 - \frac{r_0/a}{\sqrt{1 + (r_0/a)^2}} - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) \frac{r_0/a}{\{1 + (r_0/a)^2\}^{3/2}} \right] \quad (13)$$

右辺の括弧内は  $r_0/a$  のみの関数となっている. そこで,  $u(r_0, \infty)/(D(\infty)/2)$  を縦軸に,  $r_0/a$  を横軸にとったグラフを描くと図-3のようになる ( $\alpha/\beta = \sqrt{3}$  とした). グラフの縦軸・横軸を対数軸とするかどうかでグラフの見え方が変わってくるが, ここでは横軸を対数軸, 縦軸を線形軸としている.

このグラフは二通りの見方が可能である. 一つは断層面の半径  $a$  を固定して断層面距離  $r_0$  を変化させる場合である. 断層面距離が半径の 0.1 倍程度以下の範囲では, 無次元化された永久変位の大きさは 1 に近い. すなわち, この範囲ではほぼすべり量の半分の大きさの永久変位が生じると言える. 断層面距離が半径の 0.1 倍を超えると永久変位の大きさは急激に減少する.

次に, 断層面距離  $r_0$  を固定して半径  $a$  を変化させる場合を考える.  $a$  を大きくするほど ( $r_0/a$  は小さくなるので) 永久変位は大きくなるが,  $a$  が  $r_0$  の 10 倍程度より大きくなると永久変位の大きさは頭打ちとなる. すなわち, 観測点の永久変位に対して大きく寄与するのは, 観測点から断層面に下ろした垂線の足を中心とする半径  $10 \times r_0$  程度の範囲であると言える. よって, 永久変位を計算する際, 断層面距離が数 100m であれ

ば半径数 km 程度の範囲のすべり量を適切に与えればよいが、断層面距離が数 km の場合、半径数 10km 程度の範囲のすべり量を適切に与える必要がある。永久変位やFRINGINGステップを計算するための震源モデルを考える上でこうした情報は参考になると考えられる。

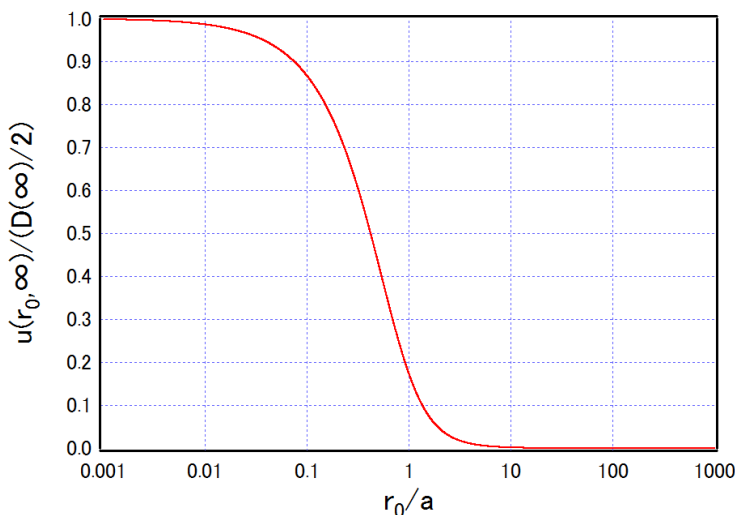


図-3 無次元化された永久変位と断層面距離との関係 ( $\alpha/\beta = \sqrt{3}$ の場合)

## 6. 解析解の利用上の注意点

増田・引間 (2002) の解析解はあくまでも円形断層が同時にすべった場合に対応し破壊伝播の効果は入っていないこと, あくまでもすべり方向成分に関する解析解であり断層直交成分については述べていないこと, などに注意する必要がある。

後者についてもう少し詳しく解説すると、観測点を断層面に近づけていったとき、すべり方向成分の地震動はすべり時間関数の 1/2 に収束するけれども、断層直交成分の地震動はすべり時間関数の 1/2 には収束しない。もしも断層直交成分の地震動がすべり時間関数の 1/2 に収束するのであれば、すべり時間関数の断層直交成分はゼロであるから、断層直交成分の地震動はゼロに収束することになってしまうが、そうはならない。それは、図-1 で言えば  $\rho = 0$  以外の部分からの地震動が寄与し、むしろそれが支配的となるためである。一方、すべり方向成分の地震動がすべり時間関数の 1/2 に収束するということは、観測点を断層面に近づけるほど  $\rho = 0$  以外の部分の影響を受けなくなるということでもあるが、これは当該成分に対しラディエーション係数がゼロとなるためである。もっともこれは断層面が平面だから言えることであり、断層面が曲面である場合や、ラディエーション係数が理論通りではない場合には、すべり方向成分の地震動がすべり時間関数の 1/2 に収束するとは言えなくなる。

## 参考文献

- 1) 増田徹・引間和人：断層近傍における地震動，日本地震学会秋季大会講演予稿集，A16，2002年。
- 2) 中央防災会議 東南海・南海地震等に関する専門調査会：強震動計算手法，2003年，  
[http://www.bousai.go.jp/kaigirep/chuobou/senmon/tounankai\\_nankaijishin/16/pdf/sankousiryu2\\_4.pdf](http://www.bousai.go.jp/kaigirep/chuobou/senmon/tounankai_nankaijishin/16/pdf/sankousiryu2_4.pdf).
- 3) Aki, K. and P.G. Richards: Quantitative Seismology, Second Edition, University Science Books, Sausalito, California, 2002.