2017/4/5

なぜ群遅延時間と地震動の経時特性は関係があるのか？（その 2）

野津

1.　はじめに

群遅延時間$t_{gr}(\omega)$と地震動の経時特性との関係について，（その 1）では，「$t_{gr}(\omega)$のω付近における局所的な平均値がω前後の成分の平均到来時刻を表す」ことを説明した．しかし，その際，群遅延時間の標準偏差には触れていなかったので，ここでは群遅延時間の標準偏差の意義について述べる．

2.　到来時刻の標準偏差

任意の時刻歴波形$f(t)$（当面，実関数に限定しない）に対し，（その 1）では平均到来時刻を次式で定義した．

$$< t >= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t|f(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt} \tag{1}$$

これに倣い，到来時刻の標準偏差σ_tを次式で定義する．

$$\sigma_t{}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (t-<t>)^2|f(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt} \tag{2}$$

これは次のように変形できる．

$$\begin{aligned}\sigma_t{}^2 &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2|f(t)|^2 dt - 2<t>\int_{-\infty}^{\infty} t|f(t)|^2 dt + <t>^2\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2|f(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt} - 2 < t >^2 + < t >^2 \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2|f(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt} - < t >^2 \end{aligned} \tag{3}$$

3.　群遅延時間の標準偏差

一方，$f(t)$の群遅延時間$t_{gr}(\omega)$に対し，平均群遅延時間を次式で定義する．

$$< t_{gr} >= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t_{gr}(\omega)|F(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega} \tag{4}$$

ここで$F(\omega)$は$f(t)$のフーリエ変換である．（その 1）では

$$< t >=< t_{gr} > \tag{5}$$

であることを示した．また，群遅延時間の標準偏差σ_{tgr}を次式で定義する．

$$\sigma_{\mathrm{tgr}}{}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\left(t_{gr}(\omega) - < t_{gr} >\right)^2 |F(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2 d\omega} \tag{6}$$

これは次のように変形できる．

$$\begin{aligned}\sigma_{tgr}{}^2 &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t_{gr}{}^2(\omega)|F(\omega)|^2 d\omega - 2 < t_{gr} > \int_{-\infty}^{\infty} t_{gr}(\omega)|F(\omega)|^2 d\omega + < t_{gr} >^2 \int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2 d\omega} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t_{gr}{}^2(\omega)|F(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2 d\omega} - 2 < t_{gr} >^2 + < t_{gr} >^2 \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t_{gr}{}^2(\omega)|F(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2 d\omega} - < t_{gr} >^2 \end{aligned} \tag{7}$$

4. 到来時刻の標準偏差と群遅延時間の標準偏差の関係

（その 1）では任意の時刻歴波形$f(t)$とそのフーリエ変換$F(\omega)$に対し

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\, d\omega \tag{8}$$

であることを説明した（パーセバルの定理）．これを$-itf(t)$とそのフーリエ変換$dF(\omega)/d\omega$に対して適用すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2|f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{dF(\omega)}{d\omega}\right|^2 d\omega \tag{9}$$

である．式(8)と式(9)を式(3)に代入すると

$$\sigma_t{}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{dF(\omega)}{d\omega}\right|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2 d\omega} - < t >^2 \tag{10}$$

が得られる．一方，

$$\begin{aligned}\left|\frac{dF(\omega)}{d\omega}\right|^2 &= \left(\frac{dF(\omega)}{d\omega}\right)\left(\frac{dF^*(\omega)}{d\omega}\right) \\ &= \left(\frac{d}{d\omega}\left(A(\omega)e^{-i\theta}\right)\right)\left(\frac{d}{d\omega}\left(A(\omega)e^{i\theta}\right)\right) \\ &= \left(\frac{dA(\omega)}{d\omega} - iA(\omega)\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}\right)e^{-i\theta}\left(\frac{dA(\omega)}{d\omega} + iA(\omega)\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}\right)e^{i\theta} \\ &= \left(\frac{dA(\omega)}{d\omega}\right)^2 + A^2(\omega)\left(\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}\right)^2 \\ &= \left(\frac{dA(\omega)}{d\omega}\right)^2 + t_{gr}{}^2(\omega)A^2(\omega)\end{aligned} \tag{11}$$

である．これを式(10)に代入すると

$$\sigma_t{}^2=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{dA(\omega)}{d\omega}\right)^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2 d\omega}+\frac{\int_{-\infty}^{\infty}t_{gr}{}^2(\omega)|F(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2 d\omega}-< t >^2 \tag{12}$$

となる．式(7)と式(12)を見比べると

$$\sigma_t{}^2=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{dA(\omega)}{d\omega}\right)^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2 d\omega}+\sigma_{tgr}{}^2 \tag{13}$$

が得られる．このように，単純に到来時刻の標準偏差=群遅延時間の標準偏差とはならず，式(13)右辺の第一項が残る．このことは和泉・勝倉[1)]やコーエン[2)]も指摘している．しかし，群遅延時間の標準偏差が到来時刻の標準偏差と関係があることはわかる．

ここで，いままでは仮定していなかったが，$f(t)$は実関数であると仮定する．このとき，$|F(\omega)|$は偶関数となる（$f(t)$が実関数のとき，$F(\omega)$と$F(-\omega)$は互いに共役複素数であるため）．また，$\theta(\omega)$は奇関数であるため，その微分である$t_{gr}(\omega)$は偶関数である．これらのことを考慮すると，式(13)の右辺第一項の積分区間は$\omega > 0$の範囲だけとすることができ，また，σ_{tgr}の定義式でも積分区間を$\omega > 0$の範囲だけとし，

$$\sigma_{\mathrm{tgr}}{}^2=\frac{\int_0^{\infty}\left(t_{gr}(\omega)-<t_{gr}>\right)^2|F(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^{\infty}|F(\omega)|^2 d\omega} \tag{14}$$

とすることができる．

以上の議論は，$f(t)$だけでなく，$f(t)$にバンドパスフィルタを適用して周波数ω前後の成分だけを取り出した波形に対しても適用できる．従って，ω付近における$t_{gr}(\omega)$の局所的な標準偏差が，ω前後の成分の到来時刻の標準偏差と関係があることがわかる．

参考文献

1) 和泉正哲・勝倉裕：地震動の位相情報に関する基礎的研究，日本建築学会論文報告集，No.327, pp. 20-28, 1983 年.
2) L.コーエン著，吉川昭・佐藤俊輔訳：時間-周波数解析，朝倉書店，pp. 1-26，1998 年.